A S. A. R.

IL DUCA DI CALABRIA

L'AUTORE

Digitized by Google

1907

BIBLIOTECA DELLA R. CASA
IN NAPOLI

N.° d'inventario ~~2049~~ 2217
Sala Grande
Scansia 32 ~~31~~ Palchetto ~~1~~ 11
N.° d'ord. ~~21~~ 8

Digitized by Google

1 Sdo 31. 1. 28.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

553190

CENNO

DI ALCUNE

TEORICHE DI ARTIGLIERIA

PER

NUNZIO FERRANTE

Maggiore del Corpo Reale di Artiglieria, Professore di Artiglieria teoretica nel Real Collegio Militare, e Cavaliere dell'Ordine S. Anna di Russia

DEDICATO

A Sua Altezza Imperiale e Reale

IL GRAN DUCA MICHELE

GRAN MAESTRO DI ARTIGLIERIA DI TUTTE LE RUSSIE

SECONDA EDIZIONE

ordinata, ed arricchita di utilissime nozioni

PER USO

DEGLI ALUNNI DEL REAL COLLEGIO MILITARE.

Chi non è matematico, non entri.
PITTAGORA

NAPOLI
DALLA REALE TIPOGRAFIA MILITARE
1857.

Digitized by Google

Digitized by Google

A S. A. I. R.

IL GRAN DUCA MICHELE

GRAN MAESTRO DI ARTIGLIERIA DI TUTTE LE RUSSIE

Altezza

Fregiato del Nome di V. A. I. R. questo mio libro si presenta al Pubblico coi più favorevoli auspicî che ad uomo sia dato desiderare. Se tanta sarà la sua ventura che possa meritare, se non plauso, almeno benevole accoglimento di così illuminato proteggitor di ogni scienza, e sapiente maestro delle Russe Artiglierie, saranno confortate appieno le mie fatiche, e i miei studî coronati di lietissimo fine.

Con questa speranza nell'animo, mentre a V. A. I. R. il mio lavoro offro e consacro, coi sensi della più profonda devozione all' Augusto suo patrocinio me e le mie povere cose fidatamente raccomando.

Di V. A. I. R.

Devotissimo, ed umilissimo servitore
NUNZIO FERRANTE.

Digitized by Google

Digitized by Google

PROEMIO

Per lungo volgere di anni le teoriche attenenti alle diverse branche di artiglieria, si rimasero, a dir così, nella infanzia, e spesso o quasi sempre ebbero a pugnare con assurdi manifesti. Perciocchè le scienze matematiche essendo state a quelle applicate molto tardi, non era così aperta e sicura la via, per cui la trattazione loro procedeva. E quantunque le quistioni di maggior conto venissero risolute con le regole della Meccanica, ciò non pertanto le teoriche, di cui diciamo, ebbero sempre la opposizion de' fatti. E ciò non perchè non avessero per loro base gli assiomi della geometria elementare, e la più sublime analisi; ma perchè il valore, che si assegnava ad alcuni speciali simboli, era tratto da ipotesi più o meno poste ad arbitrio e non da sperimenti che quello rendessero certo. In altra guisa procede la bisogna ai dì nostri, in cui le sperienze intese a quest' obbietto nulla ci lasciano a desiderare.

Ora questo lavoro, cui altro nome non vogliamo dare che quello di *Cenno*, conterrà le principali teoriche, le quali costituiscono, a così dire, la parte nobile del mestiere di artiglieria. Le quali teoriche ci siamo ingegnati di esporre e dichiarare con quella esattezza che abbiamo potuto maggiore.

Le orme che ci siamo fatti a seguire, sono quelle segnate nelle insigni loro opere dai più valenti matematici, e dagli artiglieri di più chiaro nome, affinchè nulla di vago ed incerto fosse in questo libro, e l'esposte teoriche, riuscissero utili nell'applicazione ai fatti. Tutte le formole sono state trattate con esempii numerici, onde dai loro risultamenti chiaro apparisca, come le pratiche del mestiere di artiglieria siano alla Scienza interamente subordinate e soggette.

Senza metterci qui a discutere intorno all'ordine che abbiamo tenuto, vogliamo solamente avvertire, che ci è paruto necessario lo esporre alcune teoriche le quali a prima giunta sembrano appartenere alla sola Meccanica. Perocchè il moto de' proietti trova in quelle la sua applicazione; ed oltre a ciò siffatte teoriche ne conducono per diritta via a quelle formole, che in artiglieria vengono precipuamente applicate. A questo modo si risparmia la fatica di avere ricorso a tante separate opere in cui quelle stesse teoriche si rinvengono, ma in maniera del tutto aliena dalle faccende dell'arte nostra.

Nè meno abbiamo stimato di toccare in questo proemio partitamente le materie di cui verremo nell'opera discorrendo, parendoci miglior consiglio lo starcene al giudizio de' discreti lettori, che il fare innanzi tempo una specie di protesta. Non vogliamo per altro tralasciare di pregare tutti i nostri compagni d'arme a voler esserci cortesi di loro ammaestramenti intorno a tutto quello che nel presente Cenno è trattato, rendendogli certi che loro ne sapremo buon grado, e ne faremo tesoro.

Digitized by Google

INDICE

PARTE PRIMA

Teorica I. Balistica nel vôto . . . . . *pag.* 1
» II. Angoli, e linee di mira. 15
» III. Tiro del cannone di punto in bianco nel vôto 18
» IV. Tiro a rimbalzo nel vôto 22
» V. Pruova della polvere 26
» VI. Ricerca della velocità iniziale col pendolo balistico . . 41
» VII. Ricerca della velocità iniziale con la macchina di rotazione. 51

PARTE SECONDA

Teorica I. Resistenza dei corpi che si muovono nei fluidi. . . . 55
» II. Sperimenti sulla resistenza che l'aria oppone ai corpi . 68
» III. Formole fra le velocità, e le resistenze 88
» IV. Coefficiente della resistenza dell'aria 95
» V. Moto della sfera nell'aria senza tener conto della gravità. 99
» VI. Moto verticale della sfera nell'aria, nel verso della gravità, e velocità completa. 103
» VII. Moto della sfera nell'aria in verso contrario della gravità. 105
» VIII. Decrescenza della densità atmosferica. 107
» IX. Resistenza avuto riguardo alla decrescenza della densità dell'aria 114
» X. Moto verticale della sfera nel verso della gravità, avuto riguardo alla decrescenza della densità dell'aria. . . 115
» XI. Moto verticale della sfera nel verso contrario della gravità, avuto riguardo alla decrescenza della densità dell'aria 118

Digitized by Google

PARTE TERZA

Teorica I. Teoremi sulla velocità dei proietti, stabiliti dagli sperimenti 122
» II. Sforzo del fluido svolto dalla polvere contro il proietto. 144
» III. Vento ed angoli di partenza 149
» IV. Sperimenti di Robins sulla elasticità del fluido svolto dalla polvere 157
» V. Velocità iniziale, e circostanze che accompagnano il moto del proietto nell'anima dell'arma 161
» VI. Elasticità del fluido svolto dalla polvere, paragonata all'elasticità dell'aria 174
» VII. Velocità massima. Cariche in generale, e peso corrispondente, paragonato a quello del proietto 186
» VIII. Velocità iniziale in funzione delle superficie del focone, e del vento 193
» IX. Formole riguardanti la perdita di velocità per l'evasamento delle armi. 204

PARTE QUARTA

Teorica I. Lunghezza delle anime dei pezzi 217
» II. Effetto del fluido elastico svolto dalla polvere, contro l'interno delle armi da fuoco; ossia scala delle pressioni. 226
» III. Tenacità dei metalli 236
» IV. Spessezza di metallo delle bocche da fuoco 238
» V. Effetto della quantità di moto verticale del proietto sull'orlo della bocca dell'anima, allorchè si forma l'angolo massimo di partenza 252
» VI. Situazione degli orecchioni, e dei manichetti. 255
» VII. Camere e foconi 265

PARTE QUINTA

Teorica I. Balistica nel mezzo resistente, considerando costante la densità dell'aria 279
» II. Equazione della traiettoria, considerando costante la densità dell'aria 299

Digitized by Google

Teorica III. Traiettorie simili, e tiro del mortaro 304
» IV. Tiro con piccoli angoli di proiezioni 311
» V. Tiro di punto in bianco 334
» VI. Tiro con piccoli angoli di proiezioni 340
» VII. Ricerca della velocità iniziale (metodo di Lombard) . . 342
» VIII. Tiro di punto in bianco (metodo di Lombard) 347
» IX. Metodo stabilito pel tiro di punto in bianco, paragonato con quello di Lombard 358
» X. Tiro a rimbalzo 363
» XI. Tiro a rimbalzo (metodo di Lombard) 372
» XII. Tiro con angoli qualunque di proiezione, supponendo costante la densità dell'aria 375
» XIII. Tiro del mortaro provetto 382
» XIV. Balistica nel mezzo resistente, considerando variabile la densità dell'aria 385
» XV. Angoli di proiezione che danno la massima ampiezza . 425

PARTE SESTA

Teorica I. Recesso 441
» II. Circostanze che influiscono nella giustezza dei tiri delle bocche da fuoco 451
» III. Immersioni 463
» IV. Tavole del tiro in generale 478
» V. Tiro de'pezzi da campagna. 484
» VI. Tiro contro le piazze forti 488
» VII. Tiro per la difesa delle piazze 492
» VIII. Tiro delle batterie di costa. 494
» IX. Piramidi di palle. 497

Digitized by Google

Digitized by Google

PARTE PRIMA.

TEORICA I.

Balistica nel vôto.

1. Quella parte della Dinamica che tratta del moto de' corpi pesanti scagliati dalle armi da fuoco, si chiama *balistica*. Allora-quando il moto di tali corpi viene considerato sottoposto alla sola forza di gravità, la balistica dicesi essere nel vôto: e se oltre alla gravità si considerano i corpi ritardati nel loro moto dalla resistenza dell' aria, allora la balistica è detta esser nel mezzo resistente.

Pare a prima giunta che la balistica nel vôto riesca al tutto inutile per le varie applicazioni che si richieggono pel moto de' corpi in generale: ma, per poco che si analizzino bene le formole corrispondenti, si verrà acquistando la cognizione di tante verità, senza le quali la balistica nel mezzo resistente rimarrebbe arrestata nello sviluppo delle sue formole, e non condurrebbe a quelle conseguenze utilissime, che sono il fermo e precipuo fondamento delle norme precise che guidano con sicurtà il tiro delle bocche da fuoco di ogni maniera. Senza le quali cognizioni le artiglierie verrebbero adoperate con fallacia, tanto rispetto alla posizione degli oggetti da colpirsi, quanto rispetto alla natura della *traiettoria*, ossia

cammino che segna il proietto; ed oltre a ciò si fa manifesta per essa la inutilità di tante regole o nate dal caso, o da falsi giudizii suggerite.

Per conseguire adunque lo scopo, facciamo uso delle formole dinamiche

$$\frac{d^2x}{dt^2}=X\,,\ \frac{d^2y}{dt^2}=Y,\ \text{e}\ \frac{d^2z}{dt^2}=Z,$$

nelle quali X, Y e Z sono le componenti delle forze acceleratrici e ritardatrici del moto, che operano sul corpo, secondo le parallele agli assi coordinati rettangolari x, y e z.

Suppongasi ora che il corpo sia spinto da una forza in una maniera qualunque, ed il moto venga ritardato dalla sola gravità g. E siccome questa agisce solamente nella posizione verticale, così le dette componenti assumeranno i valori di

$$X=0\,,\ Y=0\,,\ Z=-g.$$

Quello di Z è negativo, perciocchè la gravità tende sempre in questo caso a diminuire le ordinate verticali della traiettoria; onde

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0,\ \frac{d^2y}{dt^2}=0,\ \frac{d^2z}{dt^2}=-g.$$

Moltiplicando quindi la prima e la seconda per dt, ed integrandole rispetto ad x ed y, si ha

$$\frac{dx}{dt}=C\,,\ \frac{dy}{dt}=C'\,;$$

e facendo su queste la operazione medesima ne risulta $x=B+Ct$, $y=B'+C't$: allorchè $t=o$, risulta $x=o$, ed $y=o$, in conseguenza $B=o$, e $B'=o$: onde $x=Ct$, ed $y=C't$, dalle quali eliminando il tempo t; si ottiene

$$Cy=C'x\,,$$

ch' è l'equazione ad una retta che passa per l' origine delle coordinate, ed esprime la proiezione orizzontale della traiettoria.

Da ciò si deduce che *la curva descritta da un corpo sottoposto semplicemente alla forza di gravità è una curva piana:* la qual cosa agevola la ricerca della equazione di essa curva; vale a dire, che possiamo far uso di due assi coordinati, uno verticale, e l'altro orizzontale, ch'esprimono il piano su cui giace la traiettoria, il cominciamento della quale sia preso per origine delle coordinate. Le formole da risolversi saranno

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0\,,\frac{d^2y}{dt^2}=-g\,,$$

che moltiplicate per dt, ed integrate ne danno

$$\frac{dx}{dt}=C\,,\frac{dy}{dt}=B-gt.$$

La prima, nel caso di $t=o$, indica la componente parallela all'asse delle x della velocità con cui è spinto il corpo. Facendo nell'altra anche $t=o$, resta

$$\frac{dy}{dt}=B\,,$$

ch'è la componente parallela all'asse della y della enunciata velocità.

Sia V la velocità in parola, *o velocità di partenza*, detta pure *iniziale;* ed α sia l'angolo che il primo elemento della traiettoria fa con l'asse orizzontale, ossia l'angolo della proiezione: risulta

$$\frac{dx}{dt}=C=V\cos\alpha\ ,\quad \frac{dy}{dt}=B-gt=V\operatorname{sen}\alpha-gt\ ;$$

ed eseguendo la moltiplicazione per dt ed integrando, ne avremo

$$x=V\cos\alpha\cdot t+C'\ ,\quad y=-\tfrac{1}{2}gt^2+V\operatorname{sen}\alpha\cdot t+B'.$$

Allorquando le coordinate si valutano dalla origine, dove $t=o$, emerge $C'=o$, e $B'=o$: e l'equazioni diventano

$$x=V\cos\alpha\ t\ ,\quad y=-\tfrac{1}{2}gt^2+V\operatorname{sen}\alpha\cdot t.$$

Le quali formole appartengono ai moti, equabile e ritardato. Quindi procede la norma *che il moto curvilineo nel vôto si compone di due altri moti espressi da queste ultime equazioni:* da cui eliminando il tempo si avrà

$$y = x \cdot \tan\alpha - \frac{gx^2}{2V^2\cos^2\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ch'è la cercata equazione della traiettoria, la quale indica una parabola che passa per l'origine delle coordinate.

Sia h l'altezza dovuta alla velocità V; e perchè $V^2 = 2gh$, ne risulta

$$y = x \cdot \tan\alpha - \frac{x^2}{4h\cos^2\alpha} = x \cdot \tan\alpha - \frac{x^2}{4h\left(\frac{1}{1+\tan^2\alpha}\right)} \quad . \quad . \quad (2)$$

2. (*Fig. 1*). Per costruire la curva in disamina, si tirino due assi yy', xx' l'uno verticale e l'altro orizzontale. Sostituendo nella formola (2) per y zero, si ottiene

$$x = 4h \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha = 2h \operatorname{sen}.2\alpha,$$

ascissa corrispondente al punto ove la curva interseca l'asse delle x. Sia AC un tal valore: dal punto medio D si elevi la normale DB che dovrà contenere il vertice della parabola. Sostituendo per x nella (2.§.1) $2h \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha = AD$, si ottiene

$$y = h \operatorname{sen}^2\alpha,$$

che tagliasi nella DB, cioè si prende $DB = h \operatorname{sen}^2\alpha$. I punti A, B, e C apparterranno alla traiettoria, il cui parametro, come per l'analisi a due coordinate si conosce, è $4h\cos^2\alpha$, mediante il quale potrà descriversi la parabola con moto organico, e sia ABC che verrà disposta simmetricamente intorno l'asse BD, come si fa manifesto dalla suddetta equazione.

3. La retta AC dicesi *ampiezza* della curva; ch'espressa con X dà

$$X = 2h \operatorname{sen} 2\alpha = \frac{V^2}{g} \operatorname{sen} 2\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Digitized by Google

Per un' altra velocità, ed un altro angolo di proiezione si ha

$$X' = \frac{V'^2}{g} \operatorname{sen} \cdot 2\alpha' ,$$

onde

$$X : X' :: (V^2 : V'^2)(\operatorname{sen} 2\alpha : \operatorname{sen} 2\alpha')$$

Da ciò si conchiude, che *le ampiezze sono nella ragion composta de'quadrati delle velocità iniziali, e de' seni de' doppii angoli d' inclinazione.* Con un tale principio Belidoro costruì le inutili tavole del Bombardiere Francese.

4. Se $V = V'$, avrassi

$$X : X' :: \operatorname{sen} 2\alpha : \operatorname{sen} 2\alpha'$$

Quindi le ampiezze conservano la ragione de'seni de'doppii angoli d' inclinazione, alloraquando la velocità iniziale del mobile è la stessa.

5. Allorchè $\alpha = \alpha'$

$$X : X' :: V^2 : V'^2 :: h : h' .$$

Onde le ampiezze sono fra loro come i quadrati delle velocità, o come le altezze dovute a queste, quando i proietti partano sotto angoli eguali di proiezione.

6. Per rinvenire il massimo valore di y si differenzii l'equazione (2.§.1), ed il coefficiente differenziale rispetto ad x si ponga eguale a zero; quindi

$$\frac{dy}{dx} = \tan\alpha - \frac{x}{2h\cos^2\alpha} = o , \text{ ed}$$

$$x = 2h\cos^2\alpha \cdot \tan\alpha = 2h \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha .$$

Adunque alla massima ordinata corrisponde per ascissa la metà dell' ampiezza (§.3).

Sostituendo nella (2.§.1) per x questo valore, si ottiene

$$y = h \operatorname{sen}^2\alpha$$

per l' altezza *della gettata ch' è precisamente al vertice della parabola* (§.2.).

Se fosse $\alpha = 45^\circ$, sarebbe $\cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha$, e quindi

$$y = h\cos^2\alpha.$$

Cioè allorquando il mobile è spinto sotto l'angolo semiretto, l'ordinata al vertice della traiettoria è uguale alla quarta parte del parametro: ossia il fuoco della curva si trova nell'asse delle x.

7. L'espressione $X = 2h\operatorname{sen}\cdot 2\alpha$ (§.3) dà

$$\frac{dX}{d\alpha} = 4h\cos\cdot 2\alpha,$$

il quale eguagliato a zero, risulta $\cos\cdot 2\alpha = 0$, ossia $\alpha = 45^\circ$ *Per conseguenza la massima ampiezza si ottiene quando l'angolo di proiezione è semiretto*: onde proviene

$$X = 2h = \frac{V^2}{g},$$

ch' è la doppia altezza dovuta alla velocità iniziale: ed Y in tal caso sarà eguale a $h\operatorname{sen}^2\cdot 45^\circ = \frac{1}{2}h$.

8. Essendo $X = 4h\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$ (§.3), ed $X' = 4h\operatorname{sen}\alpha'\cdot\cos\alpha'$: unendo a queste due equazioni la condizione di $\alpha + \alpha' = 90^\circ$, si ha $\operatorname{sen}\alpha' = \cos\alpha$, e $\cos\alpha' = \operatorname{sen}\alpha$, e quindi $X' = 4h\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$, da cui $X = X'$. *Ciò dimostra che un proietto spinto con la stessa velocità e sotto angoli, l'uno complemento dell'altro, dà le ampiezze eguali.* Siccome

$$\frac{\frac{1}{2}X}{Y} = \frac{h\operatorname{sen}2\alpha}{h\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\cdot 2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = 2\cot\alpha.$$

Similmente

$$\frac{\frac{1}{2}X'}{Y'} = 2\cot\alpha'.$$

Se $\alpha = \alpha'$, n' emerge

$$\tfrac{1}{2}X : Y :: \tfrac{1}{2}X' : Y'$$

Così pure

$$\tfrac{1}{2}X : Y :: \tfrac{1}{2}X'' : Y''$$

Perciò quando un proietto è spinto con varie velocità sotto un angolo costante di proiezione, descriverà tante parabole i cui vertici

si troveranno situati in una linea retta, purchè le curve abbiano la stessa origine. La qual cosa emerge pure dal considerare che $\frac{Y}{X}=\frac{h\,\text{sen}^2\alpha}{2h.\text{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{1}{2}\tan\alpha$, e $Y=\frac{1}{2}X\cdot\tan\alpha$, equazione ad una retta che passa per l'origine delle coordinate: e siccome le variabili sono Y ed X, così in tale retta si troveranno i vertici delle parabole descritte con diverse velocità, e con un costante angolo di proiezione.

9. Se poi l'angolo α diventasse di depressione come FAx, allora l'ampiezza sarebbe $X=-2h\,\text{sen}\cdot 2\alpha=AC$.

(*Fig.2*) Descritta la parabola prenderebbe la posizione $MABCN$ ed il corpo percorrerebbe il solo ramo AM protratto indefinitamente.

10. (*Fig.1*). Se α diventa zero, l'equazione (2.§.1) si cambia in $y=-\frac{x^2}{4h}$ appartenente ad una parabola, il cui parametro è $4h$, il vertice si trova in A, e la sua posizione risulta bAa.

Il segno meno, di cui è affetto il secondo membro della equazione, indica che le ordinate debbonsi prendere tutte negativamente, o, ciò ch'è lo stesso, la curva sta tutta al disotto della orizzontale xx': ossia, il segno meno è solamente relativo alla posizione della traiettoria, con tale avvertenza si ha

$$-y=-\frac{x^2}{4h},\ \text{o pure}\ y=\frac{x^2}{4h}.$$

(*Fig. 1 e 2*). Quando l'angolo di elevazione FAx, eguaglia l'altro di depressione FAx, la parabola $ABCQ$ diventa identica all'altra $MABCN$, perciocchè il valore del parametro $4h\cos^2\alpha$ non si altera: se ad α si sostituisca $-\alpha$, la sola posizione della curva è diversa relativamente agli assi coordinati. Da ciò si deduce:

1.° *Che un corpo spinto con elevazione descrive un arco di parabola, nel quale trovasi il vertice corrispondente.*

2.° *Che un corpo spinto con depressione descrive un arco parabolico, il quale non contiene il vertice della curva, e che se*

la curva si compisse, esso vertice sarebbe situato al disopra della orizzontale condotta dal punto di partenza.

3.° *Che gittato un corpo con l'angolo zero, ossia orizzontalmente, il vertice della traiettoria si trova nel punto di partenza.*

11. La equazione (2. §. 1) risoluta rispetto a $\tan\alpha$, ne dà

$$\tan\alpha = \frac{2h}{x} \pm \frac{1}{x}\sqrt{4h^2 - 4hy - x^2},$$

il che ci farà conoscere sotto qual angolo abbia a spingersi un proietto, affinchè giunga ad un dato punto.

(Fig. 1). Siano AH, ed HG le coordinate del punto G, indicate da m ed n, ed avremo

$$\tan\alpha = \frac{2h}{m} \pm \frac{1}{m}\sqrt{4h^2 - 4hn - m^2}.$$

Se il punto si trovasse al disotto di Ax, come Q, per x, ed y bisognerà sostituire AO, ed OQ, cioè m e $-n$; dunque

$$\tan\alpha = \frac{2h}{m} \pm \frac{1}{m}\sqrt{4h^2 + 4hn - m^2}.$$

Allorchè il punto da colpirsi è nell'asse Ax, come C, per x ed y si avrà a sostituire AC e zero, cioè m ed $n = o$, onde

$$\tan\alpha = \frac{2h}{m} \pm \frac{1}{m}\sqrt{4h^2 - m^2}.$$

Due sono i valori di $\tan\alpha$ in ciascuna delle tre posizioni dell'oggetto, e quindi con due differenti angoli d'inclinazione e con una sola velocità iniziale il punto potrà esser colpito.

I radicali poi diverrebbero immaginarii allorquando fosse

$$4h^2 < 4hn + m^2,\ 4h^2 + 4hn < m^2,\ \text{e}\ 4h^2 < m^2.$$

La qual conseguenza dimostra non esser sempre possibile con una data velocità il fare giungere un proietto ad una data distanza, ed esser mestieri per colpire il punto, ch'essa velocità iniziale soddisfaccia ad una equazione di condizione, che contenga le coordinate al dato punto.

Il valore di $\tan\alpha$ sarà un solo allorchè il radicale svanisce: *vale a dire che non sempre è possibile il colpire un bersaglio con due angoli differenti di proiezione, e con una sola velocità.*

Che se l'altezza dell'oggetto, ossia la n, non fosse conosciuta, ma in quella vece fosse dato l'angolo $GAH=\varphi$, sotto cui è stato veduto il punto, si potrebbe allora sostituire per n, $m\tan\varphi$; dal che risulterebbe

$$\tan\alpha=\frac{2h}{m}\pm\frac{1}{m}\sqrt{4h^2-4hm\tan\varphi-m^2}.$$

(*Fig. 3*). Esprimendo con α l'angolo maggiore, e con α' l'angolo minore con cui può essere colpito l'oggetto G, si avrà

$$\tan\alpha=\frac{2h}{m}+\frac{1}{m}\sqrt{4h^2-4hm\tan\varphi-m^2}$$

$$\tan\alpha'=\frac{2h}{m}-\frac{1}{m}\sqrt{4h^2-4hm\tan\varphi-m^2},$$

onde

$$\tan\alpha+\tan\alpha'=\frac{4h}{m},\quad \tan\alpha\cdot\tan\alpha'=$$

$$\frac{4h^2}{m^2}-\frac{1}{m^2}(4h^2-4hm\tan\varphi-m^2)=\frac{4h\tan\varphi}{m}+1,$$

da cui

$$1-\tan\alpha\cdot\tan\alpha'=-\frac{4h\tan\varphi}{m},\ \text{e perciò}$$

$$\frac{\tan\alpha+\tan\alpha'}{1-\tan\alpha\cdot\tan\alpha'}=-\frac{1}{\tan\varphi};$$

ma il primo membro di questa equazione è uguale a $\tan(\alpha+\alpha')$: in conseguenza $\tan(\alpha+\alpha')=-\frac{1}{\tan\varphi}=-\cot\varphi$: sarà per la trigonometria $\alpha+\alpha'-\varphi=90^\circ$; in generale $\alpha+\alpha'\mp\varphi=90^\circ$ per le due posizioni del punto G, cioè o al disopra, o al disotto della Ax.

Sia G il punto da colpirsi da A: l'angolo maggiore sotto

cui deve partire il proietto sia $HAx = \alpha$, ed il minore $LAx = \alpha'$: l'angolo $GAx = \varphi$; sarà per quello che si è detto $HAx + LAx - GAx = 90°$, e $HAx - GAx = 90° - LAx$, ossia $HAG = yAx - LAx = yAL$: toltone di comune l'angolo HAL risulta $LAG = HAy$.

Si divida per metà l'angolo yAG, mediante la retta AT: ed essendo l'angolo LAG eguale all'angolo HAy, e $GAT = TAy$, saranno i rimanenti LAT, TAH eguali fra loro: ciò vale a dire: *che le due direzioni, con cui può essere spinto un mobile per colpire un dato punto, fanno angoli eguali con la retta che divide per metà l'angolo al zenit del punto.*

I valori di $\tan\alpha$, e $\tan\alpha'$ si riducono ad un solo, cioè $\tan\alpha = \frac{2h}{m}$, allorchè il radicale $4h^2 - 4hm\tan\varphi - m^2$ pareggia zero, da cui $2\tan\varphi = \frac{2h}{m} - \frac{m}{2h}$: si avrà $\tan^2\alpha = \frac{4h^2}{m^2}$, $2\tan\alpha \cdot \tan\varphi = \frac{4h^2}{m^2} - 1$: onde $\tan^2\alpha - 2\tan\alpha \cdot \tan\varphi = 1$, e compiendo il quadrato $(\tan\alpha - \tan\varphi)^2 = 1 + \tan^2\varphi = \sec^2\varphi$, e $\tan\alpha - \tan\varphi = \sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi}$, o pure $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}$, e quindi $\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\varphi - \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\varphi = \cos\alpha$: ma il primo membro indica il seno della differenza de' due archi α, e φ, perciò $\operatorname{sen}(\alpha - \varphi) = \cos\alpha = \operatorname{sen}(90° - \alpha)$, e quindi $\alpha - \varphi = 90° - \alpha$, ossia $\alpha = \frac{1}{2}(90° + \varphi)$.

(*Fig. 1*). Sia $FAx = \alpha$, $GAH = \varphi$, si divida per metà l'angolo retto con la AL, e l'altro GAH con la AT: sarà $FAx - GAx = yAx - FAx$, e $FAG = FAy$, cioè: *la direzione unica divide per metà l'angolo della verticale, condotta dal punto di partenza, e della congiungente questo e l'oggetto, ossia divide in due parti eguali l'angolo al zenit del punto da colpirsi.*

Se l'oggetto è posto al disotto della Ax si avrà

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(90° - \varphi).$$

12. Chiamando v la velocità che ha il mobile dopo aver percorso una parte della traiettoria; si avrà per la Dinamica $v^2 = 2\int(Xdx + Ydy + Zdz)$; e perchè la curva è piana (§.1), perciò la formola da usarsi diviene $v^2 = 2\int(Xdx + Ydy)$, in cui $X = 0$, ed $Y = -g$ (§.1); onde $v^2 = 2\int -gdy = -2gy + C$ Allorchè $y = 0$, la velocità v diventa iniziale, e perciò $V^2 = C$, da cui $v^2 = V^2 - 2gy$ e

$$v = \pm\sqrt{2g(h-y)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Il doppio segno del radicale esprime *che il mobile trovandosi ne' punti egualmente alti sull'orizzonte, ossia egualmente distanti dal vertice della curva, acquista la stessa velocità.*

Pei punti al disotto dell'orizzonte $v = \pm\sqrt{2g(h+y)}$

13. Sostituendo nella (1.§.12) per y, $h\,\text{sen}^2\alpha$ (§.6) si ha $v = \pm\sqrt{2hg(1-\text{sen}^2\alpha)} = V\cos\alpha$, *cioè al vertice della curva* (§.1) *la velocità pareggia la componente orizzontale della velocità iniziale, o di partenza.*

14. (*Fig.4*) Esprima $AHBQ$ la traiettoria rapportata agli assi, Ax orizzontale, ed Ay verticale. Dal punto C, in cui $AC = h$, si conduca la orizzontale CR che sarà la direttrice della parabola: infatti $FH = FG - HG = h - h\,\text{sen}^2\alpha = h\cos^2\alpha$, quarta parte del parametro (§.2). Dal vertice H e dai punti N, L, Q ec, si menino le verticali DE, KM, RQ ec. Supponiamo ora, che il grave scenda da D in forza della sua gravità: la velocità che acquista in N sarà $u = \sqrt{2g\,DN} = \sqrt{2g(CA - NE)} = \sqrt{2g(h-y)}$. Da tale valore identico a quello di v, *si rileva che la velocità di un corpo cadendo verticalmente dalla direttrice ad un punto dell'arco parabolico, eguaglia l'altra, che avrebbe luogo se il corpo fosse gittato dal sito di partenza al medesimo punto.*

Sia Afb un'altra parabola descritta con la stessa velocità V di partenza, ma con un diverso angolo: la velocità in n è indicata da $v' = \sqrt{2g \cdot Dn}$, quindi

$$v : v' :: \sqrt{DN} : \sqrt{Dn}.$$

Si descrivano le parabole Afb, AHB ec, con la stessa velocità, e con angoli differenti di elevazione. Dai vertici f ed H ec, si conducano le normali afc, GHF ec.

Essendo $Aa = 2h \operatorname{sen} \alpha' \cdot \cos \alpha'$ (§. 2), e quindi

$$Aa^2 = 4h^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha' \cdot \cos^2 \alpha'.$$

Inoltre $af = h \operatorname{sen}^2 \alpha'$, e $fc = h \cos^2 \alpha'$; ne danno la proporzione

$$Aa^2 : af \times fc :: 4h^2 : h^2 : \text{ o pure}$$

$$fd^2 : Ad \times dC :: 4CA^2 : AC^2.$$

La qual proporzione dimostra che il punto f appartiene al perimetro di una ellisse il cui asse maggiore sia $2CA$, ed il minore AC. Similmente si dimostra che $Hg^2 : Ag \times gC :: 4CA^2 : AC^2$ così ec. Per la qual cosa si fa manifesto *che le parabole descritte con le enunciate condizioni hanno i loro vertici allogati nella curva ellittica, la quale ha per suoi assi* 2h, *e* h *che sono coordinate del vertice della parabola descritta con l'angolo semiretto* (§. 7). Lo stesso può dimostrarsi così, essendo $x = 2h \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha$, $y = h \operatorname{sen}^2 \alpha$, si avrà $x^2 = 4h^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 4h^2 (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) \operatorname{sen}^2 \alpha$, e $x^2 = 4h^2 \left(1 - \frac{y}{h}\right) \frac{y}{h}$; infine $4y^2 - 4hy + x^2 = 0$ ch'è l'equazione ad una ellisse disposta simmetricamente intorno agli assi delle ordinate della curva: percui l'asse delle y la divide per metà, e perciò l'asse principale coinciderà con la Ay. E ponendo nella detta equazione $x = 0$, si avrà $Y = h$ pel detto asse minore: facendo $y = \frac{1}{2} h$ si ha $X = \pm h$ pel semiasse maggiore: dunque gli assi sono $Y = h$, $X = 2h$.

La mezza ellisse che passa pei punti f, H ec., è $AfHC$: l'altra ChA conterrà i vertici delle traiettorie descritte con angoli di depressione (§. 9).

15. Dall'equazioni $x = V . \cos \alpha \; t$, $y = -\frac{1}{2} g t^2 + V \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot t$ (§. 1) possiamo conoscere il tempo in funzione di una delle coordinate al punto da colpirsi, della velocità iniziale e dell'angolo di proiezione. La seconda equazione dà

$$t = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \sqrt{2h} \pm \sqrt{2 (h \operatorname{sen}^2 \alpha - y)}}{\sqrt{g}} \quad \ldots\ldots (5).$$

Il doppio valore di t dimostra, *che il maggior tempo è quello che impiega il proietto per giungere ad un punto del ramo discendente, ed il minore è quello che ci vuole per arrivare ad un punto del ramo ascendente egualmente discosto dal vertice.*

Il radicale si annulla allorchè $h\,\text{sen}^2\alpha - y$ è zero, cioè quando $y = h\,\text{sen}^2\alpha$ (§.6), e $t = \text{sen}\,\alpha\sqrt{\frac{2h}{g}}$ sarà il tempo necessario affinchè il grave giunga al vertice della traiettoria.

Il tempo per la verticale FH, secondo le regole della Dinamica, è

$$T = \sqrt{\frac{2FH}{g}} = \sqrt{\frac{2(FG-GH)}{g}} = \sqrt{\frac{2h(1-\text{sen}^2\alpha)}{g}} = \cos\alpha\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}:$$

dunque $T:t::\cos\alpha:\text{sen}\,\alpha$. *Il che val quanto dire che il tempo necessario per giungere dalla direttrice al vertice, sta a quello che ci vuole per giungere dal punto di partenza al vertice, come il coseno dell' angolo di proiezione sta al suo seno.*

Ora facendo in (5) $\alpha = 90°$: risulta $x = 0$, e posto questo valore in (2.§.1) dà $y = 0$; e $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{V}{g}$, che rappresenta il tempo necessario affinchè il grave percorra l'altezza corrispondente alla velocità con la quale è stato spinto verticalmente.

L' altra equazione dà

$$t = \frac{x}{V\cos\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6),$$

la quale esprime anche il tempo in una maniera più semplice della equazione antecedente.

Volendo poi valutare il tempo necessario perchè si descriva l'arco AN, si sostituisca per x l'ascissa AE, e si ottiene $t = \frac{AE}{V\cos\alpha}$; posto per x, $AG = 2h\,\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha$ (§.2), si ha $t = \frac{2h\,\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha}{V\cos\alpha} = \text{sen}\,\alpha\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}$ che è il tempo necessario a descrivere la metà

della traiettoria; e fatto $x=4h.\text{sen}\alpha.\cos\alpha$, sarà $t=2\text{sen}\alpha\sqrt{\frac{2h}{g}}$, che rappresenta il tempo che occorre a descrivere la intera traiettoria mediante il mobile.

Infine fatto $x=AP$; sarà $t=\frac{AP}{V\cos\alpha}$, tempo che ci vuole per percorrere l'arco ABQ.

Quindi eliminando dalla (5) e (6) la V, si ottiene

$$t=\pm\sqrt{\frac{2(x\tan\alpha\mp y)}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Il segno di y determinerà la situazione del punto da colpirsi.

Facendo $\alpha=45°$ ed $y=0$; avrassi $t=\pm\sqrt{\frac{2x}{g}}$, tempo che impiega il corpo a descrivere l'ampiezza quando l'angolo di proiezione è semiretto.

Le quali formole stabilite possono servire per tutti i quesiti intorno alla Balistica nel vôto: poichè risguardano la velocità di partenza, la velocità residua, l'angolo di proiezione, il tempo, e la situazione dell'oggetto che si vuole colpire.

(*Fig.3*) Per rapportare l'equazione $y=x\tan\alpha-\frac{x^2}{4h\cos^2\alpha}$ all'asse yz, ed alla tangente UH condotta dall'origine A, si osservi che $EP=AP\tan EAP=x\tan\alpha$, e $z=AQ=EM=EP-MP=x\tan\alpha-y$, e $y=x\tan\alpha-z$: come pure $AP=x=AE\cos\alpha=MQ\cos\alpha=u\cos\alpha$: dunque $x\tan\alpha-z=x\tan\alpha-\frac{u^2}{4h^2}$ da cui $u^2=4hz$. Una equazione simile a questa si ottiene prendendo per origine tutt'altro punto della curva. Segue da ciò.

« 1.° *La traiettoria ha la proprietà, che rapportata ad un* » *diametro verticale ed alla tangente corrispondente, assume una* » *equazione della forma* $y^2=px$.

» 2.° *Il parametro* p *è uguale alla quadrupla altezza dovuta* » *alla velocità del proietto, nel punto che si considera come origine* » *delle coordinate.*

TEORICA II.

Angoli, e linee di mira.

16. (*Fig. 5*). Sia *AECD* un cannone, pel cui asse orizzontale *EM*, s'intenda che passi un piano verticale. Questo segnerà nella *fascialta di culatta* il punto *A*, e nella *gioia* il punto *C*. Tanto l'uno quanto l'altro saranno rispetto all'orizzonte che passa al disotto dell'arma, più alti degli altri che si otterrebbero da un piano qualunque, il quale vada per l'asse, indicati sulle stesse modenature. La congiungente *AC chiamasi linea di mira naturale*, *o raggio visuale*. Allorquando tale linea trovasi nel piano verticale per l'asse dell'arma che passa per un bersaglio, è segno che bene si è mirato, ossia che il piano della traiettoria incontrar deve l'oggetto da colpirsi. Sia *MHLO* tale traiettoria; i punti *H* ed *L* diconsi *punti in bianco naturali della bocca da fuoco*, ottenuti dall'incontro che fa la linea di mira protratta con la linea del tiro.

Se perpendicolarmente sulla fascialta di culatta si elevi una retta *Aa* ch'esista nel piano verticale per l'asse, la congiungente *aC* dicesi *linea di mira artificiale*, ed i punti *q* ed *O*, che risultano dall'incontro di detta linea con la traiettoria, si nomano *punti in bianco artificiali*. La *retta Aa dicesi alzo positivo*, *la AK alzo negativo*: la retta *KC linea di mira artificiale*, ed i punti *p* e *Q* anche essi *punti in bianco artificiali*.

I punti *L*, *O*, *Q* meritano tutta l'attenzione dell'artigliere. Non ci è per altro occasione in cui abbia a tenersi conto degli altri punti *H*, *q*, *p*, essendo prossimi all'arma.

Gl'incontri *G*, *g* ed *m* delle linee di mira con l'asse *EM* prolungato, formano gli angoli *AGE*, *agE*, *KmE*; il primo de' quali dicesi *angolo di mira naturale*, e gli altri *angoli di mira artificiali*. Chiaramente si scorge che ogni bocca da fuoco può avere un solo angolo di mira naturale, ed infinito numero di artificiali.

Digitized by Google

La congiungente il punto M, centro del cerchio della bocca dell'arma, col punto in bianco naturale L, vien denominata *portata di punto in bianco naturale*, le altre congiungenti MO, MQ si dicono *portate di punti in bianco artificiali*. Gli angoli che hanno i loro vertici in L, O, e Q ed i lati che passano per gli estremi del semidiametro della gioia, ossia per C e per D, si dicono *angoli al punto*. La retta CD si ottiene con abbassare dal punto più alto C della tromba la perpendicolare all'asse EM.

Sia $CD=r$ il raggio alla gioia, $AB=R$ quello alla fascialta di culatta, $BD=L$ l'intervallo fra questi raggi, e l'angolo $AGB=ACN=M$ l'angolo di mira naturale.

Per la trigonometria

$CN : NA :: 1 : \tan M$; in simboli

$$\tan \cdot M=\frac{R-r}{L} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

Facendo $Aa=AK=H$, e sostituendo per R, $R\pm H$, ed esprimendo con M' l'angolo $agB=aCN$; otterremo

$$\tan \cdot M'=\frac{R.\pm H-r}{L} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

Il segno più vale per l'alzo positivo, ed il meno pel negativo.

Pel pezzo da 24 in bronzo, del sistema di Gribeauval dell'anno 1769, si ha (A), servendoci della misura metrica, $R=0^m,24419$, $r=0^m,17464$, ed $L=3^m,18429$, e perciò

$$\tan M=\frac{0,24419-0,17464}{3,18429}=\frac{0,06955}{3,18429}, \text{ e}$$

$\log \cdot \tan M=8,84230+\text{comp} \cdot \log 3,18429=8,84230+9,49699=8,33929$, onde $M=1^\circ \cdot 15' . 4''$ circa.

Ma la misura dell'angolo di mira rinvenuta coi dati in piedi e pollici usati da Lombard, ne dà una differenza di $1''$ incirca.

(A) Lombard. Moto de' proietti §. 73.

Sia $H = 0^m,02700$ un alzo positivo ; sarà

$$\tan \cdot M' = \frac{0,06955 + 0,02700}{3,18429} = \frac{0,09655}{3,18429}, \text{ e}$$

$\log \cdot \tan M' = 8,98475 + 9,49699 = 8,48174$, e $M' = 1^\circ \cdot 44'. 15''$ circa.

Dalla somiglianza de' triangoli ACN, CGD risulta la proporzione $AN : NC :: CD : DG = d$, in simboli

$$d = \frac{Lr}{R-r} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (10);$$

distanza dal centro della bocca, sotto la gioia, al punto ove la linea di mira incontra l' asse prolungato.

Pel suddetto pezzo, $d = \frac{3,18429 \times 0,17464}{0,06955}$

$\log d = 0,50301 + 9,24314 - 8,84230 = 0,90385$, e $d = 8^m,014$.

17. Una linea di mira qualunque, allorquando trovasi parallela all' orizzonte, formerà con l' asse del pezzo un angolo eguale a quello che l' asse fa col detto orizzonte ; la qual cosa si scorge chiaramente se facciasi intorno gli *orecchioni* X la conveniente rotazione. Con questa verità si ha il modo di dare all' arma mediante l' alzo, quella elevazione che si vuole.

Se un oggetto si vuol colpire, e trovasi alla distanza del punto in bianco come L, si dirigerà su di esso la linea di mira naturale AC. Quando poi l' oggetto fosse in O a maggior distanza, si dovrà far uso di un alzo come Aa, e guidare in O la visuale aC. Infine se devesi colpire in Q al didentro del punto in bianco, bisogna far uso dell' alzo negativo AK e far passare per K e C una visuale da dirigersi all' oggetto. Ma siccome siffatta operazione è impossibile, così bisogna condurre la linea di mira naturale AC al disotto di Q per quanto è la verticale QS. Con ciò il punto Q della curva adempie al quisito.

Faremo a suo luogo conoscere essere inutile il tener conto della differenza di livello fra la bocca dell' arma e l' oggetto

da colpirsi, per le limitate inclinazioni che permette *l'affusto*, e per la grandezza del bersaglio. Intanto per calcolare l'abbassamento QS dal centro del bersaglio, si rifletta che per la poca inclinazione che possono ricevere le armi lunghe di artiglieria, la retta AB si può sensibilmente considerare come verticale, la congiungente MS scambiarsi per CS, e KC per CN. Con tali ammissibili ipotesi risulta il triangolo AKC simile all'altro CQS. Ciò posto sia la $MS=D$, $QS=A$, $AK=H$, sarà $CK:KA::CS:QS$, in simboli

$$A=\frac{DH}{L} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

18. Sia $DL=51^{m},3$. Pel pezzo da 24 risulta l'angolo DLC al punto di 3′ circa. Siffatto angolo essendo tanto piccolo si può senza errore sensibile trascurare, e conchiudere, che l'angolo CGD nelle applicazioni è sempre eguale all'angolo GDL. Similmente si può dimostrare che l'angolo CgD sia sensibilmente eguale a gDO, così ec. A misura dunque che le distanze DL, DO aumentano, gli angoli in L e in O sono a maggior ragion trascurabili. *Dal che generalmente si deduce essere sempre permesso considerare la linea di mira diretta ad un punto, pel quale passa la traiettoria, come parallela alla retta che unisce questo punto col centro della bocca dell'arma.*

TEORICA III.

Tiro del cannone di punto in bianco nel vôto.

19. (*Fig. 6*). Sia BG un cannone, o obice, BA una linea di mira qualunque naturale o artificiale, che faccia l'angolo di mira $BFH=M$ dato. Sia h l'altezza dovuta ad una data velocità, $KGX=\alpha$ un angolo assegnato di elevazione. Si vuole conoscere, con questi dati, la portata GL di punto in bianco. Supposto essere GLN la traiettoria descritta con tale angolo e tale velocità (§.2).

Siano GM, ML le coordinate del punto L, che diciamo x ed y. Essendo $LM = GM \tan LGM$, sarà $y = x \tan LGM$: ma $LGM = KGX - LGK = \alpha - KFL + FLG$, ma quest'ultimo angolo è trascurabile perchè al punto (§. 18), sarà $LGM = \alpha - M$, e perciò $y = x \tan(\alpha - M)$.

Le coordinate x ed y del punto L debbono soddisfare alla equazione della traiettoria (2.§.1.), avremo

$$y = x \tan\alpha - \frac{x^2(1+\tan^2\alpha)}{4h}:$$

queste due ultime equazioni danno i valori di x ed y che per distinguerli l'indichiamo con X ed Y, cioè

$$X = \frac{4h[\tan\alpha - \tan(\alpha - M)]}{1+\tan^2\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; (12)$$

$$Y = \frac{4h[\tan\alpha - \tan(\alpha - M)]}{1+\tan^2\alpha} \tan(\alpha - M) \quad . \; . \; . \; (13)$$

Si ha $GL = P = \sqrt{GM^2 + ML^2}$, o $P = \sqrt{X^2 + Y^2}$, che sarà la richiesta portata di punto in bianco, o naturale, o artificiale secondo che l'angolo dato M è di mira naturale o di mira artificiale.

20. Se l'angolo dell'asse del pezzo colla orizzontale GX fosse dato di depressione, conviene ne' valori di X ed Y cambiare α in $-\alpha$, e si ha

$$X = \frac{4h[\tan(\alpha + M) - \tan\alpha]}{1+\tan^2\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; (14)$$

$$Y = -\frac{4h[\tan(\alpha + M) - \tang\alpha]}{1+\tan^2\alpha} \tan(\alpha + M) \; . \; . \; (15)$$

Il valore di P farà conoscere la corrispondente portata di punto in bianco il quale pel valore negativo di Y, starà al disotto della orizzontale GX.

21. Se l'angolo dell'asse del pezzo colla orizzontale GX

fosse zero, conviene ne' valori di X ed Y porre $\alpha=0$, e si ottiene

$$X=4h\tan M, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$
$$Y=-4h\tan^2 M. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17).$$

22. Negli esempii numerici in cui è dato l'angolo di mira M, e la velocità h, facendo successivamente variare solo α, cioè ponendo $\alpha=8^\circ$, $\alpha=-8^\circ$, $\alpha=0$ si hanno tre valori diversi per le portate dei corrispondenti punti in bianco P_1, P_2, P_3, i quali si differiranno di poco, ciò vuol dire che nei limiti in cui è ristretto l'uso del cannone o dell'obice in quanto alla sua elevazione o depressione sul proprio affusto, è inutile tener conto della differenza di livello tra la bocca da fuoco e l'oggetto a bersagliare; la qual cosa ci agevola in questa specie di ricerca a far uso semplicemente della formola (§.21.) $X=4h\tan M$, la quale unita alle due altro (9,11 §§.16.17) farà risolvere tutti i quisiti di punti in bianco.

Così dandosi i valori di h, e di M, si troverà quello di X che consideriamo come portata di punto in bianco. Se poi nella formola (9,§.16) per M sostituiamo questo rinvenuto valore, si conoscerà quello di H, alzo da porre sull'arma a fine di guidare la corrispondente linea di mira al bersaglio, il quale se non sarà colpito al centro, lo sarà un poco più sopra o un poco più sotto, per la concessione da noi stabilita; la quale se geometricamente parlando produce delle anomalie, queste sono compensate dalla grandezza del bersaglio, la quale è sempre compatibile cogli usi della guerra.

Le medesime formole risolvono altri quisiti cambiando i dati; quali quisiti formano il subbietto del tiro di punto in bianco pel cannone e per l'obice.

Se l'arma, come l'obice dell'anno XI, ha la linea di mira parallela all'asse, cioè M eguale a zero i valori di X ed Y si riducono a zero. Da ciò si può stabilire che siffatte armi non hanno punti in bianco naturali, e gli artificiali conviene valutarli con alzi assegnati

Vogliamo osservare che i punti in bianco sono due, nel mentre che le nostre formole ce ne danno un solo, la qual cosa nasce dal considerare l'angolo al punto disprezzabile.

Riepilogando dunque si può stabilire:

1.° *Che nei limiti in cui sono ristrette le inclinazioni, su i loro affusti de' cannoni e degli obici, è inutile tener conto della differenza di livello fra il centro della bocca ed il bersaglio.*

2.° *Si colpisce egualmente se la distanza del punto in bianco si valuti dalla bocca al piede, o dalla bocca alla sommità del bersaglio.*

3.° *Che mettendo nelle formole sì l'una che l'altra distanza, dovrà necessariamente colpirsi l'oggetto.*

Per procedere con un esempio particolare.

Sia il pezzo da 24, e supponiamo che $\alpha = 8°$ sia l'angolo di elevazione: sarà allora $\tan\alpha = 0,14054$; $M = 1°.15'.6''$, $\alpha - M = 6°.44'54''$, $\tan(\alpha - M) = 0,11833$, $k = 0^m,1173$, $V = 398^m,807$ che dà $h = 7796^m,15$ circa; eseguendo i calcoli si ottiene $P = 675^m,856$ circa. Facendo $\alpha = -8°$, si ha $P = 690^m,610$ circa. Infine, allorchè $\alpha = 0$, risulta $P = 673^m$, circa.

Il paragone di questi tre risultamenti ci fa vedere che ne' limiti nei quali è ristretto l'uso del cannone, in quanto alla sua inclinazione sull'affusto, le portate di punto in bianco differiscono per lunghezze tali da non far fallare il colpo: o, che vale lo stesso, *volendosi colpire un bersaglio è inutile tener conto della differenza di livello fra questo e l'arma.*

(*Fig.* 7). Per maggiormente confermare la detta verità, esprima *EB* la linea di mira dell'arma, *C* la proiezione verticale degli orecchioni intorno ai quali accade la rotazione, *DA* l'asse o una sua parallela, *CM* una orizzontale, e l'angolo $ACM = 8°$.

Prolungando indefinitamente la linea di mira, col centro *A*, intervallo $675^m,856$, si segni il punto in bianco *F*, e si conduca la verticale *GFM*. La traiettoria *APF* dovrà passare pel punto *F*. Perciò se la verticale *GFM* indicasse un bersaglio di una certa grandezza, questo resterebbe colpito infallibilmente.

Inoltre il cannone prenda la posizione depressa, dimanierachè l'angolo *MCa* risulti di 8°. L'oggetto da colpirsi assumerà la posizione *Mg* in prolungamento di *GM*: la linea di mira prolungata cadrà come *ebl*. Col centro *a*, intervallo 690^m,610 si segni il punto in bianco *l*, e la traiettoria *aql*. Quantunque il punto *l* non cada nella verticale *Mg*, pure questa rimane intersecata se non in *h*, ove passa la linea di mira, in altro punto *f*. *Ciò dimostra che per fallar meno nella maniera di mirare, è uopo dirigere la linea di mira al centro del bersaglio e fare astrazione dalla differenza di livello.*

Se da *O* centro della bocca del pezzo nel sito orizzontale, si prenda *ON*=*AF*: e se suppongasi il bersaglio trasferito in *mn*, le due curve *APF*, *aql* non potranno fare a meno d'intersecarlo, se non ne' punti primitivi *F* ed *f*, in due altri *p* e *q*.

Le medesime conseguenze vanno dimostrate per altre linee di mira qualunque, e per altri calibri, non esclusi gli obici i quali se non hanno angoli di mira naturale, si possono questi formare mediante gli alzi come si è dichiarato.

TEORICA IV.

Tiro a rimbalzo nel vôto.

23. (*Fig. 8*). Il fine del tiro a rimbalzo quello si è di distruggere le macchine in generale postate dietro i parapetti delle fortificazioni, e di uccidere o sloggiare da quelle i difensori: A conseguire tale effetto si richieggono le seguenti condizioni.

1.° *Che il proietto nel passare tangenzialmente pel sopracciglio dell'opera si trovi nel ramo discendente della traiettoria.* In caso contrario le difese non riporterebbero alcun danno, poichè la caduta del mobile sarebbe o troppo distante dal sopracciglio suddetto, o fuori dell'opera esposta al rimbalzo.

2.° *Che il proietto cada sul terrapieno sotto un angolo acutissimo;*

diversamente o s'infosserebbe, o descriverebbe pochissime curve molto arcate da superare l'altezza delle macchine di difesa.

3.° *Che la prima caduta non sia molto lontana dal sopracciglio.*

4.° *Che la velocità di caduta sia tale da produrre effetti distruggitori.*

Sia CHO il rilievo di una fortificazione qualunque. Sul terrapieno RO sian poste le bocche da fuoco per la difesa, ed altri oggetti corrispondenti. L'arma A sia situata secondo la direzione AQ. Per eseguire il tiro a rimbalzo conviene determinare la velocità iniziale del proietto, e l'angolo di elevazione in funzione dei dati del quisito. Prima però bisogna far notare che non tutti gli angoli d'incidenza producono rimbalzi, tali angoli son subordinati alla specie della materia sulla quale il proietto percuote. Gli esperimenti han dimostrato, che il rimbalzo incomincia ad effettuarsi in un terrapieno di fortificazione permanente, quando l'angolo è non maggiore di 10°. Per la qualcosa si faccia l'angolo $CVR = 10°$, sarà

$$RV = \frac{CR}{\tan 10°}:$$

questa distanza, che indichiamo con z, varia al variare l'altezza CR del sopracciglio. Tutte le volte che il proietto si vuol far cadere in un punto della RV, non produrrà rimbalzi, perciocchè l'angolo dell'incidenza è maggiore di $CVR = 10°$, quindi per avere rimbalzi, bisogna che il proietto cada nella VO, per esempio in un punto determinato H, ove l'angolo d'incidenza CHV è minore di CVR. Vogliamo avvertire, che la parte CH della traiettoria si è senza errore sensibile considerata come una retta attesa la sua picciolezza in paragone della curva intera.

Siano $AB = m$, $CB = n$, $AD = p$, $DH = q$ le coordinate del soppracciglio C e del punto H che si vuol percuotere, affinchè il rimbalzo si possa effettuare, conviene dare $p > m + z$, diversamente l'angolo di percossa risulta maggiore di CVR.

Siccome la traiettoria deve passare tangenzialmente pel so-

pracciglio C, e pel punto dato H, così l'equazione (2. §. 1) dovrà rimaner soddisfatta due volte, e perciò

$$n = m \operatorname{tang} \alpha - \frac{m^2(1+\tan^2\alpha)}{4h}$$

$$q = p \operatorname{tang} \alpha - \frac{p^2(1+\tan^2\alpha)}{4h}, \text{ delle quali}$$

$$h = \frac{m^2(1+\tan^2\alpha)}{4(m\tan\alpha - n)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

$$\tan\alpha = \frac{np^2 - qm^2}{mp^2 - pm^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20).$$

Quest'ultima dimostra, che per ogni distanza dall'arma al punto di caduta, corrisponde un solo angolo d'inclinazione; e quindi anche un sol valore di h, perchè risultano da equazioni di primo grado.

La (19) per mezzo di sostituzioni trigonometriche diventa

$$h = \frac{m^2}{2(m \operatorname{sen} 2\alpha + 2n \operatorname{sen}^2\alpha - 2n)}$$

il valore di h si aumenta o si diminuisce, a misura che α decresce, o cresce. Dall'esposto si ritrae:

1.° *Che per ogni velocità iniziale corrisponde un solo angolo di elevazione.*

2.° *Che l'angolo di elevazione cresce secondochè la detta velocità diminuisce.*

3.° *Che ad ogni punto di caduta corrisponde una sola velocità di partenza, ed un solo angolo di elevazione.*

24. La velocità residua al punto di caduta H verrà dinotata da (§. 12)

$$v = \sqrt{2g(h-q)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21).$$

Chiamando α' un angolo di caduta che produce rimbalzi, per le proprietà della parabola si ha

$\tan^2\alpha : \tan^2\alpha' :: AP^2 : HS^2 :: MP : MS :: h \operatorname{sen}^2\alpha : h \operatorname{sen}^2\alpha - q :$

esprimendo il seno per la tangente si ha

$$\tan^2 x : \tan^2 x' :: h \frac{\tan^2 \alpha}{1+\tan^2 \alpha} : h \frac{\tan^2 \alpha}{1+\tan^2 \alpha} - q, \text{ e}$$

$$\tan^2 x' = \frac{(h-q)\tan^2 \alpha - q}{h} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . (22),$$

equazione che farà conoscere sotto qual angolo il terrapieno sarà percosso.

Il valore di $\tan x'$ cresce con $\tan x$: e diminuisce con q, ossia, *che l'angolo di caduta cresce a misura che aumenta quello di elevazione, e decresce con l'aumentarsi l'altezza del terrapieno da colpirsi col rimbalzo.*

25. Si vuole esentare il terrapieno RO dal rimbalzo: all'estremo O si faccia l'angolo ROG di 10°, si prolunghi RC in G. Se ammettiamo che al saliente dell' opera fosse un masso di terra alto per quanto è la lunghezza di RG, i proietti che cadrebbero tra R ed O non eseguirebbero rimbalzi, giacchè ciascuno angolo d' incidenza o di caduta risulta maggiore sempre di GOR.

Nel valore di $GR = \frac{RO}{\tan 10^\circ}$, la RO si prende dalla lunghezza dell'opera. Una tale riflessione ha indotto Carnòt a stabilire sui salienti delle opere di fortificazioni permanenti alte *berrette* per guarentire dai rimbalzi i terrapieni.

26. Per ridurre il tiro a rimbalzo a tiro di punto in bianco, si unisca il sopracciglio C col punto culminante c della gioia, si prolunghi il raggio Qd di culatta fino al punto d'incontro a. Con siffatta costruzione il tiro dell'arma o si guida coll'angolo x (§. 23), o coll' alzo $da = H$. Per valutare il valore di da si sa (§. 18) che $\tan g M = \frac{R-r+H}{L}$, da cui

$$H = L \cdot \tan M - (R-r) \; . \; . \; . \; . \; . \; (23),$$

in dove $M = x - CAB = \alpha - \varphi$, senza perder di mira che l'angolo

al punto in *C* si è trascurato. Col valore di questo alzo il tiro a rimbalzo si esegue prendendo di mira il sopracciglio della fortificazione, ovvero dirigendo in *C* la linea di mira artificiale con questo alzo trovato, o per più esattezza mirando qualche piede al di sopra del sopracciglio medesimo.

Notasi però che tirando dall'alto in basso, la bocca da fuoco, a norma della distanza del sito da colpirsi a rimbalzo, può essere diretta con elevazione, orizzontalmente, o con depressione, in ciascuna ipotesi il luogo sottoposto sarà percosso col ramo discendente della traiettoria. E così le batterie di costa, le quali tirano dall'alto in basso, percuotono col ramo discendente le acque, vi saranno rimbalzi tutte le volte che l'angolo d'incidenza sia minore di 4 in 5°, come risulta dagli esperimenti; se l'angolo d'incidenza fosse maggiore di 5° il proietto si tufferebbe, senza potere rimbalzare.

Il tiro *d'infilata* chiamasi con tal nome, perchè la palla nel passare tangenzialmente pel sopracciglio, va a colpire una o più macchine di difesa senza che prima abbia toccato il terrapieno. Chiaramente si scorge ch'esso deve guidarsi come il tiro a rimbalzo, facendo però uso di tale velocità, sempre negli assegnati limiti, che di molto si discosti dalla minima, affinchè le curve siano meno arcate, e quindi atte a colpire nel modo da noi discorso le macchine postate dietro i parapetti delle fortificazioni.

TEORICA V.

Pruova della polvere.

27. La polvere da guerra fu per lungo tratto di tempo composta di 75 parti di nitro, $12\frac{1}{2}$ di carbone, ed altrettante di zolfo. In varie epoche questa proporzione ebbe cambiato affine di conseguire nello sparo forza maggiore. Difatti, due specie di polvere furono costrutte in Francia nel 1794. La prima ebbe 76

parti di nitro, 15 di carbone, e 9 di zolfo; la seconda 76 parti di nitro, 14 di carbone, e 10 di zolfo. Si ottenne, è vero, l'intento: ma poi si conobbe la necessità di ripristinare l'antica proporzione, come la più adatta per la conservazione della polvere ne' transiti più scabrosi, e ne' magazzini o *polveriste*, dalle quali estratta di tempo in tempo, uopo è che serbi una forza costante. A queste due sole condizioni deve in ispecial modo porre mente l'artigliere, il quale con leggi stabili e non a caso ha da governare l'uso delle bocche da fuoco per esser certo di conseguire gli effetti che si propone.

Da ciò assai chiaramente si manifesta quanto meglio si converrebbe affidare la fabbricazione della polvere a coloro stessi che debbono adoperarla per la salvezza del proprio paese, e pel massimo sostegno degli eserciti, anzichè farne obbietto di sola speculazione. Del quale sistema sonosi infinite volte sperimentate le triste conseguenze.

Spesso avviene che la polvere, al momento che si riceve, mediante tanti artifizii dettati dalla cupidigia de' fabbricanti e degli appaltatori, mostri una forza maggiore di quella stabilita dai regolamenti. La qual forza momentanea non dev'essere la sola guarentigia della bontà della polvere, ma dev'essere tale da soddisfare indispensabilmente alla condizione di avere, quando sia ben conservata, un vigore sempre costante. La quale importantissima qualità si ottiene col purificare con la massima accuratezza il salnitro, con fare il carbone per mezzo del distillamento, e con depurare lo zolfo mediante la sublimazione. Ed oltre a ciò bisogna una perfetta mischianza, lungo pestamento, e granitura uniforme.

Siccome non è nostro intendimento descrivere minutamente la fabbricazione della polvere, infinite essendo le opere che intorno a questa materia sono venute pubblicandosi, così accenneremo di essa solamente alcune proprietà, per farci poi a parlare della maniera di farne la pruova.

28. La polvere, com'è manifesto dagli sperimenti fatti nel

vôto pneumatico, si accende senza la presenza dell'aria. Il qual fenomeno accade perchè all'aria supplisce l'ossigene che si svolge nei primi istanti dal salnitro per la forte temperatura.

Nè istantanea, come fu creduto da taluni, ma progressiva è l'accensione; perciocchè in natura non esiste celerità senza tempo, il quale si aumenta nella combustione della polvere umida ed in quella ridotta in polverino. D'Arcy ha empito di polvere due canaletti di legno, il primo lungo $187^m,108$ e di sezione $0^m,018$ sopra $0^m,009$; il secondo di $125^m,063$ e di sezione $0^m,009$ su $0^m,009$. I tempi delle rispettive accensioni sono stati 75″ e 70″: il che dimostra il fenomeno accadere con moto successivo. Inoltre 125,063 : 187,108 :: 70″, al quarto proporzionale 105″ circa; cioè se le accensioni fossero state come le rispettive lunghezze, la sperienza in vece di 75″ avrebbe dovuto dare 105″: *la qual cosa ne fa vedere che l'accensione è più rapida quando la sezione della carica è più grande.*

Il fluido che svolge la polvere accesa è elastico e permanente: Robins bruciato avendo della polvere nel vôto della campana pneumatica sotto la quale aveva posto un barometro, il mercurio si elevò dopo lo sparo con ondulazione prodotta dal grado intenso di calore, e poscia si abbassò, rimanendo peraltro ad un'altezza maggiore di quella che indicava prima della combustione. Segno apertissimo è questo che il fluido svolto è elastico, ed esercitando la sua azione sulla cisterna dello strumento fa che si elevi il mercurio nel tubo graduato. Dopo più giorni quell'altezza fu trovata costante, avuto riguardo ai gradi differenti di temperatura dell'atmosfera.

Sperimenti sonosi fatti, e questo tra gli altri, forando il piattino della macchina pneumatica è uscito da quel foro il fluido elastico in guisa di vento più o meno veloce. Nè ciò e da credere che sia l'effetto del fumo, perciocchè questo rimane unito alle pareti della campana. Quindi con apposito apparecchio, mediante il rubinetto della macchina si è raccolto quel fluido entro una vescica vôta, e questa si è mantenuta sempre elastica.

Robins, Eulero, Lombard ed altri sommi uomini valutano la forza del fluido in funzione della elasticità dell'aria, ma con valori differenti: la qual differenza vuol essere molto attesamente considerata. Ma ciò nulla deve importare al semplice artigliere il quale ha da curare solamente che una data carica produca nello sparo un effetto desiderato.

29. La polvere pertanto che deve saggiarsi, bisogna

1.° *Che sia bene asciutta.*

2.° *Che la grana sia dura e senza polverino.*

3.° *Che bruciatane una dose su di una piastra di rame ben levigata, non scintilli, nè lasci alcun residuo.*

4.° *Uopo è quindi accertarsi che tratta in diversi tempi fuori di ben condizionati magazzini, mostri sempre la medesima forza.*

Molti strumenti si adoperano a fine di conoscere le forze comparative delle polveri. Noi ne accenneremo due come i più generalmente usati, e meno degli altri sottoposti ad imperfezioni. Sono questi *il polverometro a pendolo*, ed il *mortaro provetto.*

Bisogna anzi tratto premettere, che per polvere *di norma* intendiamo quella la cui forza si è riconosciuta efficace negli usi che se ne sono fatti, ed alla quale le altre debbonsi paragonare.

(*Fig. 9.*) Il polverometro a pendolo è formato da un piccolo cannone *GH* affidato alla riga metallica *BA*, che termina in *A* a cerniera.

Questa riga che può oscillare intorno ad *A*, allorchè sta in quiete, riesce sempre verticale, è la sua direzione normale all'asse *GH*, il quale risulta orizzontale. Nel punto *C* è una punta acuminata di metallo, la quale si muove circolarmente nella scanalatura dell'arco *LN* graduato e sostenuto dalle righe *LM*, *ON*, che formano un sol corpo con un'altra cerniera *OM*, la quale si può arrestare mediante una vite di pressione; il che si esegue quando l'indice in *C*, di *AB*, combaci col grado zero dell'arco graduato.

Il canaletto circolare *NL* si riempie di materia molle, come

cera, mele, o sego affinchè dopo lo sparo si conosca l'arco di recesso.

Nel caricare il polverometro con una tenue quantità di polvere, per esempio di una, o due once, come fa Hutton, bisogna avere cura di ben riunire la polvere nel fondo dell'anima della canna in modo da occupare costantemente lo stesso spazio, ed impedire per quanto è possibile che i granelli formino un piano inclinato; il che si ottiene con versare la carica nel cannoncino posto verticalmente, e quindi rimetterlo gradatamente in posizione orizzontale. Si conviene in tale sperimento adoperare una precauzione ed intelligenza tutta particolare, senza la quale si avrebbero i più erronei risultamenti.

Ciò premesso supponiamo che due quantità eguali di polvere abbiano prodotto nello sparo due archi di recesso Cd, e Cc. Si abbassino dai punti c, d le perpendicolari ca, db ad AB. Sia K il centro di gravità dell'arma con le spranghe di sospensione; fatto centro A, ed intervallo AK si descriva l'arco KU, e si menino i raggi AdV, AcU.

Siano F, F' le forze delle polveri: sia M la massa oscillante concentrata in K. Le forze in generale si misurano dal prodotto delle masse per le velocità, quando però sono applicate istantaneamente; ma nel nostro caso il fluido nello sparo agisce durante il tempo che il punto K descrive il rispondente arco di recesso; ma le masse de' fluidi, che scorrono nell'unità di tempo hanno per misura le medesime velocità: onde le forze debbonsi valutare per le masse moltiplicate pel quadrato delle velocità. O pure, che vale lo stesso, le forze in analisi si debbono valutare dai loro effetti; e in questo caso F produce quello di far giungere la massa M da K al punto V, ossia all'altezza KT: l'altra F' la fa giungere all'altezza KQ. Per la qual cosa $F : F' :: M.KT : M.KQ :: KT : KQ :: Cb : Ca$

Siano v, v' le velocità con le quali il pendolo è retrospinto, e siano espresse da h, h' le Cb, Ca; sarà $v^2 = 2gh$, $v'^2 = 2gh'$: onde $v^2 : v'^2 :. h : h'$, ossia $F : F' :: v^2 : v'^2 :: h : h'$ . . . . . (24).

Cioè le forze delle polveri sono proporzionali alle altezze degli archi di recesso ossia di oscillazione, o pure ai quadrati delle velocità, del pendolo, dovute a tali altezze o seni versi.

Lo sperimento si esegue tre o quattro volte di seguito con la stessa quantità di polvere per quindi valutare l'arco medio, e paragonarlo a quello stabilito per la polvere che ha da servire di norma. Siano F, ed h i dati fissati dai regolamenti per la polvere da riceversi: ad essi si dovranno paragonare gli altri dati simili per la polvere da saggiarsi prima di essere ricevuta.

La polvere fabbricata a Bouchet nel 1814 conteneva 78 parti di salnitro, 12,88 di carbone, e 9,12 di zolfo: quello di Dartford era composta di 79,7 di salnitro, 12,40 di carbone, e 7,90 di zolfo, ed uniformamente lavorata come la prima coi componenti perfettamente eguali in qualità. Due once di ciascuna qualità di queste polveri provate col polverometro di D'Arcy, perfezionato da Hutton, hanno dato per archi medii di recesso rispettivamente 21°. 76′, 20°. 24′ giusta la divisione centigrada, pari a 19°. 41′, e 18°. 14′ della divisione sessagesimale.

Dalle tavole trigonometriche risulta cos. 19°. 41′ = 0,9436, seno — verso = 0,0564 : cos. 18°. 24′ = 0,9469, seno — verso = 0,0531. Onde la forza della prima polvere sta a quella della seconda nel rapporto di 564 : 531.

Da questo rapporto si può forse, contro la sentenza di Proust, e di altri valenti chimici, conchiudere che lo zolfo, oltre al servire di cemento fra il nitro ed il carbone, accresce anche forza alla polvere.

30. Il polverometro di cui quì è detto deve usarsi con una carica proporzionale alla sua lunghezza, affinchè nello sparo non ci siano granelli di polvere proiettati senza accendersi.

Per quello poi che concerne la grana, uopo è che varii la lunghezza del cannoncino; cioè, se vuol provarsi la polvere detta di *grana fina*, la canna dev'essere talmente lunga che dia campo alla totale accensione: se vuolsi saggiare quella di *grana grossa* la canna può esser più corta, perciocchè l'accensione è

più istantanea. Volendosi poi far uso di una canna di una sola lunghezza, allora conviene che per la grana fina si stabilisca un arco a cui si paragoni quello prodotto dalla carica di una certa quantità di polvere della stessa grana; e rispetto a quella di grana grossa se ne usi per stabilire l'arco di paragone fra le grane simili, una dose un poco maggiore.

Affinchè dal semplice osservare lo strumento si possano paragonare le polveri, si viene graduando nel seguente modo l'arco indicatore.

(*Fig. 10*). Sia per esempio $\alpha\delta C$ un arco eguale a quello della macchina: si tiri la corda $\alpha\delta$, ed il raggio AC perpendicolare ad essa: si divida la freccia dC in un numero di parti eguali, che si credono sufficienti pei saggi, nei punti $a,b\ldots c$ a cagione di esempio in 10, dai punti di divisione si conducano alla corda le parallele $a1,b2\ldots\ldots$ ec., i numeri 1,2,3, ec. trasportati sull'arco dello strumento alle stesse distanze da C, faranno conoscere il rapporto fra le forze delle polveri.

31. Il mortaro provetto ha l'anima di forma cilindrica lunga $0^m,14719$ (=pol.5.lin.5.pun.3.francesi), in fondo alla quale è una mezza sfera dello stesso diametro dell'anima, cioè di $0^m,20979$ (=pol. 7. pun. 9. francesi). La camera in cui si pone la carica, è un cilindro lungo $0^m,05542$(=pol 2.lin.5.fran.), del diametro di $0^m,04963$ (=pol. 1. lin 10. fran.), la cui base è rotonda; l'asse del mortaro è inclinato alla *suola* sotto l'angolo di 45°, il focone ha il diametro di $0^m,00339$(=lin.1.pun.6.fra.): il proietto sferico di bronzo, col quale si carica il mortaro, ha il diametro di $0^m,18949$ (=pol. 7. francesi.), e pesa $29^k,30$ (=lib. 60. fran.): e si usa come segue.

Si ponga su di una spianata orizzontale di pietra, perchè si abbia maggior fermezza: quindi nella camera si mettono grammi 92 di polvere (=once 3 fran.), e s'introduca senza scosse il globo; dopo lo sparo si misuri l'ampiezza. Tale operazione si ripeta tre o quattro volte: e poi si sommino le tre o le quattro portate, e se ne prenda la terza o la quarta parte:

il quoziente dicesi *portata della polvere*. La polvere di norma pel nostro Regno è di 225^m (= tese 115 piedi 3 fran.).

Si noti che quando la polvere è di buona qualità, le tre ampiezze, che debbonsi prendere su di un terreno per quanto è possibile orizzontale, o sono eguali o di poco differiscono, come la giornaliera sperienza ci dimostra. I tre tiri si debbono eseguire con qualche intervallo, affinchè l'arma non resti eccedentemente riscaldata: la qual cosa farebbe risultare la portata media maggiore della giusta.

Volendo conoscere le forze comparative di due polveri, si eseguano i tiri con ciascuna sorta; e siano P,P' le ampiezze; F,F' le forze delle polveri: h,h' siano le altezze corrispondenti alle velocità v,v' del globo, si avrà (§ 29), chiamando M la massa del globo, $F : F' :: Mv^2 . Mv'^2 :: v^2 : v'^2 :: \frac{h}{2g} : \frac{h'}{2g} :: h : h'$; ma $P = 2h \cdot \text{sen}\, 2\alpha$, $P' = 2h' \cdot \text{sen}\, 2\alpha'$ (§.3); onde

$$F : F' :: P : P' :: v^2 : v'^2 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

ossia *le forze delle polveri sono nella ragione delle portate del provetto, o de' quadrati delle velocità iniziali del globo.*

Ci siamo giovati, nello stabilire questa proporzione del §.3; perciocchè essendo lentissimo il moto del globo per la sproporzione fra il suo peso e quello della carica, l'aria nel movimento opporrà pochissima resistenza, e quindi la traiettoria si potrà sensibilmente considerare come una parabola, molto più che nel rapporto $\frac{F}{F'} = \frac{P}{P'}$, le differenze di P,P' dalle vere nel vôto, restano menomate, e si tratta di rapporto geometrico e non aritmetico.

È bene osservare che la pruova della polvere col mortaro provetto non ha per obbietto il conoscere la forza assoluta di essa, come erroneamente ha pensato Robins (B), ma sibbene

(B) Nouveaux principes d' artillerie pag. 270.

la relativa. Se dunque si osserva che una specie di polvere spinge il globo al dilà di una riconosciuta e stabilita distanza ed è capace mediante le cariche da guerra di produrre i desiderati effetti, poco deve importare la maniera come si accendano le tre once nel provetto, e qual fluido pel focone e pel vento si disperde. Infatti siano F, F' le forze relative delle polveri saggiate: le forze assolute saranno eguali alle relative moltiplicate per un coefficiente z, la cui natura poco importa conoscere, cioè verranno espresse da zF, $z'F'$; e perchè l'arma è stata caricata due volte egualmente, e le polveri si suppongono della stessa rapidità nella combustione, dovrà essere $z = z'$, ed è perciò che regge sempre la proporzione $zF : z'F' :: F : F'$ fra le forze assolute e le relative. Bisogna per altro quì aggiungere che il globo essendo eccedentemente pesante, la forza di resistenza che esso oppone è tale, che le once tre sono convertite in fluido priachè il moto incominci.

Dopo l'analisi de' §§ 29 e 31 è facile conchiudere che le altezze degli archi di recesso o seni—versi sono proporzionali alle ampiezze del mortaro provetto; cioè

$$Cb : Ca :: P : P' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26).$$

32. Il mortaro è inclinato a 45° all'orizzonte per far sì che le differenze cagionate da qualche divario d'inclinazione siano le minime, perciocchè vengono prodotte da angoli che sono prossimi a quello che dà la massima portata. Infatti differenziando l'equazione (3.§.3) si ha $dX = 4h(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha)\, d\alpha$. Da questa equazione si ritrae che il valore di dX diminuisce a misura che α si approssima a 45°, quando $\alpha = 45°$, si ha $dX = 0$. La qual cosa dimostra la necessità d'inclinare il provetto sotto l'angolo di 45°, anzichè sotto quello di 60° come taluni pretendono per ragioni di gran lunga più deboli di quella in disamina.

Si è detto di sopra che per la piccola velocità del globo la traiettoria si può considerare come parabola: ma bisogna aver presente che la invenzione del provetto si fece al tempo che alla

polvere da guerra si dava poca forza, talmentechè la stessa polvere di *norma* non aveva che la portata di 55 tese (C), e perciò nel far saggio furono impiegate le tre once, per accomodare convenevolmente la pratica alla teorica; ma ai nostri dì che la polvere ha migliorato di condizione e cresciuta di forza, con tre once la velocità del globo potrebbe esser tale da far sì che la linea balistica si discostasse di molto dalla porabola, o per meglio dire la resistenza dell'aria potrebbe avere una sensibile influenza sul moto del globo. Dopo questa osservazione noi portiamo opinione che per l'esatte comparazioni delle polveri, o venga menomata la carica delle tre once e quindi la camera del provetto, o pure si sostituisca un altro mortaro atto a spingere un globo maggiore dell'attuale, rimanendo pur ferma la carica delle once tre. La cennata modificazione sulla carica, o sul peso del globo condurrebbe a risultamenti da far coincidere con la massima approssimazione i fatti con la teorica.

Sostituendo nella formola (3.§.3) per X successivamente $194^m,903 : 225^m : 271^m,96$ (=100 : 115 : e 140 tese *fr.*) e per α 45°, si avranno per v i tre valori $43^m,528 : 46^m,773 : 51^m,325$ (=134 : 144 : 158. piedi *fr*) : quindi a rigore geometrico il globo nei tre diversi casi avrà una velocità maggiore di questi tre numeri, perciocchè le tre ampiezze sono più piccole delle vere che si avrebbero nel vôto. Dimostreremo a suo luogo che le differenze sono talmente trascurabili da fare accettare il metodo con la massima fiducia possibile.

33. Siano V, V' le velocità iniziali di un proietto con cariche eguali di differenti portate P, P' col provetto, le quali velocità si hanno nello sparo da una medesima arma sotto gli stessi angoli d'inclinazione. Siano f, f' le forze delle polveri con cui l'arma è caricata; sarà (§. 5) $f : f' :: V^2 : V'^2$; ma si può sempre fare $f = zF, f' = z'F'$, in cui F, F' indicano le forze delle

(C) Robins Nouveaux principes d'artillerie pag. 269.

polveri col provetto; e z, z' due coefficienti, i quali dovranno essere identici perchè l'arme è egualmente caricata due volte, come lo è pure il provetto, dunque $f : f' :: F : F'$; ma $F : F' :: P : P'$ (§.31), onde

$$V^2 : V'^2 :: P : P' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (27).$$

Ossia i quadrati delle velocità iniziali di un proietto spinto da un'arma più volte egualmente carica, sono nel rapporto delle portate delle polveri, di cui sono formate le cariche, sperimentate col mortaro di pruova, sul quale non devesi ammettere alcuna maniera di tolleranza.

In Francia le polveri per essere ammesse debbono dare di portata almeno 225^m: quando poi fossero rifatte, la portata prescritta per l'ammissione è di 210^m.

Allorchè il mortaro provetto è deteriorato, toglie portata alla polvere. Affine di conoscerne la giusta, si prende la polvere di norma che sia stata ben conservata in bottiglie o in iscatole di legno ben condizionate: se ne fa il saggio cinque volte, e sia p la media portata: la sua primitiva portata quando fu ricevuta era P; dunque la differenza $P - p$ è ciò che dà di meno il provetto, perchè deteriorato; quindi se esso ha dato P' alla polvere da pruovarsi, convien conchiudere che la vera portata di questa sarà $P' + P - p$. Quando il suddetto provetto diminuisse la passata della polvere di norma a 200^m, non sarebbe adattato più all'uso degli sperimenti.

In Inghilterra si pruova la polvere non solo col polverometro a pendolo da noi descritto, ma anche con situare tavole di olmo bagnate della spessezza di linee sei, distante l'una dalla altra linee nove, ed in posizione verticale. Si pone una canna da schioppo, distante dalla prima tavola per piedi 36, caricata con palla d'acciaio spinta da grammi 7,1 di polvere. Allorchè questa ha bastante forza la palla penetra da 15 in 16 tavoloni: e quando è rifatta dee forare 9 in 12 tavoloni. Nel primo caso è giudicata di norma. Un tal metodo per altro è buono solamente

pe' fabbricanti di polvere; e non per l'artigliere che deve sempre cercare le forze comparative da poterne far uso nei calcoli che stabilisce, affinchè la pratica sia guidata dalla teorica.

Ci sarebbero altri provetti da descrivere che pur si usano per la pruova della polvere, come sarebbe il Provetto di Regnier, e quello a sega usato in Austria: ma siccome li crediamo tutti meno esatti de' due già descritti, così ci asteniamo di farne parola, essendo rimasti solo, generalmente parlando, per pruovare le polveri da caccia.

34. Gli effetti della polvere non van soggetti ad alterazione alcuna qualunque sia lo stato dell'atmosfera. Di quì procede che le bocche da fuoco si debbono adoperare sempre con leggi stabili, senza por mente al caldo, al freddo, all'umido o alla secchezza della stagione; perciocchè siffatte variazioni non sono almeno sensibilmente indicate nè dalle portate delle armi, nè dalla velocità de' proietti. Infatti Robins (D) ragiona nel modo seguente:

« Ho spesso paragonati gli sperimenti fatti a mezzo giorno » durante i gran calori di State, con altri eseguiti al fresco » del mattino e della sera, senza averci trovato la minima » differenza. La stessa conformità si è rinvenuta fra quelli eseguiti » la notte e durante il verno, quantunque in tempi sì diversi » la densità dell' aria avesse dovuto molto variare. »

Da siffatto raziocinio si può ben dedurre tornare inutile quanto prescrive D' Obenheim (E) nella prova della polvere: cioè che si abbia a tener conto della densità ed umidità atmosferica. E se in quasi tutti gli sperimenti di Hutton ci sono notati i gradi del termometro e dell' igrometro, non che le altezze barometriche, ciò dimostra appunto la loro inutilità, perciocchè detto autore giammai ha creduto necessarii i loro dati a fine di stabilire tanti teoremi, i quali hanno illustrato obbietti di artiglieria che sono subordinati alla forza della polvere.

(D) Robins Nouveaux principes d' artillerie proposition X

(E) D' Obenheim Balistique pag. 158.

Digitized by Google

Non è però a dirsi lo stesso della umidità dell' aria al cui effetto van soggetti i granelli della polvere. Robins ha rinvenuto che una carica esposta all' aria secca dà 1700 piedi di velocità iniziale ad una palla, mentre posta all'aria umida per lo stesso tempo ne dà 1300 in 1200. E di ciò manifesta è la cagione, che quando più umido contiene la polvere tanto meno forza espansiva darà alla fiamma.

L' asciugare la polvere dall'umido datole dall'aria, ne ripristina la forza sia nella State sia nel Verno, come lo insegna lo stesso Robins, che per tre mesi consecutivi ne ha fatto esperienza.

L' umidità aumenta il peso della polvere. Infatti detto autore, esposta una certa quantità di essa ai vapori dell' acqua sopra una carta forata, dopo $\frac{1}{2}$ minuto ne ha trovato il peso aumentato di $\frac{1}{5}$; dopo altro brevissimo tempo lo ha rinvenuto accresciuto di $\frac{1}{24}$. Da ciò è chiaro che, la polvere pesava p, indi $p+\frac{1}{5}p$, infine $p+\frac{1}{5}p+\frac{1}{24}p=\frac{149}{120}p$. Ma la polvere, secondo ne avverte Eulero, allora incomincia a manifestare in modo sensibile la sua debolezza quando l' umidità è eguale ad $\frac{1}{100}$ del suo peso.

35. I congegnamenti atti a far conoscere le velocità iniziali de' proietti, si potrebbero adoprare per la misura delle forze comparative delle polveri, con un grado di esattezza maggiore di quello che risulta dai metodi descritti antecedentemente col polverometro a pendolo, e col mortaro provetto, se per altro l' uso di quelli non dipendesse da formole alquanto complicate, le quali non sono certamente accomodate alla intelligenza di tutti coloro che hanno l' obbligo di fare la pruova della polvere.

In quanto alla scelta del mortaro provetto, per la pruova della polvere, Persy dice (F) « Gli effetti che si vogliono produrre » con la forza della polvere nell' uso delle bocche da fuoco, » sono le portate. Si è osservato che la misura relativa di tali » forze può ottenersi con le portate di una bocca da fuoco, » media, per così dire, fra le grandi e le piccole armi.

(F) Persy.Cours de Balistique §. 82.

« Questa maniera dunque di pruovare la polvere è la più
» convenevole, perchè molto si approssima al servizio delle
» armi da fuoco. Essa non domanda operazioni molto lunghe,
» come per esempio quella di misurare portate di 2000 tese;
» la qual cosa per altro non sarebbe affatto esatta, e non si
» consuma nel procedimento che è in uso se non piccola parte
» della polvere da pruovarsi, ciò non ostante siffatto consumo è
» giunto fino a più milioni di libbre all' anno.

« D' altronde si debbono ottenere le stesse portate con cariche
» perfettamente eguali in quantità e qualità senza cambiare la
» bocca da fuoco, facendo per altro astrazione da qualunque
» variazione accidentale. Siffatta portata dipende da quella del
» provetto. Or si è rinvenuto che una polvere con un provetto,
» il cui vento era 18 punti, forniva una portata di 60 tese,
» e dava altresì, per esempio, col cannone da 24 caricato
» col terzo del peso della palla, un' ampiezza di 2200 tese,
» lunghezza maggiore di quella che addimanda il servizio: e
» si sa che sminuendo la carica si potrà sminuire la portata
» fino al punto che si vorrà. Ecco probabilmente, dice Gas-
» sendi, le considerazioni per le quali si è scelto il provetto
» di ordinanza, e fissata la portata di pruova ».

L' anima del provetto si è fatta poco più lunga del diametro del globo, a fine di evitare i battimenti di questo contro l' anima dell' arma, i quali battimenti farebbero che da un tiro all' altro accadessero tali anomalie, per cagione dell' angolo di partenza, da non poter essere sottoposte a calcoli determinati, e quindi risulterebbero erronei i rapporti fra le portate delle polveri: o per meglio dire sarebbe cosa difettosa il voler allungare l' anima del provetto.

Dovendosi avere nella pruova della polvere piccole portate, si potrebbe diminuire l' anima del provetto tanto per quanto fosse necessario mantenere l'asse del globo in direzione con quello dell' arma.

Ma la cosa che merita considerazione si è che due polveri

di differenti qualità, quella ch'è più lenta nella combustione produce, pel vento e pel focone del provetto una dispersione di fluido proporzionatamente minore di quella che si avrebbe con l'altra polvere di un'accensione più attiva. Questa considerazione mena alla giusta conseguenza, che per aversi quasi esattissimi risultamenti nel paragonare le forze comparative delle polveri, converrebbe diminuire per quanto fosse possibile tanto il diametro del focone, quanto quello dell'anima. Con ciò la proporzione di sopra (§.33) acquisterebbe una maggiore esattezza, e giungerebbe al massimo grado di approssimazione, quante volte le fabbricazioni delle polveri fossero identicamente le stesse, cioè a dire, facessero risultare i granelli con le medesime fisiche proprietà. E volendo altresì rendere inalterabili quasi i suddetti venti converrebbe, secondo l'avviso di Persy, rivestire di acciaio l'interno del provetto.

Altri minuti particolari si potrebbero aggiungere sulla pruova della polvere; ma per non oltrepassare i limiti assegnati ad un'opera di questa natura, ci riportiamo alle osservazioni inserite nella dotta memoria di Colson (G), senza punto perder di mira che l'uso del mortaro provetto, per la pruova della polvere, sia la base della teorica de' tiri, i cui risultamenti hanno sempre corrisposto a tutti gli svariati casi di guerra, i quali per moltissimi anni sono stati, e sono costantemente il subbietto di tutti i *Poligoni*, dove la scuola dei tiri sia condotta con regole suggerite dalla scienza, e non da falsi giudizii dettati dalla ignoranza.

(G) Colson Mémorial de l'artillerie pag. 28 n.° 111.

Digitized by Google

TEORICA VI.

Ricerca della velocità iniziale col pendolo balistico.

36. (*Fig. 11*). Varii metodi fin'ora si sono rinvenuti per la ricerca della velocità iniziale de'proietti delle armi da fuoco: ma tutti conducono a risultamenti più o meno discordi dal vero. Ciò non ostante quello ideato da Robins col pendolo balistico fu creduto il più conducente allo scopo. La macchina a tale oggetto impiegata consiste in una specie di *capra* come vedesi dalla figura. Alle gambe AB, AC si trova affidata la traversa EE' terminata ad orecchioni, intorno a' quali si esercita un moto di rotazione: dal centro F della EE' parte la riga FL alla cui estremità sta fissato un parallelepipedo rettangolo di legno $GHIK$, talmente che la faccia superiore GK prende la orizzontalità allorchè la FL rattrovasi verticale.

Al disotto del masso GI vien situato un ceppo di legno NOP scanalato superiormente a superficie cilindrica, nella quale è incavato un arco NO circolare, il cui centro è in F, ed è riempito di materia cedevole, come cera molle, sego ec. Questo arco vien percorso dalla punta M di un'asta LM, che indica il prolungamento di FL: l'arco che trovasi tracciato dopo la oscillazione è quello che deve far parte delle formole che adotteremo.

37. Nello stabilire la teorica fa mestiere conoscere il centro di gravità della parte oscillante della macchina. Per conseguire ciò si leghi al punto V dell'asse FV una sottile fune, la quale si faccia passare per una mobilissima puleggia, aggravando l'estremo della detta fune con un peso tale da sostenere il masso GI in posizione orizzontale nello stato prossimo al moto, per distruggere gli attriti e la rigidezza della fune. Sia m questo peso, p quello delle parti GI, LF ed EE', ω la distanza del centro di gravità all'asse $E'E$. Essendo simmetrico il corpo

che oscilla, detto centro è nella *FLV*; e δ esprima la *FV*. Per la teorica de' momenti si ha $p\varpi = m\delta$ ed $\varpi = \frac{m}{p}\delta$.

Si può altresì usare il metodo seguente per la ricerca del centro di gravità. Si collochi su di un piano orizzontale un prisma triangolare di ferro che presenti in alto un lato su del quale si ponga la parte oscillante della macchina, per maniera che, restando in equilibrio, prenda una posizione orizzontale. Si misuri sul lato del prisma la distanza dell'asse *EE'* di rotazione al punto medio corrispondente, e si esegua la stessa operazione dall'altra faccia della parte oscillante. La semisomma delle due ottenute distanze indicherà quanto il centro di gravità dista dall'asse *EE'*.

38. Un altro dato indispensabile si è la conoscenza della retta che parte dal centro di percossa e va normalmente all'asse di rotazione, cioè la lunghezza di un pendolo semplice isocrono al pendolo composto. Sia k questa lunghezza, T il tempo in minuti secondi di una sua oscillazione. Si ha dalla Meccanica $T'' = \pi\sqrt{\frac{k}{g}}$. Esprimendo con l la lunghezza del pendolo che batte i minuti secondi, si avrà $1'' = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; perciò

$$1''^2 : T''^2 :: l : k = l . \frac{T''^2}{1''^2}.$$

Supponiamo che oscillasse il pendolo per archi piccolissimi, e che in s'' avesse fatto n oscillazioni, una sarà eseguita nel tempo $\frac{s''}{n}$, ossia $T'' = \frac{s''}{n}$ e $k = \frac{s''^2}{n^2} l$: ch'è la lunghezza richiesta.

39. Sia situato il pendolo in posizione verticale *FLGHIK*, e l'arma, con la quale si scaglia il proietto, sia collocata in maniera che la linea del tiro riesca normale alla faccia d'avanti; il che si ottiene con situare l'asse dell'arma normalmente a detta faccia, ed avvolgere al proietto due fili di ottone, a

squadro di tale spessezza che l'asse medesimo passi pel centro di esso mobile.

Si chiami

b.. il peso del proietto;

p.. il peso della parte oscillante;

ϖ.. la distanza dall'asse di rotazione al centro di gravità;

k.. la distanza dall'asse suddetto al centro di percossa; questo centro si confonde, nel nostro caso, col centro di oscillazione, perciocchè la linea di gravità è un asse principale come pure l'asse di rotazione.

c.. la corda dell'arco di recesso, descritto da M;

r.. il raggio FM;

v.. la velocità del mobile.

Chiamando u la velocità angolare del pendolo dopo lo sparo, F la forza della palla, o la distanza dall'asse al punto percosso ossia punto di applicazione della forza, S il momento d'inerzia del solo pendolo rispetto all'asse di rotazione, S' il momento d'inerzia del pendolo e della palla quando si è immersa rispetto allo stesso asse, avremo $u = \frac{F.o}{S'}$ (H).

E perchè la quantità di moto della palla è $\frac{b}{g}v$, perciò

$F = \frac{b}{g}v$: con questo valore $u = \frac{\frac{b}{g}ov}{S'} = \frac{bov}{S'g}$.

Poichè $S' = S + \frac{b}{g}o^2$; e dal teorema (I) che il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione è eguale al momento della massa M oscillante concentrata al centro di gravità, moltiplicato per la lunghezza del pendolo semplice isocrono al pendolo composto, ossia $S = M\varpi k$, risulta $S' = M\varpi k + \frac{b}{g}o^2$, e $S'g = Mg\varpi k + bo^2 = p\varpi k + bo^2$, e quindi $u = \frac{bov}{p\varpi k + bo^2}$.

(H) Venturoli. Meccanica volume primo §. 340.

(I) Venturoli. Meccanica volume primo §§. 356. 357.

Chiamando dopo lo sparo, ossia dopo la immersione della palla, k' ed ω' le distanze dal nuovo centro di percossa e di gravità all' asse di rotazione, e con M' la massa del pendolo e della palla, pel citato teorema viene $S'=M'\omega'k'$, e $S'g=M'g\omega'k'=\left(\frac{p}{g}+\frac{b}{g}\right)g\omega'k'=(p+b)\ \omega'k'$. Ora al centro di gravità del pendolo vi è applicata la forza verticale p, ed al punto percosso la forza verticale b, per la teorica de' momenti si ha $(p+b)\omega'=p\omega+bo$ da cui $\omega'=\frac{p\omega+bo}{p+b}$: onde $S'g=(p\omega+bo)k'$, e $k'=\frac{S'g}{p\omega+bo}=\frac{p\omega k+bo^2}{p\omega+bo}$.

Ciò posto esprimendo con y la velocità del nuovo centro di percossa, verrà $y=uk'$, e sostituendo per u e k' i trovati valori, sarà $y=\frac{bov}{p\omega k+bo^2}\times\frac{p\omega k+bo^2}{p\omega+bo}=\frac{bvo}{p\omega+bo}$.

Per la natura del cerchio, $MT=\frac{MO^2}{2FM}=\frac{c^2}{2r}$: ch' è la espressione del seno-verso dell' arco $M\alpha O$ la cui corda è MO del cerchio di raggio r.

Se il raggio è k', il seno-verso dell'arco similmente ottenuto s' indichi con h, il valore del quale emergerà dalla proporzione $r:k'::\frac{c^2}{2r}:h=k'\cdot\frac{c^2}{2r^2}$. La velocità rispondente all' altezza h è espressa da $y=\sqrt{2gh}$ pel nuovo centro di percossa; dunque $y=\sqrt{2gh}=\sqrt{2gk'\cdot\frac{c^2}{2r^2}}=\frac{c}{r}\sqrt{g\frac{p\omega k+bo^2}{p\omega+bo}}$; eguagliando $\frac{bov}{p\omega+bo}=\frac{c}{r}\sqrt{g\frac{p\omega k+bo^2}{p\omega+bo}}$: infine

$$v=\frac{c}{bor}\sqrt{g(p\omega k+bo^2)(p\omega+bo)}\ .\ .\ (28),$$

ch' è la velocità con la quale il mobile giunge al pendolo.

Se nel radicale si muta o^2 in ok si ottiene $v=\frac{c(p\omega+bo)}{bor}\sqrt{gk}$.

Affine di ripristinare, per quanto è possibile, il giusto valore, si sostituisca per o, ω, e quindi

$$v = \frac{c\omega}{or} \times \frac{p+b}{b} \sqrt{gk} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (29).$$

Alla formola (28) si può sostituire quest'ultima senza errore sensibile, tutte le volte per altro che il proietto s'imbatte nello spazio compreso fra le due orizzontali che partono dal centro di gravità, e da quello di percossa vicino alla retta di gravità; poichè dalla meccanica si conosce, che il primo di questi due centri dista meno del secondo dall'asse di rotazione; ed essendosi in un fattore del radicale cambiato o^2 in ok, ossia o in k, il valore di v si è aumentato alquanto; il quale aumento quasi verrà a distruggersi cambiando nell'altro fattore o in ω, il che viene a dire che la formola (29) è quasi esatta per gli usi, allorchè il mobile percuote un punto del cennato spazio. Affine poi di evitare le scosse per quanto è possibile conviene tirare il proietto altresì o nella verticale FV, o vicino ad essa; e sarebbe poi geometricamente esatta la operazione quanto il proietto colpisse il centro di percossa.

Nella formola (29) i valori da dare alle lettere possono prendersi da qualunque specie di misura, giacchè formano un rapporto; ma g, e k si hanno a valutare su quella scala medesima secondo la quale si vuol calcolare la v.

Il tiro eseguendosi da vicino al pendolo, la velocità iniziale del proietto differirà di poco da quella che si ottiene dalla formola.

40. Per comprovare quanto si è detto nell'antecedente paragrafo relativamente alle due ultime formole, rapportiamo uno sperimento di Hutton eseguito nel 21 Settembre 1775; dal quale si ha in misure inglesi:

p=lib. 553. . b=lib. 1,18 circa (proietto di ferro del diametro di pol. 2,062)

k=piedi 7,065. . ω=pol. 78,1=piedi 6,509. . r=pol. 101= piedi 8,42. .

o=pol. 88,3=piedi 7,36. . c=pol. 11,4=piedi 0,95.

Il valore di k si è ricavato da questo che il pendolo faceva 68 oscillazioni non eccedendo i 4° in 5°, in 100″ (§. 38). L'arma era distante dal pendolo 30 piedi, caricata con due once di polvere.

La formola (28) dà il seguente

I. QUADRO DEL CALCOLO.

$\log. p (= 553)$	2,74273
$\log. \varpi (= 6,509)$	0,81351
$\log. k (= 7,065)$	0,84911
$\log. p\varpi k$	4,40535
$p\varpi k$	25430

II. QUADRO DEL CALCOLO.

$\log. b (= 1,18$ circa)	0,07483
$\log. o^2 (= 7,36^2)$	1,73376
$\log. o^2 b$	1,80859
bo^2	64,35 circa
$p\varpi k + bo^2$	25494,36
$\log. (p\varpi k + bo^2)$	4,40644
$\log. p$ 2,74273	
$\log. \varpi$ 0,81351	
$\log. p\varpi$ 3,55624	
$p\varpi$ ..... 3600 circa	
$\log. b$	0,07483
$\log. o$	0,86688
$\log. bo$	0,94171
bo	8,744
$p\varpi + bo$	3608,744
$\log. (p\varpi + bo)$	3,55736

$\log.\,(p\varpi k + bo^2)$ 4,40644
$\log.\,g(=32,18)$ 1,50759

$\log.\,g(p\varpi k + bo^2)(p\varpi + bo)$ 9,47139
$\log.\,\sqrt{[g(p\varpi k + bo^2)(p\varpi + bo)]}$ 4,73569

$\log.\,ob$ 0,94171
$\log.\,r(=8,42)$. 0,92531

$\log.\,obr$ 1,86702
$\log.\,c(=0,95)$. 9,97772

$\log.\,\frac{c}{obr}$ 8,11070

$\log.\,\sqrt{[g(p\varpi k + bo^2)(p\varpi + bo)]}$ 4,73569

$\log.\,v$ 2,84639
v = piedi 702,083

La formola (29) dà il seguente

I. QUADRO DEL CALCOLO.

$\log.(p+b)(=554,2)$.... 2,74367
$\log.\varpi(=6,509)$..... 0,81351

$\log.\,\frac{c}{bor}$ 8,11070

$\log.\,\frac{c\varpi}{bor}(p+b)$..... 11,66788

II. QUADRO DEL CALCOLO.

$\log.g$..... 1,50759
$\log.k$..... 0,84911

$\log.gk$..... 2,35670
$\log.\sqrt{gk}$..... 1,17835

$\log.\,\frac{c\varpi}{bor}(p+b)$..... 11,66788

$\log.v$..... 2,84623
v = piedi 701,842

Il qual valore differisce dall' antecedente di piedi 0,241, cioè per meno di piedi 0,3. Per tale trascurabile differenza Hutton si è giovato della formola semplicissima (29), anzichè della (28) la quale è più complicata.

Trattandosi poi di velocità più grande, e di proietti maggiori le due formole danno risultamenti, la cui differenza aumenta tanto poco da non giungere mai ad un piede. Per la velocità di piedi 2000 la cennata differenza si riduce a piedi 0,5.

41. Se gli sperimenti si volessero proseguire per la seconda volta, il peso del pendolo sarebbe $p+b=p'$, giacchè la prima palla trovasi già immersa nel masso oscillante. Il centro di gravità, e quindi il valore di ω, dovrà cambiare; sia ω' questa nuova distanza; per le leggi della Statica si ha $\omega'(p+b)=\omega p+ob$, e $\omega'=\frac{\omega p+ob}{p+b}=\omega+\frac{b(o-\omega)}{p+b}$. Il valore di k dovrà altresì cambiare, e si ottiene facendo fare al pendolo piccole oscillazioni, le quali saranno differenti dalle prime per l'aggiunzione del peso b, e quindi si fa uso della formola sopra notata (§. 38).

La velocità del secondo proietto si calcolerà con la suindicata formola, sostituendo per altro; per p, $p+b$; per ω, $\omega+\frac{b(o-\omega)}{p+b}=\omega'$, e per k il nuovo valore che risulta. Il terzo sperimento si esegue in una maniera al tutto simile, sostituendo nella formola per p $p'+b$, per ω $\omega'+\frac{b(o-\omega')}{p'+b}$ ec.

42. Il pendolo dopo l' urto che riceve dal proietto, troverà per parte dell' aria una certa resistenza, che farà descrivere un arco di recesso minore di quello che si descriverebbe nel vôto. Quindi è che la corda, la quale s' inserisce nel calcolo non è la vera; e perciò la velocità rimane alterata. Ma su di ciò Hutton (K) ha dimostrato che la corda così menomata farà diminuire la velocità di $\frac{1}{3377}$ a $\frac{1}{4000}$. Per una velocità di piedi 2000 la perdita sarebbe $\frac{1}{4000}\times 2000=\frac{1}{2}$. Per un'altra

(K) Hutton. Nouvelles expériences d'artillerie. Note A trad. par Villantroys.

di 400 la perdita sarebbe piede $\frac{1}{10}$; in conseguenza si può stabilire che la formola di cui facciamo uso per la velocità, non dev' essere alterata per parte della resistenza dell' aria che si oppone al pendolo nel descrivere l' arco di recesso: molto più che attese le dimensioni del pendolo, ed il suo grandissimo peso rispetto al peso del proietto, l' arco di recesso, oltre di esser piccolo, si esegue con tenuissima velocità, e quindi la resistenza dell' aria a tale moto è trascurabile.

43. Per cagione degli attriti che soffrono gli orecchioni dell' asse di rotazione, vi è diminuzione anche nel valore di c, corda dell' arco di recesso; e perciò altresì nel valore di v. Ma se per poco si rifletta, che posto nella formola (29. §. 39) per $\sqrt{k}$ il suo valore $\frac{s''}{n}\sqrt{l}$ (§. 38), risulta $v=\frac{\omega}{or}\times\frac{p+b}{b}\times\frac{cs''\sqrt{l}}{n}$. equazione nella quale l' attrito fa diminuire il valore di c, come pure il numero n delle oscillazioni, allorchè si cerca k. E siccome c ed n formano un rapporto, così mentre l' una tende a diminuire il valore di v, l'altra ne ripristina quasi la perdita; cioè l' effetto dell' attrito da una parte è contrario a quello prodotto dall' altra, e la differenza nel valore della corda non nasce se non dalla differenza di questi due effetti, la quale può considerarsi come nulla, o pure non valutarsi, giacchè in v non produce variazioni sensibili; e ciò tanto più ch' è sempre possibile ridurre l' attrito, per mezzo di materie untuose, a pochissima cosa, talchè non si ponga mente al suo effetto tenuissimo negli sperimenti per la velocità iniziale.

44. La formola stabilita è fondata sul principio di meccanica, che la palla comunica al pendolo il movimento in un istante indivisibile; la qual cosa, a rigore parlando, non accade; perciocchè la comunicazione del moto si fa durante il tempo che si esegue la immersione. La detta ipotesi non arreca varietà sensibile al valore di v, come Hutton ha dimostrato (L), e

(L) Hutton Nouvelles expériences d'artillerie pag. 187. Note B trad. par Villantroys.

come noi faremo conoscere applicando la teorica delle immersioni al proietto di ferro del peso di lib. $1\frac{1}{4}$ e del diametro di pol. 1,96, spinto con la velocità di piedi 1500, il quale si è immerso per pol. 14 in un masso di olmo in $\frac{1}{641}$ di minuto secondo, tempo quasi indivisibile.

Da questi tre ultimi paragrafi si può fermamente conchiudere *che la resistenza dell' aria contro del pendolo allorchè oscilla e descrive l' arco di recesso, la cui corda ha parte nel calcolo; che l' attrito degli orecchioni dell' asse di rotazione, ed il tempo della immersione del proietto nel pendolo, non influiscono sensibilmente sul valore delle velocità iniziali de' proietti valutate con la formola ultima.*

45. Affine di liberare il pendolo dal settore di esplosione, conviene allontanarne l' arma ad una giusta distanza: con ciò la velocità che si ottiene, come si è fatto conoscere, sembra non essere quella che ha il proietto al partire dalla bocca dell' arma; ma per la breve distanza di questa dal pendolo, e per effetto del settore di esplosione che accompagna e dà vigore al moto del mobile, essa velocità non potrà per qualche parte valutabile differire da quella che si calcola, la quale a rigore parlando non è che una velocità residua. Faremo a suo luogo conoscere con la massima esattezza, e senza nulla concedere ad ipotesi arbitrarie, la vera velocità della palla, allorchè è giunta all' orlo della bocca.

Robins ha fatto uso negli sperimenti di un pendolo atto solamente a ricevere palle di schioppo, cioè del peso di un' oncia.

Hutton ha continuato le ricerche ingrandendo la macchina con qualche modificazione, e facendo uso di palle fino di lib. 6, spinte da libbre 2. di polvere. A Woolwich sotto la direzione di Gregory si è costrutto dal colonnello Miller un pendolo atto a ricevere persino le palle da 24 spinte con lib. 8 di polvere. Ma il congegnamento varia da quello da noi descritto, perciocchè l' asse di rotazione è affidato ad un telaro che poggia sopra due stabili muri, in mezzo ai quali oscilla il pendolo senza

che possa soffrire nè scosse nè deviazioni. Il masso che riceve i proietti è formato da tanti parallelepipedi di legno ben connessi con perni anche essi di legno, affinchè nelle occorrenze si possano cambiare le parti percosse, e stretti tutti da fasce di ferro fra loro validamente avvitate.

La parte anteriore, a cui deve dirigersi il proietto, nel sito del centro di percossa per più esattezza perciocchè non si verrà a produrre veruno sforzo contro i perni che sostengono l'asse di rotazione (*a*), è coperta da una lamina sottile di piombo, onde si abbia con la massima precisione la distanza dal punto percosso all'asse di rotazione.

TEORICA VII.

Ricerca della velocità iniziale con la macchina di rotazione.

46. La macchina di rotazione è formata da un asse di ferro che traversa pe' centri e normalmente due dischi eguali, di cartone sottilissimo, contornati, per più stabilità, d'armille di latta o di ferro. In questi sono segnati 360 raggi che partono pei gradi delle circonferenze divise pure in 360°, i dischi hanno di raggio 3 piedi in circa, e l'asse di ferro è comunemente lungo 12 piedi; e le graduazioni si corrispondono perfettamente. Se per esempio, nel primo disco il raggio verticale segna 10°, nel secondo il corrispondente raggio verticale segna altresì 10°. Così avviene che i due raggi, i quali segnano l'istesso grado sono paralleli, e stanno in un piano che passa per l'asse di rotazione. Una molla d'acciaio, chiusa in un cilindro, al quale si affida una catena flessibile, avvolta prima intorno ad una spira com' è negli orologi da tasca, serve a dare un movimento equabile di rotazione il quale si

(*a*) Venturoli. Meccanica Volume primo § 353.

trasmette all' asse orizzontale per mezzo di un ingranaggio di rocchelli e ruote dentate.

Il movimento de' dischi è perfettamente uniforme, perocchè i rocchelli, che sono eguali, vengono mossi da ruote identiche attraversate da un asse comune.

Pongasi ora l'arma vicino ad un de' dischi, con l'asse normale al piano di questi, e poscia si dia la rotazione alla macchina. Scaricata l'arma, il proietto forerà entrambi i cerchi affidati all' asse, il primo in un sito ed il secondo in un altro, ma non identicamente situato come il primo; cioè il secondo foro si troverà discosto dal diametro segnato con lo stesso grado e forato nel primo disco, per un numero di gradi ch' esprimiamo con G^0.

Sia A la distanza de' due dischi; è chiaro ch'essa verrà percorsa dalla palla nel medesimo tempo che un punto del secondo disco percorrere G^0. Esprima N il numero de' giri che si eseguono in un minuto secondo, sarà $360^0 \times N$ il numero de' gradi corrispondenti; per la qual cosa $360^0 \times N : G^0 :: 1'' : t'' = \frac{G^0}{360^0 \times N}$, che rappresenta il tempo impiegato dal mobile a percorrere la retta A con moto sensibilmente equabile.

Dalla meccanica pel detto moto si ha $v = \frac{s}{t}$; pel nostro caso dunque

$$v = \frac{A}{t''} = \frac{360^0 N}{G^0} A \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (30),$$

ch' è la velocità con la quale la palla arriva al secondo disco, che può considerarsi come la iniziale (§.44).

L' invenzione della suddetta macchina si deve all' Italiano Mattei, ma in seguito è stata perfezionata dall' Inglese Grobert nel 1803.

La difficoltà di adoperare siffatta macchina al tempo che s'inventò, fu quella di dare ai dischi un moto velocissimo ed equabile, affinchè l' arco G^0 riescisse tanto grande da potersi

con precisione misurare. La macchina fatta costruire da Gregory in Woolwich fa in un minuto secondo otto giri, i dischi distano fra loro per otto metri circa. Gli sperimenti, che se ne sono eseguiti, coincidono con quelli fatti col pendolo balistico.

Siffatta corrispondenza conferma la infallibilità de' due metodi.

Sia $N = 8$; $G^0 = 57^0,6$, $A =$ piedi 24 : sarà

$$v = \frac{360}{57,6} \times 8 \times 24 = \text{piedi } 1200 \text{ circa.}$$

Questo apparecchio è altresì accomodato per le ricerche delle velocità delle bombe, situando l'asse de' dischi parallelamente a quello de' mortari inclinati comunque all' orizzonte. Con lo stesso mezzo si possono rinvenire le velocità delle palle e delle granate, allorchè sono spinte sotto angoli di depressione o di elevazione.

Pappacino d'Antoni ha fatto ancora uso di una macchina di rotazione per la ricerca della velocità iniziale de'piccoli calibri, come si legge nel suo eccellente libro intitolato *Pruova della polvere*. Essa consiste in un cilindro retto posto con la base orizzontale: la superficie laterale del quale è formata di carta dell' altezza di un piede circa, ed ha un moto rotatorio equabile intorno al suo asse, guarentito da scosse, che gli vien comunicato mediante grossi contropesi uniti ad altro meccanismo.

La bocca da fuoco si situa con l' asse orizzontale, ed in direzione del diametro del cilindro. Dopo aver data la rotazione si fa partire il colpo. Chiaro si comprende che i due fori, che lascia la palla, non si troveranno agli estremi di uno stesso diametro, ma bensì a quelli di una corda, perchè il moto circolare si esegue incessantemente nel tempo che ha luogo il tragitto del proietto pel diametro del cilindro. Un tal tempo eguagliar deve quello della ruota per descrivere l' arco di differenza.

Tenute le stesse denominazioni, chiamando A il diametro del cilindro, si avrà pure $v = \frac{360^0}{G^0} NA$.

Sia A = piedi 6, $N = 1\frac{2}{3}$, e $G = 2^0, 4$ come avviene realmente, in un caso particolare rapportato dal detto autore. Sarà $v = \frac{360}{2,4} \times 6 \times 1\frac{2}{3}$ = piedi 1500.

Nella formola stabilita è da notarsi che il solo A devesi valutare in lunghezza, giacchè $\frac{360^0}{G^0} N$ non è che un rapporto.

Il metodo di rinvenire la velocità iniziale di un proietto mediante il rinculo dell'arma è stato trovato fallace da Hutton: o per meglio dire esso dà le velocità molto discordi da quelle del pendolo. Noi ci rimanghiamo dal parlarne come non conducente ai veri risultamenti. L'apparecchio però è simile a quello detto antecedentemente (§. 29), e se di questo mezzo ci siamo giovati per la pruova della polvere, la ragione si è perchè gli sperimenti hanno dato a conoscere che i recessi sono regolari con le piccole cariche, al di là delle quali non seguono veruna legge costante.

Il metodo di rinvenire la velocità iniziale mediante il cannone situato verticalmente, proposto da Giovanni Bernoulli, ha l'inconveniente del doversi scrupolosamente valutare il tempo della salita e discesa della palla, e del supporsi cognita la legge di resistenza dell'aria.

In seguito parleremo del metodo proposto da Lombard, nel suo classico libro del *Modo de' proietti*, per la ricerca della velocità iniziale. Esso è subordinato alla ipotesi di Borda sul coefficiente della resistenza dell'aria, ch'entra in tutte le formole balistiche.

FINE DELLA PRIMA PARTE.

Digitized by Google

PARTE SECONDA.

TEORICA I.

Resistenza de' corpi che si muovono ne' fluidi.

47. Per quello che ci faremo ad esporre è necessario premettere alcune idee generali senza le quali è facile cosa incorrere nell' errore.

Per *corpo* intendiamo l'aggregato di varii elementi materiali divisi da intervalli più o meno grandi che diconsi *pori*: la somma di questi elementi è ciò che forma la *massa* del corpo.

Lo spazio che occupano la massa ed i pori è ciò che costituisce il *volume*. Quindi si dice più o meno denso un corpo secondo che con uno stesso volume contiene più o meno massa.

Poncelet ed altri (M) chiamano *volume reale* di un corpo lo spazio occupato dalla sola materia, e *volume apparente* quello occupato dai pori e dalla materia, ossia lo spazio racchiuso tra quella superficie la quale limita l' esteriore inviluppo de' corpi.

Da ciò deriva la nozione della densità che dee valutarsi dal rapporto della massa al volume. Sia dunque M la massa, V il volume apparente, e D la densità, sarà $D = \frac{M}{V}$. Si scorge chiaramente essere la densità una quantità puramente relativa,

(M) Poncelet. Mécanique Industrielle §. 3. . . . . primière partie.

quantunque si usi la espressione *essere la massa eguale al volume moltiplicato per la densità.*

Siano m, m', m'' ec., le particelle materiali di un corpo, ossia gli elementi che compongono la massa M, i quali si possono considerare mossi dalla stessa gravità che fa loro percorrere tante rette i cui prolungamenti passerebbero pel centro della Terra; ma siccome siffatto incontro è infinitamente distante dalla superficie terrestre, così esse rette possono considerarsi come parallele. Quindi è che le anzidette molecole saranno mosse da tante forze parallele mg, $m'g$, $m''g$, ec., la risultante delle quali è ciò che costituisce il *peso*; onde $P = mg + m'g + m''g + m'''g + \text{ec.} = Mg$.

Poncelet (N) affine di maggiormente chiarire le idee dice..

« Il peso de' corpi non è altra cosa che il risultamento di » tutte le piccole azioni riunite della gravità, sulle molecole » materiali di questi corpi. Non bisogna dunque confondere il » peso con la gravità, la quale è realmente la forza elemen- » tare che sollecita queste diverse molecole. »

Alloraquando si considera il peso di un corpo indipendentemente dal suo volume, questo peso dicesi *peso assoluto* del corpo; ma occorre spesso che si abbia a conoscere quello di una certa materia sotto un dato volume, il quale peso dicesi *gravità specifica* del corpo; ossia si ha la gravità specifica $G = \frac{P}{V}$ *ed è il rapporto del peso del corpo al suo volume.* Bisogna altresì aggiungere che la gravità specifica è relativa e non assoluta, come si è detto per la densità.

L'equazione $G = \frac{P}{V}$ divisa per l'altra $D = \frac{M}{V}$ dà $\frac{G}{D} = \frac{P}{M} = \frac{Mg}{M} = g$, così pure $\frac{G'}{D'} = \frac{P'}{M'} = \frac{M'g}{M'} = g$, e quindi $G : G' :: D : D'$. *Cioè le gravità specifiche di due corpi sono nel rapporto delle*

(N) Poncelet. Mécanique Industrielle §. 61. . . . primière partie.

loro densità purchè il paragone avvenga alla stessa latitudine. Perciocchè $\frac{P}{M} = g$; se il corpo è trasportato in un sito in cui la gravità sia diversa ed espressa per g', sarà Mg' il suo peso, il quale s'indica per distinzione con Q, sarà $\frac{Q}{M} = g'$, e $P:Q::g:g'$. In conseguenza *i pesi di una stessa massa serbano il rapporto delle gravità corrispondenti ai siti della Terra in cui detta massa si è pesata.*

La equazione $G = \frac{P}{V}$ ci offre $P : P' .: VG : V'G'$. Il che vale quanto dire che *i pesi assoluti sono in ragion composta dei volumi e delle gravità specifiche.* Se $V = V'$ si avrà $P : P' :: G : G'$; ossia *i pesi de' corpi sono nella ragione delle gravità specifiche, e conseguentemente delle densità*, purchè i volumi siano eguali.

Essendo $G = \frac{P}{V}$, se $V = 1$ si avrà $G = P$, cioè *la gravità specifica altro non è che il peso assoluto del corpo sotto l' unità di volume.*

Sia p il peso assoluto di un corpo, v il volume, G il peso specifico; ma i corpi della stessa materia hanno i pesi nella ragione de' volumi, onde $p : G :: v : 1$, e $p = vG$. Inoltre da $\frac{G}{D} = \frac{G'}{D'}$ si ricava $G = \frac{G'}{D'} D$ il D sia la densità del corpo del peso p, verrà $p = v . \frac{G'}{D'} D$: fatto $D' = 1$ si ha $p = v . G' D$;

onde il peso di un corpo pareggia il suo volume moltiplicato per la gravità specifica della materia, la cui densità sia eguale all' unità, e per la densità del corpo riferita alla densità di tale materia.

Sia, secondo Brisson, 1. la densità dell' acqua distillata, il cui piede cubo pesa 70 libbre ($= 34^k,265$). Si voglia ora conoscere la densità dell' oro puro il cui peso sia di lib. 1340,004 per ogni piede cubo. Le gravità specifiche dell' acqua e dell' oro sono come 70 : 1340,004; in conseguenza 70 : 1340,004 :: 1 : $x =$

$\frac{1340,004}{70} = 19,2572$ che è la densità dell'oro. Con questo metodo si sono formate le tavole per le densità riferite all'acqua distillata.

Dalle sole densità si possono valutare le gravità specifiche de' corpi. Infatti la densità del ferro essendo 7,2, sarà libbre $70 \times 7,2 =$ lib. 504 il peso specifico del ferro: e così in seguito.

Da quello che si è detto si scorge che la densità varia col variare della materia, e la gravità specifica col variare del volume del corpo preso come unità di solidità.

Essendo $P = Mg = VDg$, ne procede che il peso di un corpo varia secondo il suo volume, la sua densità, e la gravità terrestre: ma siccome la massa è indipendente della gravità, così uno stesso corpo ha diversi pesi che variano a seconda della latitudine (X), cioè a dire se una massa sotto l'equatore ha per peso assoluto P', sotto al polo peserà, secondo gli sperimenti, $P' + \frac{P'}{289}$: onde nella proporzione che le densità sono come i pesi specifici, o come i pesi de' corpi dello stesso volume, bisogna stabilire $D : D' :: G' : G' + \frac{G'}{289} :: P' : P' + \frac{P'}{289}$. Cioè $P' + \frac{P'}{289}$ è il peso della massa che sotto l'equatore ha pesato P'.

La differenza nei pesi di una stessa massa nasce dal moto di rotazione della Terra, la qual cosa fa variare la gravità da un sito all'altro, e crescendo dall'equatore al polo, come si osserva nella teorica delle forze centrifughe. Ossia, generalmente parlando, *le densità sono proporzionali alle gravità specifiche, purchè il peso de' corpi si prenda sotto lo stesso parallelo.* Che se si prendesse sotto diversi paralleli, converrebbe correggere l'espressioni delle gravità specifiche, affinchè restasse inalterato il rapporto $D : D'$.

Tutti i corpi sono pesanti, come si conosce da ognuno; ciò

(X) Poncelet. Mécanique Industrielle . . . §. 61 . . . primière partie.

non ostante possiamo in idea supporli senza gravità, come spesse volte siamo obbligati a fare. La quale astrazione del peso può ben essere giustificata, perciocchè in più casi l'effetto della gravità resta distrutto, come avviene in un corpo situato su di un piano orizzontale, il cui movimento si fa della stessa natura, mettendo da parte ogni sorta di resistenza, come se la gravità non esistesse.

Un corpo sospeso ad un filo può pure considerarsi come privo di gravità, o l'effetto di questa può valutarsi eguale a zero. Da tale considerazione si comprende che la legge d'inerzia di un corpo dipende dalla massa, e non dalla gravità: e però la legge d'inerzia è proprietà assoluta della materia, la quale non può esserne spogliata mai, qualunque siano i mezzi che a tal fine si pongono in opera. È vero che tanto la inerzia quanto il peso sono proporzionali alla massa; ma il primo rapporto è assolutamente geometrico, mentre il secondo nasce da una verità puramente sperimentale, la quale ne fa conoscere che in un medesimo spazio vôto di aria, sotto la campana pneumatica tutti i corpi di qualunque figura, densità, volume ec. siano, cadono con la stessa velocità. E poichè le forze motrici sono come le masse, allorchè le velocità sono eguali, nel detto caso i pesi essendo le forze motrici, è chiaro che i pesi sono come le masse.

48. Allorchè un corpo si muove nel vôto senza esser soggetto alla forza di gravità, il suo corso non sarà mai nè rallentato nè accellerato perchè sottoposto alla legge d'inerzia, ossia il movimento rimane equabile, come prodotto da una forza costante. Quando però il cammino si esegue in un fluido in quiete, il corpo sposterà necessariamente le particelle che gli fanno ostacolo, e che gli oppongono una forza di resistenza prodotta dalla loro inerzia, e dalla forza di coesione da cui sono insieme unite; ciò vale a dire, che in ogni istante la quantità di moto del corpo impiegar deve una certa forza per mettere in moto le molecole fluide. Per questo continuo decrescere che fa la quantità di

moto del corpo, il corso sarà incessantemente ritardato; ora la cagione di siffatto ritardo dicesi *forza di resistenza*.

Noi ci faremo ad analizzare due specie di fluidi. La prima comprende quelli che non lasciano vôto dietro ad un corpo che vi si muove, quali sono appunto i fluidi incompressibili e gli elastici, tutte le volte che si mantengono a contatto col corpo. La seconda contiene gli altri che dietro il corpo posto in movimento lasciano vôto.

Nella prima ipotesi si suppone che il fluido sia composto d'infinito numero di filetti paralleli fra loro, e che il corpo nello spingerli direttamente li rompa per giungere a incontrar gli altri. Ciò è la stessa cosa che considerare le particelle fluide talmente slegate da poter conservare solo per qualche istante il moto, che loro vien comunicato senza disturbar l'equilibrio delle altre che ad esse succedono. Vero è che siffatta ipotesi è contraria alla natura de' fluidi, ma convien pure ammetterla a fine di avere norme tali di partenza per giungere allo scoprimento della verità.

Con la base b^2 piana un corpo animato dalla velocità v incontri ad angolo retto i filetti fluidi. Si cerca la natura del moto e la rispondente resistenza. Sia A l'altezza del corpo, n la densità, m quella del fluido; la massa verrà espressa per nb^2A (§. 47), e la quantità di moto da nb^2Av. Nel percorrere uno spazio infinitamente piccolo dx, il corpo urterà una massa fluida mb^2dx, la velocità v sarà alterata prendendo un nuovo valore $v+dv$ generalmente, che sarà comune alla massa fluida spostata. Il segno di dv deciderà se il moto è ritardato, o pure accelerato.

Dovendosi rendere eguali le quantità di moto e prima e dopo l'urto, si ha $nb^2Av=(nb^2A+mb^2dx)(v+dv)$, o pure $o=mb^2dx.v+nb^2Adv$, essendosi trascurato il termine affetto da $dx.dv$ come infinitamente piccolo di second'ordine, e perciò $dv=-\frac{mb^2v}{nb^2A}dx$, *il moto dunque sarà ritardato.*

Nel secondo caso, considerando tanto il corpo quanto il fluido perfettamente elastici, i filetti di questo nel ricevere l'urto si staccheranno dal corpo con una velocità w. Rimanendo pertanto gli stessi simboli avremo due espressioni di eguaglianza, la prima fra le quantità di moto avanti e dopo l'urto, e la seconda fra le forze vive, cioè $nb^2Av = nb^2A(v+dv) + mb^2wdx$, e $nb^2Av^2 = nb^2A(v+dv)^2 + mb^2w^2dx$, dalle quali $0 = nb^2Adv + mb^2wdx$, $0 = 2b^2nAvdv + mb^2w^2dx$. Dalla prima si ha $w^2 = \frac{n^2A^2dv^2}{m^2dx^2}$, e dalla seconda $w^2 = -\frac{nAb^2 2vdv}{mb^2dx}$; eguagliando e riducendo $dv = -\frac{mb^2 2v}{nb^2A}dx$; *il moto dunque è anche quì ritardato.*

Moltiplicando ciascun membro delle due rinvenute equazioni in ambe le ipotesi de' fluidi per v, e sostituendo poscia per v^2 $2gh$, e per vdv gdh, si ritrae $dh = -\frac{mb^2 2h}{nb^2A}dx$, e $dh = -\frac{mb^2 4h}{nb^2A}dx$. Esprimendo con ω la gravità specifica del fluido, e per ω' quella del corpo, verrà $\frac{m}{n} = \frac{\omega}{\omega'}$ (§. 47), e facendo δ eguale al coefficiente numerico di h in tutte e due l'equazioni, esse si comprenderanno nella sola

$$dh = -\frac{\delta\omega b^2 h}{\omega' b^2 A}dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Sia R la resistenza che sperimenta il corpo nel tempo dt, essa è sempre agente in questo tempo infinitesimo, e però Rdt sarà la cagione di ciò che rimane distrutto dalla quantità di moto del corpo: ma la velocità essendo v, la quantità di moto nel tempo dt sarà nb^2Adv; quindi eguagliando la cagione all'effetto si ha $Rdt = -nb^2Adv$, in cui il secondo membro ha segno diverso del primo, perchè quando il tempo della immersione cresce la velocità diminuisce. Si avrà dunque

$R = -nb^2 A \frac{dv}{dt} = -nb^2 A \frac{vdv}{vdt} = -nb^2 A \frac{gdh}{dx}$; infine $dh = -\frac{R}{nb^2Ag} dx$; la quale equazione dovrà essere identica alla (1) come appartenente allo stesso moto, adunque $\frac{R}{nb^2Ag} = \frac{\delta\omega b^2 A}{\omega' b^2 A}$; ma tanto nb^2Ag, quanto $\omega' b^2 A$ indicano il peso del corpo (§ 47); onde

$$R = \delta\omega b^2 h = \delta\omega b^2 \frac{v^2}{2g} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Dunque la resistenza di un corpo in moto in un de' fluidi da noi considerati, pareggia il peso di un cilindro dello stesso fluido, avente per base la superficie esposta all'urto, e per altezza quella spettante nel vôto alla velocità che ha il corpo, presa un numero δ di volte. Il valore poi di δ, pei diversi fluidi si dovrà stabilire dagli sperimenti.

Nel valore di R non apparendo l'altezza del corpo, si può conchiudere che la resistenza sarebbe la stessa se il corpo fosse un prisma, un cono retto, o pure un piano, i quali all'urto normale presentassero eguali basi.

Se $\delta = 2$ come nel primo caso, e la superficie esposta all'urto fosse un cerchio del raggio A, la resistenza sarebbe $R = \alpha\pi A^2 2h$.

49. (*Fig. 12*). Vogliasi ora analizzare l'urto obbliquo di un piano AB, che si muove nel fluido, i cui filetti siano nella direzione CE. Sia CE la velocità v del detto piano secondo la direzione CE del fluido, si esprima con α l'angolo ECB, e con b^2 la superficie piana AB.

Si decomponga la resistenza secondo le due CD, DE, la prima normale, e la seconda parallela al piano. La prima sola ha la proprietà di ritardare il moto nella direzione normale. Sia R questa resistenza, sarà (§. 48)

$$R = \delta\omega b^2 \frac{CD^2}{2g} = \delta\omega b^2 \frac{CE^2 . \text{sen}^2\alpha}{2g}, \text{ ed}$$

$$R = \delta\omega b^2 \text{sen}^2\alpha \frac{v^2}{2g} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Decomponendo inoltre la resistenza normale secondo la direzione CE del fluido e secondo la normale CG a questa, si perverrà ad avere, indicando con r, r' siffatte resistenze, $R : r :: CD : CI :: 1 : \text{sen}\,\alpha$,

$$r = R\,\text{sen}\,\alpha = \delta\varpi b^2 \text{sen}^3\,\alpha \frac{v^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

ed $r' = \delta\varpi b^2 \text{sen}^2\,\alpha \cos\alpha \frac{v^2}{2g}$. La r solamente rallenterà il corso del piano lungo la CE, l'altra r' opererà nella direzione di GC, la quale decomposta nelle CA, e AG normale ad AB, dimostra che la sola AG produce il suo effetto, quello cioè di fare girare continuamente intorno al punto C il piano, nel mentre che il moto si esegue lungo la CE. Onde l'angolo α cambierà continuamente di valore. Ed essendo AB una faccia piana di un corpo esposto all'urto, nel cammino progressivo n'esporrà un'altra, il che rende il movimento complicatissimo e quasi impossibile a mettersi in equazione. Ciò non pertanto la teorica si rende profittevole nelle sue applicazioni, se il corpo fosse generato da una qualunque curva (*Fig. 13*) FAD che compisse il suo giro intorno a un asse FD parallelo alla direzione de' filetti fluidi.

Ciò premesso, il solido di rivoluzione presenterà alla resistenza parti eguali e simmetriche in guisa che ne risulta un mutuo distruggimento fra le forze laterali. La parte ADB esposta al fluido è generata dalla curva AD. Sia D l'origine delle coordinate, $DP = x$, $PQ = dx$, $MP = y$, $NO = dy$; l'arco $DM = s$, e $MN = ds$; la superficie generata dall'arco NM sarà indicata da $2\pi y ds$ la quale incontrerà la direzione del fluido sotto l'angolo $MNR = NMO$, il cui seno è $\frac{dy}{ds}$, ed il coseno $\frac{dx}{ds}$: sostituendo tali valori in (4), verrà.

$$r = 2\delta\varpi\pi \frac{v^2}{2g} \int \frac{y dy^3}{ds^2} + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Sia AD un quadrante circolare; l'intero solido sarà una

sfera il cui raggio sia A: pel triangolo NOM simile al triangolo MCP risulta $MN = \frac{CM \times NO}{CP} = ds = \frac{Ady}{\sqrt{A^2 - y^2}}$: onde la formola antecedente dà $r = 2\delta\alpha\pi \frac{v^2}{2g} \int \frac{(A^2 - y^2)ydy}{A^2} =$ $2\delta\alpha\pi \frac{v^2}{2g}\left(\frac{1}{2} y^2 - \frac{y^4}{4A^2}\right) + C$. Quando $y = o$ anche la costante sarà tale, perciò facendo $y = A$, si ha

$$r = \frac{1}{2} \delta\alpha\pi A^2 \frac{v^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Paragonando questa formola con la (2.§.48), πA^2 corrisponde a b^2: *si conchiude quindi che la resistenza della sfera vale la metà di quella del suo cerchio massimo, o la metà di quella di un cilindro dello stesso diametro ed animato da eguale velocità.*

50. La formola (6.§.49) dà $r : r' :: (A^2 : A'^2)(v^2 : v'^2)$, *cioè le resistenze di due sfere in uno stesso fluido, sono nella ragion composta de' quadrati delle celerità, e di quella de' quadrati de' raggi.*

Se $A = A'$, ne viene $r : r' :: v^2 : v'^2$; ossia *le resistenze di una sfera che ha moto in un fluido, sono nella ragione dei quadrati delle velocità che ad essa sfera rimangono ne' diversi punti del suo tragitto.*

Allorchè $v = v'$, *le resistenze saranno come i quadrati de' raggi, o come le superficie delle sfere, o de' cerchi massimi ec.*

Simili paragoni si possono stabilire con la formola (3.§.49) facendo parte di questa il quadrato del seno dell' angolo d' incidenza.

Nel paragrafo antecedente si è tacitamente supposto che la resistenza era cagionata da un fluido rinchiuso dentro un canale in cui le particelle forzate dal corpo si potevano allontanare dalla loro direzione con distruggersi. Se il fluido fosse esteso indefinitamente, le particelle urtate dal cilindro o dalla sfera comunicherebbero alle contigue un moto di vibrazione con refluire dietro il corpo; e perciò la resistenza verrebbe a menomarsi, ed approssimandoci alla opinione di Newton,

Digitized by Google

per l'aria potrà valutarsi con $\delta = 1$, percui la formola (6.§.49) diverrebbe

$$r = \frac{1}{2} \omega b^2 \frac{v^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

51. Chiamando M la massa di un corpo, sarà (§. 48) $Rdt = \pm Mdv$, ed $\frac{R}{M} = \pm \frac{dv}{dt}$; ma per i principii di Meccanica $+\frac{dv}{dt}$ esprime la forza acceleratrice assoluta, che indichiamo con φ, e $-\frac{dv}{dt}$ la ritardatrice, onde $\varphi = \mp \frac{R}{M}$; cioè a dire che *la forza ritardatrice o acceleratrice, la quale agisce su di un corpo che ha moto in un fluido, o in qualunque altra materia, pareggia la resistenza che esso corpo sperimenta, divisa per la massa.* E siccome R è funzione della velocità, tale sarà anche φ; come pure se R divenisse costante, tale sarebbe ancora φ. Si noti però che quando il corpo si muove nel fluido per effetto di una velocità ricevuta, R dovrà prendersi col segno meno, ed esprime una resistenza vera. Quando poi il moto del corpo nasce da una forza continua, allora R dovrà prendersi col segno più ed esprimerà una vera forza motrice continua che ad ogni istante imprime nuovi gradi di velocità al corpo, mentre che nel primo caso la resistenza toglie continuamente al corpo in moto nuovi gradi di velocità.

Sia v' la velocità che perde un corpo del peso p dopo aver percorso uno spazio x piccolissimo nel tempo t. Avuto riguardo al §. 48, si ottiene $Rt = \frac{p}{g} v'$, ed $R = \frac{p}{g} \cdot \frac{v'}{t}$; pel brevissimo spazio x, senza errore sensibile, il tempo t si può considerare eguale a quello del moto equabile con una velocità media aritmetica tra le velocità date agli estremi dello spazio x, di modo che chiamando V, V' le velocità al principio ed alla fine di x sarà $v' = V - V'$, e $v = \frac{V + V'}{2}$. La resistenza che si ottiene appar-

terrà alla velocità media v, perciocchè è quella colla quale il tempo viene a calcolarsi, quindi avrà luogo la equazione di condizione $v=\frac{x}{t}$; e perciò

$$R=\frac{vv'}{gx}p. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8);$$

resistenza espressa in funzione del peso del corpo, di v velocità data, di v' residua alla fine del breve spazio x, e della quantità costante g.

52. I due fluidi posti in disamina non hanno esistenza in natura come chiaro apparisce; ma le leggi de' loro moti ci forniscono alcuni dati da modificarsi convenevolmente per le ulteriori ricerche sperimentali sulla resistenza de' proietti di artiglieria scagliati nell' aria.

L' aria atmosferica è dotata di tutte le proprietà appartenenti agli altri fluidi, è però in tale stato di compressione che circondando i corpi li preme egualmente per tutti i versi, dal che deriva ch' essi trovandosi in riposo persisteranno in tale stato; quando poi hanno moto oltre la pressione incontrano altresì una resistenza cagionata dall'urto impresso alle particelle atmosferiche, le quali essendo elastiche, ma non perfettamente, rendono le investigazioni teoretiche difficoltosissime, e spesse fiate discordi dai fatti per difetto di rigorosi sperimenti.

La sperienza continua ci fa conoscere che l'aria spostata una volta da un sito vi rifluisce all' istante con una velocità che si calcola con la nota formola $v=\sqrt{2gh}$, in cui $h=850\times10^m$, 39485 ($=850\times$ piedi 32)$=8835^m,6225$ ($=$ piedi 27200); perocchè la pressione atmosferica fa equilibrio con una colonna di mercurio alta pollici 28, o di acqua alta circa 32 piedi secondo gli sperimenti di Torricelli; ed 850 è la densità media di questo fluido rapportata all' aria; dunque

$v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\times9,809\times10^m39485\times850}=415^m,146$
($=$piedi 1278 fran $=$piedi 1360 circa ingl.)

Se l'altezza media del mercurio fosse pol 27. lin 9. francesi,

si avrebbe $h = 13,575 \times$ pol. $27.9 \times 850 =$ piedi 22680,550, circa: 13,575 è la densità del mercurio purissimo riferita all'acqua.

Premesso ciò se un mobile sferico si muova nell'aria con una velocità minore di $415^m,146$, dietro di esso non si dovrà formare alcun vôto, e la resistenza che sperimenta sarà la sola che nasce dall'urto che ricevono le molecole aeree, le quali essendo spinte in avanti, sarebbero mosse lungo la linea del moto se le altre consecutive non si opponessero: adunque le prime incontrate addensano maggiormente le successive, e rifluiscono all'orlo del corpo. Per questa doppia circostanza il cilindro di resistenza avrà un'altezza maggiore di $\frac{1}{2} h$ (§. 49), quindi $\delta > 1$ come vedremo cogli sperimenti. Vero è che gli strati immediatamente prima di essere urtati hanno un moto di vibrazione; ma ciò non compensa interamente l'effetto delle due dette circostanze le quali accrescono la resistenza.

Se la sfera si movesse con una velocità maggiore di $415^m,146$, l'aria spostata non potrà nel rifluire raggiungere il corpo; e però dietro di esso si formerà il vôto. Allora la resistenza propriamente detta si eserciterà solo sulla parte anteriore, che unita alla pressione, che non viene controbilanciata da quella posteriore come nel primo caso, si forma la totale resistenza, la quale volendo valutare, converrebbe ammettere la teorica antecedente (§. 49). Ma si è osservato che i primi strati urtati una volta fanno sempre più addensare gli altri a misura che la velocità sarà più grande; essi perciò si diraderanno con isgombrare il cammino alla sfera per la grande velocità che prendono dopo avere impresso agli altri un certo movimento nel verso del tragitto; e ciò avrà sempre luogo fino a che la velocità della sfera si riduce a $415^m,146$: ond'è che la resistenza totale verrà a diminuirsi, e l'altezza del rispondente cilindro, generalmente, assumerà un valore minore di $\frac{1}{2} h$, che dovrà poi crescere per la velocità maggiore con la quale l'aria reagisce, e si addensa talmente da essere urtata prima di rarefarsi. Vedremo che δ sarà compreso fra 1 e 2 per le velocità fino a 2000 piedi.

Essendo l'aria di sua natura compresa tra i fluidi da noi analizzati, l'altezza del cilindro di resistenza sarà $\frac{1}{2}h$ analogamente aumentata per le discorse circostanze.

Borda valuta a $\frac{3}{8}$ circa il coefficiente di h, e Lombard se ne giova pel calcolo del coefficiente della resistenza dell'aria, il quale fa parte di tutte le formole concernenti il tiro delle bocche da fuoco.

TEORICA II.

Sperimenti sulla resistenza che l'aria oppone ai corpi.

53. Per valutare la resistenza che l'aria oppone ai corpi, si è fatto uso di varie macchine. Quella immaginata da Robins e modificata da Elicôt è accomodata per apprezzare le resistenze delle piccole velocità, e per le grandi si adopera il pendolo balistico di Hutton.

(*Fig. 14.*) Il congegnamento della prima consiste in un cilindro di rame *BECD* mobilissimo intorno il suo asse, situato in posizione verticale, e che trovasi prolungato al disopra del telaro in cui è allogato il cilindro. All'asse così protratto è affidato un cono di materia leggiera, e vôto nell'interno. Una sottile riga *GH* conformata a taglio parte dalla base *GF* del cono; all'estremo della riga si colloca il corpo che si vuole esporre alla resistenza dell'aria. Un filo *AH* parte dal vertice *A* e termina all'estremo *H*, ed ha per oggetto di non fare incurvare la riga aggravata del corpo *M*. Al cilindro *BD* si avvolge un crino, e si fa passare per una puleggia *L* mobilissima: all'estremo del crino è un peso *P* che per la sua gravità fa girare il cilindro, la riga ed il corpo.

Di questo strumento una particolarizzata descrizione si trova in Hutton (N).

Quando la resistenza dell'aria alla riga *GH*, ed al corpo *M* è minore del peso *P*, la discesa di questo sarà accelerata; il

(N) Hutton. Nouvelles expériences d'artillerie trad. par Terquem pag. 83.

quale acceleramento fa sì che la riga GH prende una rotazione con velocità crescente, ed il corpo M sperimenterà le resistenze anch' esse crescenti, percui si perverrà a tale moto che la resistenza eguagliar debba il peso P: ossia vi sarà un termine, in cui il moto circolare di M, ed il verticale di P siano sensibilmente uniformi, come appunto accade dopo le prime rivoluzioni. Si osservi in oltre qual tempo medio impiega la riga a fare una rivoluzione, e poscia si tolga il corpo ed il peso. Al primo si sostituisca una piastra sottilissima di piombo dello stesso peso, situandola orizzontalmente e nella direzione dell'asse GH; al secondo si sostituisca pure un altro peso P', tale da far prendere alla riga così aggravata la medesima velocità che aveva prima. È chiaro che P' dovrà essere minore di P, e quindi $P-P'$ misurerà la resistenza che l'aria oppone al corpo M, perchè P misura la resistenza della riga, dell'attrito, e del corpo; e P' misura la resistenza dell'attrito e della riga.

L'applicazione della piastra di piombo al braccio di leva è indispensabile, per la ragione che il corpo M ritardar deve il moto di P per la sola resistenza ch'esso soffre dall'aria, e non già in minima parte pel suo peso.

Il peso $P-P'$ si può considerare come una forza applicata ad un punto qualunque della direzione LO, perocchè sempre opererà nel sito O, ove il crino è tangente alla superficie cilindrica. Per la qual cosa si hanno due forze $P-P'$, e la resistenza che sperimenta M: la prima opera intorno all'asse AR alla distanza $OQ=A'$, raggio del cilindro, e la seconda detta R, alla distanza $TH=A$. E poichè i movimenti debbono diventare uniformi, per le leggi di Dinamica si avrà $A'(P-P')=AR$, ed

$$R=\frac{A'}{A}(P-P') \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9).$$

Si è cercata la resistenza che una mezza sfera oppone all'aria con la parte piana.

All'estremo *H* della riga si è situata la mezza sfera *M* di cartone del diametro di pol. 6,375 (misure inglesi), e del peso di once 4 e dramme 3. La distanza *TM*=*A* dal centro del corpo all'asse del cilindro è eguale a pol. 53,34: il raggio del cilindro compreso quello del filo è di pol. 1,044=*A'*. Un peso posto all'estremo del filo è di once 1 dramme 12=*P* ha dato i seguenti risultamenti.

TAVOLA I.

Resistenza dell'aria sulla parte piana dell'emisfero.

GIRI.	TEMPI.	DIFFERENZE	
N.°			
1	0'.27''		Peso dell'emisfero=on. 4. dram. 3.
		20''	
2	0'.47''		Diametro. pol. 6,375.
		19''	
3	1'. 6''		Peso *P'*=dram. 8.
		18''	
4	1'.24''		Peso *P*=on. 1. dram. 12.
		18''	
5	1'.42''		Velocità dell'emisfero=piedi 1,551.
		18''	
6	2'. 0''		Tempo di una rivoluzione=18''.
		18''	
7	2'.18''		
		18''	
8	2'.36''		
		18''	
9	2'.54''		
		18''½	
10	3'.12''½		
		18''½	
11	3'.30''½		
		17''½	
12	3'.48''		
		17''	
13	4'. 5''		
		17''½	
14	4'.22''½		

La prima colonna esprime il numero de' giri del corpo, la seconda i tempi scorsi, e la terza la loro differenza.

I primi tre giri si sono eseguiti in 1'. 6'', i primi quattro in 1'. 24'', e perciò il quarto si è fatto in 18''. Inoltre per

i primi cinque giri il tempo scorso è stato di 1'.42"; dunque pel quinto il tempo impiegato è di 18" così ec. Ciò fa conoscere che il moto equabile si appalesa dalla terza alla nona rivoluzione.

Abbisognando 18" per un intero giro, in 1" se ne farà $\frac{1}{18}$; onde $\frac{2\pi A}{18} = \frac{3,141 \times 106,68}{18 \times 12} =$ piedi 1,551 è la velocità del centro della mezza sfera.

Poscia all'estremo della leva si pose il piombo, come si è detto, dello stesso peso dell'emisfero. Indi un peso di dramme $8 = P'$ produsse un movimento tale, che una rivoluzione fu eseguita in 18"; per la qual cosa la formola (9) darà $R = \frac{1,044}{53,34} \times$ (on. 1. dram. 12 — dram. 8), o $R = \frac{1}{51,1} \times 1\frac{1}{4} =$ once 0,024. Tal'è la resistenza assoluta dell'emisfero animato dalla velocità di piedi 1,551.

La resistenza dell'aria all'emisfero misurata alla superficie cilindrica è $P - P'$ che nel nostro caso è eguale ad once $1\frac{1}{4}$, ch'è la resistenza relativa. L'assoluta poi sarà questa stessa moltiplicata per $\frac{A'}{A}$, o $\frac{1}{51,1}$; cioè la resistenza rinvenuta.

Si aggravò di nuovo lo strumento ponendo la parte convessa contro l'aria; al filo si sospese un peso di once 2, e dramme 12, il quale dopo varii giri dette la rotazione equabile, dimanierachè l'intera rivoluzione si compì in $11''\frac{2}{3}$, onde $\frac{2\pi A}{11''\frac{2}{3}} = \frac{3,141 \times 106,68}{35 \times 4} =$ piedi 2,393, ch'è la velocità della mezza sfera.

Si tolse il corpo dalla riga e si collocò al posto di quello la piastra di piombo; il filo fu aggravato successivamente di varii pesi, che giunto a quello di dramme 12 dette il moto equabile come nell'altro sperimento, cioè in $11''\frac{2}{3}$ si compì la rivoluzione. Quindi è che on 2. dr 12 — dr 12 = on. 2 rappresentano la resistenza relativa; e $\frac{1}{51,1} \times 2 =$ on. 0,039 rappresenta la resistenza assoluta, allorquando la mezza sfera è animata dalla suddetta celerità.

Variando dunque i pesi motori si potrà aumentare la velocità e quindi la resistenza dell' aria. Siffatto sperimento eseguito su varii corpi ha dato la seguente tavola.

TAVOLA II.

Resistenze assolute espresse in once, su ciascuna figura.

VELOCITÀ	CONO		Sfera intera	Cilindro	EMISFERO		Piccolo emisfero.	
In piedi	Vertice	Base.			Base	Convessità		
3	0,028	0,040	0,027	0,050	0,051	0,020	0,028	Base del cono, diametro=pol. 6,375.
4	0,048	0,109	0,047	0,090	0,096	0,039	0,048	Diametro della sfera= pol. 6,375.
5	0,071	0,162	0,068	0,143	0,148	0,063	0,072	Idem del cilindro= pol. 6,375.
6	0,098	0,225	0,094	0,205	0,211	0,092	0,103	Idem dell'emisfero= pol. 6,375.
7	0,129	0,298	0,125	0,278	0,284	0,123	0,141	Idem del piccolo emisfero=pol. 4,75.
8	0,169	0,382	0,162	0,360	0,368	0,160	0,184	
9	0,211	0,478	0,205	0,436	0,464	0,199	0,233	
10	0,260	0,587	0,255	0,565	0,573	0,242	0,287	
11	0,315	0,712	0,310	0,688	0,698	0,297	0,349	
12	0,376	0,850	0,370	0,826	0,836	0,347	0,418	
13	0.440	1,000	0,435	0,979	0,988	0,409	0,492	
14	0,512	1,066	0,505	1,145	1,154	0,478	0,573	
15	0,589	1,346	0,581	1,327	1,336	0,552	0,661	
16	0,673	1,673	0,646	1,663	1,526	1,538	0,734	
17	0,762	1,763	0,752	1,745	1,757	0,722	0,853	
18	0,858	2,002	0,848	1,986	1,998	0,818	0,959	
19	0,969	2,260	0,949	2,246	2,258	0,922	1,073	
20	1,069	2,540	1,057	2,528	2,542	1,033	1,196	
Rapporti medi	126	291	124	238	288	119	140	

Si deve osservare che nei diversi sperimenti tanto il peso motore P quanto P' si sono fatti di sottilissime lamine metalliche, affinchè nella discesa verticale la resistenza dell'aria fosse stata tale da poterla del tutto trascurare.

54. Le superficie de' due emisferi sono nel rapporto di $17\frac{3}{4}$: 32 o quasi di 5 : 9; le corrispondenti resistenze :: 5 : 10 prossimamente fino alla velocità di 12 piedi: cioè presso a poco come le superficie; al di là della velocità di 12 piedi le resistenze sulla più gran superficie superano questo rapporto. Infatti il rapporto delle resistenze è di 140 : 288 :: 5 : $10\frac{2}{7}$. Lo stesso rapporto reggerà se il paragone abbia luogo fra superficie simili a quelle nella tavola indicate.

Siano S,s due superficie, R,r le resistenze emergenti da una stessa velocità, sarà $S : s :: 9 : 5$, $r : R :: 5 : 10\frac{2}{7}$, moltiplicando i termini in corrispondenza si ha $Sr : sR :: 9 : 10\frac{2}{7}$, ed

$$R=\frac{2}{7}r.\frac{S}{s} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Il che val quanto dire che la resistenza su di una superficie simile ad una di quelle nella tavola indicate, pareggia $\frac{2}{7}$ della resistenza su di una superficie più piccola, moltiplicata pel rapporto della grande alla piccola superficie; e viceversa la resistenza sulla piccola eguaglia quella della grande presa $\frac{7}{2}$ volte, moltiplicata pel rapporto delle superficie.

Se le superficie fossero due sfere del diametro D,d, la formola diventa

$$R=\frac{2}{7}r.\frac{D^2}{d^2}.$$

Sia D=pol. 5,6, e la velocità sia di 20 piedi. Dalla tavola ultima si ricava che a tale velocità corrisponde oncia 1,057 di resistenza per la sfera intera, quindi $r=\frac{2}{7}\times 1,057\times\frac{(5,6)^2}{(6,375)^2}$,

$\log. r=0,84510+0,02407+1,49638-(0,90309+1,60896)=$ 9,85350 : r=once 0,7137 circa

Il cilindro posto allo sperimento fu talmente sottile che si poteva considerare come il cerchio massimo della sfera. La resistenza media rispondente sta a quella della sfera come 258 : 124 :: 2 : 1,3 circa, in vece di 2 : 1 (§. 49.)

La resistenza media sulla parte piana dell' emisfero sta a quella che ha luogo sulla parte convessa :: 288 : 119 :: $2\frac{2}{3}$: 1.

La resistenza sulla base del cono sta a quella che il cono medesimo sperimenta, allorquando espone all' aria il suo vertice :: 291 : 126 :: 2,3 : 1 prossimamente. Il quale rapporto è quasi lo stesso di quello del raggio al seno dell' angolo che un lato fa con l' asse.

Analizzando con accuratezza la tavola ultima, si conchiude che le parti piane de'corpi, che hanno lo stesso diametro, ricevono più resistenza rispettivamente sulle loro parti convesse, e che le resistenze sulle parti piane variano con la forma posteriore de' corpi. Nè perciò deve conchiudersi che una superficie riceve minor resitenza di un' altra più ottusa, poichè tal conseguenza verrebbe smentita dal paragone di 126 : 124 fra la resistenza del cono e quella della sfera intera.

Quando le parti posteriori de'corpi sono differenti, non ostante che le anteriori siano perfettamente eguali, pure le resistenze variano, e ciò per effetto delle differenti pressioni che si esercitano sulle parti posteriori, come ci vien confermato dalla tavola in disamina. Infatti la resistenza sulla parte anteriore del cilindro è minore di quella che accade sulla base del cono e sull'emisfero, perciocchè la dietro-base del cilindro è premuta con più forza dall' aria che riprende il suo posto.

55. Gli sperimenti esposti si sono ripetuti per un mobile sferico del diametro di pol. 2, incominciando dalla velocità di 5 fino a piedi 20 : da cui si sono ricavati i risultamenti seguenti ; velocità..5..10..15..20, le resistenze rispettive sono once 0,006.. 0,026..0,058..0,103, le cui differenze risultano 0,020..0,032.. 0,045 le quali formano quasi una progressione aritmetica. La stessa cosa si è osservata per le resistenze delle velocità in-

termedie. Quindi con siffatta legge si può formare la seguente tavola.

TAVOLA III.

VELOCITA'	RESISTENZE	PRIME DIFFERENZE	SECONDE DIFFERENZE
piedi	once		
—	—		
5	0,006	20	
10	0,026	32	12
15	0,058	45	13
20	0,103	60	15
25	0,163	74	14
30	0,237	88	14
35	0,325	102	14
40	0,427	117	15
45	0,544	132	15
50	0,676		

Fino alla velocità di 20 piedi le resistenze si sono ottenute dagli sperimenti. La prima colonna si è fatta giungere fino a 50 piedi di velocità, poscia si è compiuta la terza colonna con tener conto della stabilita legge di accrescimento modificata solamente per qualche unità millesima, affine di avere un regolare procedimento. Si è aggiunto a ciascun numero della seconda colonna nota fino a 20 di velocità ciascun numero della terza, incominciando dalla resistenza della velocità di 20 piedi, e così si è condotta a termine la serie delle resistenze. Per esempio, alla velocità 20 corrisponde la resistenza 0,103, alla quale aggiuntovi la differenza 0,060, ha dato 0,163 per resistenza della velocità di piedi 25; ed a 0,163, ch'è la quinta resistenza, aggiunto 0,074, che è la quinta differenza, si è avuto 0,237 per resistenza della velocità di 30 piedi, e così via seguitando.

56. Per le resistenze che l'aria oppone ai proietti che hanno

velocità grandi, Hutton ha impiegato una sfera di ferro del diametro di pollici 2, e del peso di once 18 (N), scagliata contro il pendolo balistico con un'arma caricata prima con 8 e poscia con 2 once di polvere; e dalle velocità ottenute ha ricavato, nel modo ch'esporremo, le corrispondenti resistenze. Per le velocità poi qui sotto notate, gli sperimenti suddetti hanno dato la seguente tavola.

TAVOLA IV.

Velocità col pendolo balistico.

DISTANZE	CARICA	
piedi	once 8.	once 2.
0.		
	piedi	piedi
30	1702	971
	70	37
90	1632	934
	79	30
150	1553	904
	61	28
210	1492	876
	92	42
270	1400	834

La prima colonna indica le differenti distanze dal pendolo alle quali si è situata l'arma: la seconda contiene le velocità della palla nel giungere al pendolo, allorchè la bocca da fuoco si è caricata con 8 once di polvere, e la terza le velocità con la carica di once 2. I numeri intermedî poi sono le differenze successive fra le velocità. Da questa tavola, facendo variare le distanze, per avere altre velocità residuali, si ottiene la seguente tavola.

(N) Hutton. Nouvelles expériences d'artillerie pag. 6; trad. par Terquem.

TAVOLA V.

Velocità dedotte dalla tavola IV.

DISTANZE	CARICA	
piedi	once 8.	once 2.
	piedi	piedi
0	1740	990
	73	37
60	1667	953
	70	34
120	1597	919
	67	31
180	1530	888
	64	29
240	1466	859
	62	27
300	1404	832

La palla nel giungere al pendolo dopo aver percorso 30 piedi ha una velocità di piedi 1702, ed un'altra di 1632 piedi dopo un corso di 90. Se n'è quindi conchiuso che a 60 piedi, distanza media fra 30 e 90, dovrà corrispondere una velocità che sia media fra 1702 e 1632, cioè $\frac{1702+1632}{2}$ = piedi 1667 ch'è appunto la velocità notata nella tavola V in corrispondenza di 60. Si è ragionato inoltre, che la palla dopo un corso di 150 piedi avendo 1553 piedi di velocità; dopo 120 ch'è in mezzo a 90 e 150, ne dovrà avere 1592 ch'è un medio fra 1632 e 1553. Ma nella tavola V si è notato 1597 affinchè le differenze successive formassero una serie aritmetica, come sempre apparisce dagli sperimenti. E perciò più volte nel procedere dell'operazione si è tenuto conto di una siffatta legge con regolarizzare le velocità, le quali hanno variato per diffetto di precisione nel fare la loro ricerca.

Proseguendo nell'anzidetto ragionamento si è compiuta la tavola ultima: avvertendo che 1740 piedi è la velocità alla bocca dell'arma, ossia la iniziale (§. 45). Si è ottenuta questa con osservare la

legge de' decrementi che han luogo nelle velocità col crescere delle distanze, cioè, alle differenze 62. 64. 67. 70 si è notata l'altra 73, che unita alla velocità corrispondente a 60 piedi, ossia piedi 1667, ha dato i piedi 1740. Lo stesso si è conchiuso per la velocità di 990 piedi, che si compone di 953 piedi più 37 piedi.

Per valutare le resistenze che l'aria oppone al dato proietto animato dalle velocità riferite dalla tavola IV, si sostituisca nella formola (8. §. 51) per v il valore medio di due velocità prossime della tavola V, e per v' la differenza che in essa è notata, e si avrà la media resistenza appartenente alla media velocità.

Sia $x = 60$ piedi, $v = \frac{1667+1597}{2} = 1632$, $v' = 70$, avremo $R = \frac{1632 \times 70}{32 \times 60} \times 18 =$ once 1071 ch'è la resistenza corrispondente alla velocità di 1632 piedi appartenente alla tavola IV.

Al modo stesso si è operato, e se ne sono ottenute le due seguenti tavole.

TAVOLA VI.

Carica di 8 once.

Velocità.	Resistenza.	Prime differenze.	Seconde differenze.
piedi	once		
1702	1165 ½		
		94 ½	
1632	1701		5 ½
		89	
1563	982		5
		84	
1498	898		6
		78	
1435	820		

TAVOLA VII.

Carica di 2 once.

Velocità.	Resistenze.	Prime differenze.	Seconde differenze.
piedi	once		
972	328		
		29 ½	
936	298 ½		2
		27 ½	
904	271		2
		25 ½	
873	245 ½		1 ½
		24	
845	221 ½		

E procedendo negli sperimenti, se n'è avuta la tavola che qui profferiamo.

TAVOLA VIII.

Carica.	Velocità.	Resistenze.	Prime differenze.	Seconde differenze.
dram.	piedi	once		
4	287	22	3	
	297	26		
6	365	32	4	
	376	36		
8	420	40	5	1
	432	45	6	
	444	51		
12	524	55	6	0
	537	61	6	
	550	67		
once	598	78	13	1
1	614	91	14	1
	632	105	15	
	652	120		
2	738	160	16	2
	763	176	18	2
	790	194	20	2
	819	214	22	3
	850	236	25	
	883	261		
3	955	306	38	4
	993	344	42	3
	1035	386	45	4
	1079	431	49	3
	1127	480	52	
	1117	532		

Carica.	Velocità.	Resistenze.	Prime differenze.	Seconde differenze.
	piedi	once		
	1068	418	47	4
	1114	465	51	4
once	1164	516	55	4
4	1216	571	59	4
	1272	630	63	
	1330	693		
	1278	609	68	8
	1336	677	76	8
8	1396	753	84	8
	1460	837	92	9
	1528	929	101	
	1600	1030		
	1627	1060	110	8
	1705	1170	118	9
16	1786	1288	127	8
	1872	1415	135	9
	1960	1550	144	
	2053	1694		

I numeri di questa tavola quantunque non presentino una regolarità perfetta, pure gli errori sono trascurabili, come lo dimostrano le colonne delle differenze.

Si potrebbe per interpolazione aumentare il numero delle velocità; ma si è fatto uso di quelle che prende il proietto in mezzo alle distanze fra l'arma ed il pendolo, cioè fra piedi 0.60.120.180.240.360., perciocchè dopo i 360 piedi i tiri sono divenuti incerti.

La minima carica è stata di 4 dramme di polvere che ha prodotta una velocità di 287 piedi. Una carica minore dando poca forza al proietto, non aveva luogo la immersione di esso nel pendolo.

Mediante la suddetta tavola si può descrivere una curva detta di resistenza, la quale farà conoscere qual regolarità debbano prendere le velocità rapportate alle resistenze, dalla quale descrizione si deducono conseguenze della più alta importanza.

(*Fig. 15*). Si tirino due assi rettangolari Ar, Av. In quello delle v si tagliano le velocità a partire dall'origine, cioè velocità di piedi $287 = Aa$, $297 = Ab$, $365 = Ac$, $376 = Ad$, $420 = Ag$, $432 = Ae$, $444 = Af$, ... $1330 = Al$, $1390 = Am$, $1460 = An$, $1528 = Ao$, $1600 = Ap$... ; presi siffatti numeri sopra una scala qualunque: dai punti a, b, c, d.... si elevino le ordinate $aa' = 22$, $bb' = 25$, $cc' = 32$, $dd' = 36$, $gg' = 40$, $ee' = 45$, $ff' = 51$... $ll' = 693$, $mm' = 753$, $nn' = 837$, $oo' = 929$, $pp' = 1030$.... valutate sulla medesima scala, uniti gli estremi di queste ordinate con una certa regolarità mediante un cartoncino, o pure una foglia di qualche metallo flessibile, si verrà a descrivere la curva.

Si è fatto uso di quelle ascisse o velocità, che aumentano con le resistenze ossia ordinate, e ciò per eliminare gli errori.

Prendendo nella Av rette eguali a 300.400.500....2000, ed elevando le corrispondenti ordinate le quali valutate da Hutton sulla scala delle misure si sono avute le resistenze che fanno parte della seguente tavola, appartenenti al proietto di ferro fuso del diametro di pollici 2, e del peso di once 18.

TAVOLA IX.

Resistenza che oppone l'aria al proietto del diametro di pollici 2.

Velocità.	Resistenze.	Prime differenze.	Seconde differenze.	Velocità.	Resistenze.	Prime differenze.	Seconde differenze.
piedi	once			piedi	once		
300	25,8			1200	564,4	107,5	
		20,7					11,4
400	46,5		7,2	1300	683,3	118,9	
		27,9					9,3
500	74,4		8,2	1400	811,3	128,2	
		36,1					7,4
600	110,5		9,4	1500	947,1	135,6	
		45,5					4,2
700	156,0		10,5	1600	1086,9	139,8	
		56,0					7,1
800	212,0		12,3	1700	1228,4	141,5	
		68,3					—1,3
900	280,0		13,4	1800	1368,6	140,2	
		81,7					—3,1
1000	362,0		13,2	1900	1505,7	137,1	
		94,9					—5,0
1100	456,9		12,6	2000	1637,8	132,1	

Sia $a'CB$ la curva di resistenza; si prenda $Ar = 500$, $As = 600$, $At = 700$, e $Au = 800$, ne proviene $rr' = 74,4$, $ss' = 110,5$, $tt' = 156,0$ e $uu' = 212,0$. Dai punti r', s', t', ec. si menino le $r'v$, $s'x$, $t'y$ parallele all'asse Av, e ne avremo $ss' - rr' = s'v = 36,1$, $tt' - ss' = t'x = 45,5$, $uu' - tt' = 56,0$; ossia le differenze delle ordinate sono sempre crescenti. Ciò posto si prendano le due $\alpha\delta$, $\delta\gamma$ infinitamente piccole ed eguali, e si conducano le ordinate $\alpha\alpha'$, $\delta\delta'$, $\gamma\gamma'$, e le parallele $\alpha'\varphi$, $\delta'\varepsilon$ all'asse Av. Essendo $\delta'\varphi$ minore di $\gamma'\varepsilon$ per la natura della tavola, ed $\alpha'\varphi = \delta'\varepsilon$ sarà $\alpha'\delta'$ minore di $\delta'\gamma'$: come ancora l'angolo $\delta'\alpha'\varphi$ minore di $\gamma'\delta'\varepsilon$; e perciò prolungando gli elementi $\alpha'\delta'$, $\delta'\gamma'$ della curva in z ed in ω, il punto ω si allontanerà più di z dall'origine A; ma le $\delta'z$, $\gamma'\omega$ sono due tangenti contigue, perciò la curva opporrà la sua convessità all'asse delle ascisse.

Con un simile raziocinio si dimostra, analizzando le resistenze appartenenti alle velocità 1600. 1700. 1800 e 2000 piedi, che la curva ha un punto *C* di flesso fra le ordinate elevate da 1600 e 1700, ciò vale a dire che da questo punto la curva opporrà la sua concavità all'asse *Av*, ma in maniera meno arcata. Il che è tutto fondato sul principio che le differenze delle ordinate in vece di crescere diminuiscono. La singolarità del punto *C* nasce da questo: che nei fatti il corpo movendosi con una velocità fra 1600 e 1700 piedi, e propriamente di 1650 circa, come dalla suddetta tavola, e con più evidenza dalle due consecutive si può rilevare, soffre solamente la resistenza anteriore dell'aria (§.52). Con altri sperimenti si sono avute le seguenti tavole.

TAVOLA X.

Resistenza dell'aria al proietto del diametro di pollici 2,78.

Velocità.	Resistenze.	Prime differenze.	Seconde differenze.	Velocità.	Resistenze.	Prime differenze.	Seconde differenze.
piedi	once			piedi	once		
900	566			1350	1496	126	
		78					5
950	644		7	1400	1627	131	
		85					4
1000	729		7	1450	1762	135	
		92					3
1050	821		6	1500	1900	138	
		98					3
1100	919		6	1550	2041	141	
		104					2
1150	1023		6	1600	2184	143	
		110					1
1200	1133		6	1650	2328	144	
		116					0
1250	1249		5	1700	2472	144	
		121					
1300	1370		5				

Il proietto appartenente a questa tavola pesa once 48.

TAVOLA XI.

Resistenza dell'aria al proietto del diametro di pollici 3,55.

Velocità.	Resistenze.	Prime differenze.	Seconde differenze.	Velocità.	Differenze.	Prime differenze.	Seconde differenze.
piedi	once			piedi	once		
1200	1840			1550	3321	227	
1250	2030	190	9	1600	3550	229	2
1300	2229	199	8	1650	3780	230	1
1350	2436	207	7	1700	4010	230	0
1400	2650	214	6	1750	4239	229	—1
1450	2870	220	4	1800	4465	226	—3
1500	3094	224	3				

Il proietto appartenente a questa tavola pesa once 97,5.

Le tre antecedenti tavole si sono ottenute da Hutton con notabile regolarità. In esse non solo le serie de' numeri di ciascuna hanno un regolare procedimento; ma se i termini di una tavola si paragonino con i simili delle altre due si osserva una legge costante.

57. I tre diametri delle palle sottoposte ad esperimento, essendo rispettivamente pol. 2, pol. 2,78, e pol. 3,55 cioè del calibro da uno, da quattro, e da sei; i loro quadrati saranno 4.7,7284, e 12,6025, proporzionali ai numeri 1.1,932, e 3,150.

Ciò posto le tre ultime tavole danno per le resistenze della velocità di piedi 1200, i pesi in once 564,4.1133, e 1840. Calcolando ora le resistenze nella ragione de' quadrati de' diametri (§.50), si ottiene $1 : 1,932 :: 564,5 : x =$ once 1090 circa, $1 : 3,150 :: 564,5 : y =$ once 1778 circa.

La resistenza 1090 indicata dalla teorica è meno della sperimentale 1133 di once 43, e $\frac{1090}{43}=25$ circa. Similmente la resistenza 1778 è meno di 1840 per once 62, e $\frac{1778}{62}=28$ circa. Si ottengono quasi gli stessi rapporti se la medesima regola si ripeta per la velocità di piedi 1700, o per qual altra si voglia velocità.

Se dalle resistenze del proietto di 2 pollici di diametro si trovano quelle de' proietti più piccoli, le resistenze sono per analogia in un rapporto minore di 20. Perciò Hutton (P) ha conchiuso generalmente, che le resistenze ad eguali velocità sono nel rapporto delle superficie de' proietti, o de' quadrati de' rispettivi diametri aumentate di $\frac{1}{20}$ allorquando la resistenza del proietto piccolo si paragona a quella del grande, e diminuendola allorchè dal grande si passa al piccolo.

Siano D, d i diametri di due proietti, sara $d^2 : D^2 :: r : r . \frac{D^2}{d^2}$; quindi secondo la stabilita massima, la resistenza sarà

$$R = r . \frac{D^2}{d^2} \pm \frac{1}{20} r . \frac{D^2}{d^2} = \frac{D^2}{d^2} r \left(1 \pm \frac{1}{20}\right).$$

Sia $D=$pol. 5,6, $d=$pol. 2; e la velocità di piedi 2000. Nella tavola IX (§.56) a detta velocità corrisponde la resistenza di once 1637,8 = lib. 102 circa, onde $R = \frac{31,36}{4} \times 102 \left(1 + \frac{1}{20}\right)$ $= 799,68 \times \frac{21}{20} =$ lib. 826 circa, ch' è la resistenza la quale oppone l'aria alla palla da 24 animata dalla velocità di piedi 2000.

La teorica avrebbe dato per resistenza lib. 800; dal che facilmente si scorge, che alla grande resistenza di lib. 800 le 26 libbre non producono sensibili variazioni nei fatti. La stessa cosa potrebbe stabilirsi per altri proietti animati da qualunque velocità: e però senza tema di errare di molto si può fermare ad un dipresso, che le resistenze sperimentali sono come i quadrati de' diametri de' corpi sferici: ossia la formola potrà rimanere

(P) Hutton. Nouvelles expériences d'artillerie pag. 142 trad. par Terquem.

$$R = r \cdot \frac{D^2}{d^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11),$$

quando non si tratta di avere risultamenti, a rigore geometrico, esattissimi.

Ricavata dalla tavola IX la legge di aumento, cioè i termini 36,1.27,9.20,7 che rappresentano le differenze fra le resistenze delle velocità 600.500.400 e 300, vi si aggiungeranno per analogia i termini 14,46 e 8,56; e perciò ne otterremo la

TAVOLA XII.

Velocità.	Resistenze.	Prime differenze.	Seconde differenze.
piedi	once		
100	2,78		
		8,56	
200	11,34		5,90
		14,46	
300	25,80		6,14
		20,70	
400	46,50		7,20
		27 90	
500	74,80		8,20
		36,10	
600	110,50		

La colonna terza si è compiuta seguendo l'altra legge della tavola IX. Dalla resistenza 25,80 si è tolta la differenza 14,46, ed è rimasto once 11,34, ch'è la resistenza per la velocità di 200 piedi. Da 11,34 sottratto 8,56, si è avuto 2,78 che rappresenta la resistenza per la velocità di 100 piedi.

Se in questa e nella tavola del §. 55 si sono modificati i termini delle terze colonne, ciò si è fatto a fine di conservare fra le resistenze di piedi 20 e piedi 200 di velocità, che sono once 0,103 e once 11,34, procedimento tale da far risultare le resistenze delle velocità 25 e 300 giustamente situate nella loro scala di proporzione; ossia le resistenze 0,103 e 11,34

sono stati i limiti al di là de' quali non era permesso oltrepassare con la legge assegnata.

Da ciò che si è finora discorso rispetto alle resistenze, si scorge evidentemente la utilità di formare una sola tavola, cominciando dalla velocità di piedi 5, fino alla gran velocità di piedi 2000, pel proietto di pollici 2 di diametro.

TAVOLA XIII.

Resistenza che oppone l'aria ad una sfera del diametro di pollici 2.=0m,0508.

VELOCITA' in piedi.	RESISTENZE degli sperimenti in once.	RESISTENZE della teorica in once.	RAPPORTO delle due resistenze.	RESISTENZE degli sperimenti, secondo gli esponenti.	RESISTENZE degli sperimenti in libbre.	VELOCITA' in metri.	RESISTENZE degli sperimenti in kilogrammi.
5	0,006	0,005	1,20			1,524	0,00017
10	0,026	0,021	1,23			3,048	0,00074
15	0,058	0,046	1,25			4,572	0,00164
20	0,103	0,082	1,26			6,096	0,00291
25	0,163	0,128	1,27			7,620	0,00461
30	0,237	0,184	1,29			9,144	0,00671
40	0,427	0,329	1,30			12,192	0,01208
50	0,676	0,511	1,32			15,240	0,01913
100	2,78	2,046	1,36		0,174	30,48	0,07867
200	11,34	8,180	1,39	2,028	0,709	60,96	0,32092
300	25,8	18,400	1,42	2,028	1,612	91,44	0,73014
400	46,5	32,700	1,43	2,032	2,906	121,92	1,31595
500	74,4	51,200	1,46	2,042	4,650	152,40	2,10552
600	110,4	73,600	1,50	2,055	6,900	182,88	3,12432
700	156,0	100,200	1,55	2,069	9,750	213,36	4,41480
800	212,0	130,900	1,62	2,084	13,250	243,84	5,99960
900	280,3	165,700	1,69	2,099	17,519	274,32	7,93249
1000	362,1	204,600	1,77	2,115	22,625	304,80	10,24743
1100	456,9	247,600	1,84	2,128	28,556	335,28	11,93027
1200	564,4	294,600	1,91	2,138	35,275	365,76	15,98052
1300	683,3	345,700	1,98	2,146	42,703	396,24	19,33739
1400	811,5	401,000	2,03	2,151	50,719	426,72	22,96545
1500	947,1	460,100	2,06	2,153	59,194	457,20	26,80293
1600	1086,9	523,700	2,08	2,152	67,931	487,68	30,75927
1700	1228,4	591,200	2,07	2,150	76,775	518,16	34,76372
1800	1368,6	662,800	2,06	2,145	85,537	548,64	38,73138
1900	1505,7	738,500	2,03	2,141	95,106	579,12	42,61131
2000	1637,8	818,300	2,00	2,136	102,362	609,60	46,34974

La prima colonna contiene le velocità da 5 fino a 2000 piedi: la seconda esprime le analoghe resistenze in once (avoir du poids): la terza dà le resistenze proporzionali ai quadrati delle velocità valutate con la formola (7. §. 50) la quale dà, le così dette resistenze teoriche, in cui $\omega = \frac{6}{5}$ di oncia, ch'è il peso specifico dell'aria sotto il volume di un piede cubo; $b^2 = \pi(\frac{1}{2}a)^2$, $a = \frac{1}{2}$ pol. $2 = \frac{1}{12}$ di piede, $\pi = 3,141$, $g =$ piedi 32 circa (= piedi 30,2 franc.), perciò $r = \frac{1}{2} \times \frac{6}{5} \times 3'141 \times \frac{1}{144} \times \frac{1}{64} \times v^2 = \frac{3,141}{15360} v^2 = \frac{1}{4890} v^2$, o pure senza notabile errore $r = \frac{9}{44000} v^2 = \frac{(3v)^2}{44000}$.

La quale formola riproduce la colonna terza delle resistenze teoriche; cioè dividendo il quadrato del triplo della velocità pel numero costante 44000.

Ciascun numero della seconda colonna diviso pel rispondente numero della terza somministra quelli della quarta.

Si osserva che le resistenze sperimentali stanno a quelle valutate con la legge Newtoniana come 6 : 5 per le piccole velocità. Quando per altro le velocità aumentano, la seconda colonna guadagna gradatamente sulla terza fino alla velocità di 1600 piedi, in cui la differenza è la massima; ossia risulta la prima resistenza più del doppio della seconda, cioè sono nel rapporto di 2,08 : 1. Dopo un tal limite le velocità crescendo sempre, il rapporto decresce; e a 2000 piedi diventa quello di 2 : 1.

Se le velocità della prima colonna si elevino agli esponenti notati nella quinta, i risultamenti saranno proporzionali alle resistenze. Siano v, v' due velocità, le cui resistenze vengano rappresentate da r, r', ed x esprima l'esponente di dette velocità, avremo $v^x : v'^x :: r : r'$ e $\left(\frac{v'}{v}\right)^x = \frac{r'}{r}$, $x[\log v' - \log v] = \log r' - \log r$, $x = \frac{\log r' - \log r}{\log v' - \log v}$.

Sia $v = 100$, $v' = 200$, sarà $x = \frac{\log 11,34 - \log 2,78}{\log 2} = \frac{61057}{30103} =$

2,028; il qual numero è situato nella quinta colonna in relazione con 200 piedi di velocità.

Lasciando nella formola costantemente per v 100, per r 2,78, e facendo v' eguale a tutti i numeri della prima colonna, ed r' eguale alle resistenze rispettive della seconda, si otterranno tutti i numeri contenuti nella quinta.

Il medio aritmetico fra tutti gli esponenti è 2,104=2,1 circa, appartenente ad una velocità compresa fra 900, e 1000 piedi; ciò non ostante riproduce senza sensibili errori tutte le resistenze sperimentali. La rispondente formola sarà $\left(\frac{v'}{100}\right)^{2,1} = \frac{r'}{2,78}$ e perciò $r' = 2,78 \left(\frac{v'}{100}\right)^{2,1}$; nella quale v' va calcolata in piedi e risulta r' in once.

Questa tavola di Hutton l'abbiamo arricchita di due altre colonne affinchè si abbiano i piedi in metri, e le once in kilogrammi.

In questa teorica si sono usate le misure inglesi, come appunto ha fatto Hutton, ad oggetto di nulla trascurare nelle approssimazioni, e mostrare così gli sperimenti della stessa maniera con la quale sono stati eseguiti dall'autore.

TEORICA III.

Formole fra le velocità, e le resistenze.

58. Per le velocità da 5 fino a 300 piedi si è osservato essere le resistenze come i quadrati delle velocità prossimamente; noi per altro stabiliremo una formola per le velocità da zero fino a 100 piedi, ed un'altra da 100 a 300 piedi, e le resistenze rispettive che si cercano; e ciò per conseguire una maggiore approssimazione nei risultamenti.

Sia perciò $Av^2 = r$. Si sostituisca per v successivamente $1^m,524 \cdot 15^m,240 \cdot 30^m,480$ (=5, 50 e 100 piedi ing.); e per

r $0^k,00017 \cdot 0^k,01913$ e $0^k;07867$ ($=0,006 \cdot 0,676$ e 2,78 once ing.) presi dalla tavola ultima, si avrà $A(1,524)^2=0,00017$, $A(15,240)^2=0,01913$, $A(30,480)^2=0,07867$; $A=\frac{0,00017}{(1,524)^2}$, $A=\frac{0,01913}{(15,240)^2}$ ed $A=\frac{0,07867}{(30,480)^2}$. Si avranno i tre seguenti calcoli,

$$\log A=\log.0,00017+\text{com.}\log(1,524)^2=6,23045+9,63404=$$
$$15,86449\ldots A=0,00007320.$$
$$\log A=\log.0,01913+\text{com.}\log(15,240)^2=8,28171+7,63404=$$
$$15,91575\ldots A=0,00008237.$$
$$\log A=\log.0,07867+\text{com.}\log(30,48)^2=8,89581+7,03198=$$
$$15,92779\ldots A=0,00008468.$$

La terza parte della somma di questi tre numeri è 0,00008008; e perciò posto nella formola stabilita per A siffatto valore, o pure 0,00008, si avrà $0,00008v^2=r$; nella quale sostituendo per v da zero fino a 30^m circa (= 100 piedi) di velocità, si avranno per r tali risultamenti in kilogrammi che differiranno pochissimo da quelli notati nell'ultima colonna della suddetta tavola.

Similmente in $Av^2=r$ sostituendo per v $30^m,48$ per r $0^k,07867$, si trova come antecedentemente $A=0,00008468$; come pure per v $91^m,44$(=300 piedi ing), e per r $0^k,73014$, il valore di A viene 0,00008732; percui la semisomma di questi due valori ch'è 0,000086 riduce la formola generale a $0,000086v^2=r$, la quale è sufficientissima per valutare le resistenze delle volocità anche fino a $121^m,92$(= 400 piedi). Possiamo perciò stabilire che per le velocità da 0^m a 30^m la formola prima riproduce le analoghe resistenze; e per le altre da 30^m a 122^m circa, la seconda è quella di cui si deve far uso.

A rinvenire una formola onde calcolare le resistenze per le grandi velocità, è da osservarsi, che i proietti ne sperimentano due specie generalmente. La prima è dovuta all'urto contro le particelle dell'aria spostata, che aumenta di continuo

nella ragion duplicata delle velocità : la seconda deriva dal peso atmosferico che cresce con la velocità , alla quale è proporzionale come pressione , fino a tanto che questa resistenza sia giunta al suo massimo punto , il che avviene quando la velocità del corpo è eguale o maggiore della velocità con la quale l'aria si precipita nel vôto. Infine le particelle aeree presentano al corpo una coesione costante. Da un tale ragionamento si scorge evidentemente che la formola da assumersi dovrà essere di quattro termini, o sia $Av^2 + Bv + C = r$, nella quale A, B e C sono coefficienti indeterminati.

Nella formola ponendo successivamente per v $182^m,88$. $365^m,76$, e $548^m,64$ (= 600 · 1200 , e 1800 piedi ing.) e per r $3^k,12432 \cdot 15^k,98052$, e $38^k,73138$, che sono le corrispondenti resistenze notate nella Tavola XIII, si avranno le seguenti tre equazioni.

$$A(182,88)^2 + B(182,88) + C = 3,12432$$
$$A(365,76)^2 + B(365,76) + C = 15,98052$$
$$A(548,64)^2 + B(548,64) + C = 38,73138.$$

Sottraendo dalla seconda e dalla terza la prima, ed osservando che 182,88 è metà di 365,76 , ed è terza parte di 548,64 ; percui $(365,76)^2 = 4(182,88)^2$, e $(548,64)^2 = 9(182,88)^2$; si ottiene

$$3A(182,88)^2 + B(182,88) = 12,85620$$
$$8A(182,88)^2 + 2B(182,88) = 35,60706;$$

dalle quali si ricava

$$A = \frac{4,94733}{(182,88)^2}, \text{ e}$$

$$\log A = \log. 4,94733 + \text{com.}\log(182,82)^2 = 0,69436 + 5,47564 = 6,17000, \text{ ed}$$

$$A = 0,0001479, \text{ e}$$

$$B = -\frac{1,98579}{182,88}, \text{ da cui}$$

$$\log B = \log. 1,98579 + \text{com.}\log 182,88 = 0,29793 + 7,73782 = 8,03575, \text{ e}$$

$$B = -0,010858.$$

Dalla prima si ritrae

$$C = 0,16332\,,$$

dopo aver sostituito per A, e B i ritrovati valori: quindi la formola generale diventa

$$0,0001479v^2 - 0,010858v + 0,16332 = r.$$

Se nelle applicazioni si usa la formola detta antecedentemente (§.57) fra le resistenze e le velocità, incorriamo nell'inconveniente di non avere le intregrazioni finite, per cagione che la velocità si trova colà elevata alla potenza 2,1: in conseguenza useremo una delle tre rinvenute formole, secondo la grandezza della velocità del proietto.

Se a questa ultima formola si toglie l'ultimo termine rimane

$$0,0001479v^2 - 0,010858.v = r\,,$$

la quale riproduce anch'essa con la massima esattezza le resistenze sperimentali notate nella Tavola XIII. (§.57).

Aggiungiamo intanto un'altra tavola per fare il paragone fra i risultamenti di queste formole, con quelli offerti dagli sperimenti.

TAVOLA XIV.

VELOCITA'		RESISTENZE sperimentali.	RESISTENZE DELLE FORMOLE			
			$0,0001479v^2 - 0,010858v.$	$0,0001479v^2 - 0,010858v + 0,16,$		
In piedi.	In metri.				DIFFERENZE.	
		k	k	k	k	k
100	30,48	0,07867	—0,1935	—0,0335		
200	60,96	0,32092	—0,1110	0,0490		
300	91,44	0,73014	0,2441	0,4041	0,48604	0,32604
400	121,92	1,31595	0,9780	1,1380	0,33795	0,17795
500	152,40	2,10552	1,780	1,940	0,32552	0,16552
600	182,88	3,12432	2,961	3,121	0,16332	0,00332
700	213,36	4,41480	4,413	4,573	0,00180	—0,15820
800	243,84	5,99960	6,150	6,310	—0,15040	—0,31040
900	274,32	7,93249	8,152	8,312	—0,21951	—0,37951
1000	304,80	10,24743	10,431	10,591	—0,18357	—0,34357
1100	335,28	12,93027	12,989	13,149	—0,05873	—0,21873
1200	365,76	15,98052	15,818	15,978	0,16252	0,00252
1300	396,24	19,33739	18,908	19,068	0,42939	0,26939
1400	426,72	22,96545	22,297	22,457	0,66845	0,50845
1500	457,20	26,80293	25,956	26,116	0,84693	0,68693
1600	487,68	30,75927	29,874	30,034	0,88527	0,72527
1700	518,16	34,76372	34,093	34,253	0,67072	0,51072
1800	548,64	38,73138	38,553	38,713	0,17838	0,01838
1900	579,12	42,61131	43,312	43,472	—0,70069	—0,86069
2000	609,60	46,34974	48,341	48,501	—1,99126	—2,15126
1.ª		2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª

La prima colonna contiene le velocità da 30m,48 a 609m,60, la seconda le resistenze sperimentali, la terza le resistenze calcolate con la formola senza il termine noto, la quarta le resistenze calcolate con la formola col termine noto, la quinta e sesta esprimono le differenze delle resistenze sperimentali su quelle ottenute dalle due formole.

Le due ultime colonne ci dimostrano che le due formole danno risultamenti quasi eguali a quelli degli sperimenti posti nella seconda colonna, e l'errore non giunge mai a 3^k; e perciò nelle applicazioni ci possiamo giovare, dell'una e dell'altra formola: ma siccome quella senza termine noto è più semplice, così sarà prescelta per inserirla nei calcoli che andremo a stabilire per render più facile le integrazioni. Il suo uso è da $121^m,92$ fino a $579^m,12$ (=400 fino a 1900 piedi), perocchè la resistenza con la velocità di $609^m,6$ (=2000 piedi) ha bisogno di aumento per qualche errore sfuggito per avventura nell'apprezzare i dati sperimentali.

Finora si è ragionato di un proietto del diametro di $0^m,0508$ (=pol. 2).

Ove poi il proietto fosse del diametro eguale ad a, chiamando r' la sua resistenza, si avrà (§. 57), $(0^m,0508)^2 : a^2 :: r : r' = \frac{a^2}{(0^m,0508)^2} r$.

Sia $a = 0^m,1$, si avrà $r' = \frac{(0,1)^2}{(0,0508)^2} r = 3,875r$, che indica la resistenza su di una sfera del diametro di un decimetro. Se poi il diametro è di a decimetri, la resistenza risulta $r' = 3,875a^2r$.

Indicando r la resistenza dell'aria sulla sfera del diametro di $0^m,0508$ o 0,508 decimetri (=2 pol.), sostituendo nel valore di r' i tre valori di r ritrovati sopra, e togliendo gli apici, si avranno le formole generali

$$0,00008 \times 3,875a^2v^2 = r$$
$$0,000086 \times 3,875a^2v^2 = r$$
$$(0,0001479v^2 - 0,010858v)3,875a^2 = r.$$

Le quali ridotte danno

$$0,00031a^2v^2 = r. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$
$$0,00033a^2v^2 = r. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$
$$(0,0005731v^2 - 0,0420747v)a^2 = r \quad \ldots (14)$$

Nelle quali si deve valutare v in metri, a in decimetri per aver r in kilogrammi. O pure si hanno le equivalenti

$$0{,}031v^2a^2 = r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (15)$$

$$0{,}033v^2a^2 = r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (16)$$

$$(0{,}05731v^2 - 4{,}20747v)a^2 = r \quad . \; . \; . \; . \; (17).$$

In cui si deve valutare in metri a e v, affine di avere r in kilogrammi.

Scrivendo le dette formole sotto forma più generale, le due prime possono essere rappresentate dalla sola

$$mv^2a^2 = r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18),$$

e la seconda da

$$(mv^2 - nv)a^2 = r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (19).$$

Bisogna avvertire che $m = 0{,}00031$, allorchè si prenda v fra 0^m, e 30^m, ed $m = 0{,}00033$, allorchè v si valuta fra 30^m, e $121^m{,}92$ in quanto alla (18); ed $m = 0{,}0005731$ $n = 0{,}0420747$ per la (29), supposto il valore di v fra $121^m{,}92$ e $579^m{,}12$. O pure $m = 0{,}031$, $m = 0{,}033$; e per l'altra $m = 0{,}05731$, $n = 4{,}20747$, quando a si calcola in metri.

(*Fig.16*). Si osservi che le tre equazioni (12. 13. 14.), o le equivalenti, appartengono a tre parabole che passano per la origine delle rispettive coordinate. Per descriverle si conducano gli assi ortogonali Ar, Av. La prima ha per parametro $\frac{1}{0{,}00031a^2}$; in conseguenza potrà descriversi con moto organico, e sia uno dei suoi rami Ax, quale dà le resistenze fino al punto c in cui l'ascissa $Ag = 30^m$ circa.

Prolungando l'ordinata gc in c', e da c condotta co parallela ad Av, con i due assi cc', co, e col parametro $\frac{1}{0{,}00033a^2}$ si segni la curva cy, la cui equazione sarà la (13). Prendendo $aco = 121^m{,}92$, e condotta l'ordinata od, l'arco cd sarà l'arco di resistenza per le velocità da 30^m, a $121^m{,}92$. Infine col parametro $\frac{1}{0{,}0005731a^2}$ si descriva una parabola che passi pel

punto d, l'arco parabolico dz avrà la (14) per equazione. Prendendo bde=ad un valore medio fra $487^m,68$ e $518^m,16$ (=1600 a 1700 piedi), l'arco parabolico della equazione (14) sarà df. Ma f è il punto di flesso della curva, come si è fatto osservare antecedentemente; in conseguenza l'equazione rispondente dovrebbe servire per le resistenze fino al punto f in cui la velocità è $502^m,92$; ma siccome la (14) si presta bene fino alla velocità di $579^m,12$ (=1900 piedi), così senza errore sensibile ne possiamo far uso nei fatti oltre il punto di flesso, per un di più di velocità di $579^m,12-502^m,92=76^m,20$ (=250 piedi); presa dunque $mq=76^m,20$, l'ordinata qz all'arco convesso dovrà di poco differire dall'ordinata qk dell'arco concavo, percui abbiamo creduto superfluo di stabilire un'altra formola; e ciò tanto più che le velocità de'proietti di artiglieria non oltrepassano mai i 1600 piedi, ch'è quella necessaria per incominciare la breccia col pezzo da 24.

Dalla grafica costruzione delle curve si può con moltissima approssimazione stabilire, che la linea di resistenza è la $Acdfz$ composta di tre rami parabolici, gli assi de' quali sono rettangolari e paralleli, e noti i corrispondenti parametri.

Si osserva intanto, che i punti A e c sono i vertici delle prime due parabole descritte. Non è però così per la parabola che passa per d, perciocchè la corrispondente equazione contiene tre termini, ed il punto d è da determinarsi nell'arco parabolico dfz non essendo il vertice.

TEORICA IV.

Coeficiente della resistenza dell'aria.

59. Vogliasi trovare la resistenza, che oppone l'aria ad un proietto di dato diametro.

Sia a il diametro del proietto sferico, R la resistenza che trova traversando l'aria con la velocità v: sia r la resistenza teorica (7.§.50), cioè

$r=\frac{1}{2}\omega\cdot\pi(\frac{1}{2}a)^2\frac{v^2}{2g}$, perciocchè b^2 corrisponde al cerchio massimo

della sfera data : indichiamo con $2k$ tutti i numeri della quarta colonna della Tav. XIII (§.57), cioè il rapporto della resistenza sperimentale alla teorica pel proietto di pol. 2 di diametro, e chiamando R' ed r' le resistenze sperimentali e teoriche di questo ultimo proietto, risulta $2k=\frac{R'}{r'}$.

Poichè (§.50) $r : r' :: a^2 : 2^2$, come pure (11.§.57) $R : R' :: a^2 : 2^2$, perciò $r : r' :: R : R'$, dalla quale $R=\frac{R'}{r'}r=2k\cdot r$; sostituendo per r il suo valore avremo $R=2k\cdot\frac{1}{2}\omega\pi(\frac{1}{2}a)^2.\frac{v^2}{2g}$, ossia

$$R=\tfrac{1}{8}k\omega\pi a^2\cdot\frac{v^2}{g} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20).$$

Esempio. Sia $a=4$ pol $=\frac{1}{3}$ di piede, $v=800$. Nella Tav. XIII a questa velocità corrisponde $2k=1,62$ e $k=0,81$; onde $R=\frac{1}{8}\times 0,81\times\frac{8}{3}\times 3,141\times\frac{1}{9}\times\frac{640000}{32}=$once 831 circa, resistenza che sperimenta il proietto del dato diametro, quando nell' aria ha di velocità 800 piedi. Siffatta resistenza risulta in once, giacchè $\omega=\frac{8}{3}$ di oncia, o vero il peso di un piede cubo di aria alla mezzana temperatura è $\frac{8}{3}$ d' oncia, e $g=32$ piedi inglesi. Se poi a e v fossero dati in metri, ed ω si desse in kilogrammi, per R si avrebbero anche kilogrammi.

Vogliasi notare che $2k$ corrisponde al valore di δ indicato di sopra (§.52), ch' è compreso fra 1 e 2.

60. Chiamando ω',ω le gravità specifiche del proietto e dell' aria, e D ed 1 le densità corrispondenti, M la massa del proietto, e p il peso, avremo (§.51)

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{R}{M}=-\frac{gR}{Mg}=-\frac{gR}{p}=-\frac{gR}{\frac{1}{6}\omega'\pi a^3}$$

Sostituendo per R il suo valore (20.§. 59), risulta $\frac{dv}{dt}=$

$-\frac{\frac{1}{8}k\cdot\omega\cdot\pi a^2\cdot v^2}{\frac{1}{6}\omega'\cdot\pi a^3}=-\frac{3k\omega}{4a\omega'}$ ma $\frac{\omega}{\omega'}=\frac{1}{D}$(§.47),onde $\frac{dv}{dt}=-\frac{3k}{4aD}v^2$:

l'espressione $\frac{4aD}{3k}$ dicesi *coeficiente della resistenza dell'aria*, e fatto $\frac{4aD}{3k}=c$, risulta

$$\frac{dv}{dt}=\varphi=-\frac{R}{M}=-\frac{v^2}{c}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

espressione della forza ritardatrice al moto della sfera, per parte della sola resistenza dell'aria,

61. Si è osservato dalla Tav. XIII che il valore di k varia al variare la velocità del proietto, ma negli usi per k si prende un valor medio fra quelli che risultano da dati limiti di velocità. Così nel tiro delle armi da fuoco le velocità iniziali sono comprese tra 400 e 1800 piedi, pe'tiri di rimbalzo e di breccia, quindi dalla quarta colonna della tavola XIII, ad esempio di Persy, si prendano i rapporti $2k=1,43...2k=1,91....2k=2,06$ in corrispondenza delle velocità di piedi 400...1200... 1800, da ciò si ha $6k=5,40$ e $k=0,9$. Emerge quindi che per l'uso delle armi da fuoco il numero k contenuto in $c=\frac{4aD}{3k}$ si fa eguale a 0,9; ed in tutte l'altre applicazioni della meccanica anche si prende $k=0,9$ purchè le velocità de'corpi sferici siano fra piedi 400 e 1800, pari a metri 122, e 550 circa.

Il valore poi di k per le piccole velocità si determina prendendo $2k=1,20...2k=1,36..2k=1,42$ in rispondenza delle velocità di piedi 5...100...300; si à $6k=3,98$ e $k=0,66$. Percui quando le velocità sono comprese fra zero e 400 piedi il numero k contenuto nel valore $c=\frac{4aD}{3k}$ si fa eguale a 0,66.

Lombard nel valutare il coeficiente della resistenza dell'aria pe' diversi proietti di artiglieria, stabilisce $k=\frac{3}{5}=0,6$ ad esempio di Borda; e Bezut fa $k=\frac{1}{2}=0,5$.

È di bene osservare, ch'essendo (§.60) $\frac{R}{M}=\frac{v^2}{c}$ si à $R=\frac{v^2}{c}M$. Sia h l'altezza dovuta alla velocità data v, si avrà $v^2=2gh$ ed $R=\frac{2h}{c}\cdot Mg=\frac{2h}{c}p$, ciò significa, *la resistenza che sperimenta*

una sfera traversando l' aria è eguale a tante volte il peso del proietto, per quante volte il coeficiente della resistenza dell' aria si contiene nel doppio dell' altezza dovuta alla data velocità.

62. Per facilitare le applicazioni numeriche esponiamo la seguente

TAVOLA XV.

PROIETTI.		DIAMETRI in piedi.	DENSITÀ media.	LOGARITMI di piedi $\frac{4aD}{s}$	DIAMETRI in metri.	LOGARITMI di metri $\frac{4aD}{s}$	LOGARITMI di metri $\frac{4aD}{s \times 0,9}$	LOGARITMI di metri $\frac{1}{\frac{4aD}{s \times 0,9}} \times 0,43429$
Palle da	24	0,45270		3,56640	0,1474	3,07808	3,12384	6,51395
	16	0,39699		3,50841	0,1290	3,02009	3,06585	6,57193
	12	0,36053		3,46658	0,1171	2,97826	3,02402	6,61376
	8	0,31539	6091,1	3,40848	0,1025	2,92016	2,96592	6,67186
	6	0,28588		3,36582	0,0929	2,87750	2,92326	6,71452
	4	0,25000		3,30757	0,0812	2,81929	2,85505	6,78273
Bombe e granate da	12	0,98611	3627,7	3,67250	0,3203	3,18418	3,22994	6,40783
	10	0,83333	4087,6	3,65122	0,2707	3,16290	3,20866	6,42912
	8	0,67708	3302,0	3,46772	0,2199	2,97940	3,02516	6,61262
	6	0,50000	4452,7	3,46753	0,1624	2,97921	3,02497	6,61281
	24	0,45949	3471,4	3,32767	0,1493	2,83935	2,88511	6,75267
Palle di 12, 18, 20 alla libbra.	12	0,05845		2,88607	0,0190	2,39265	2,43841	7,19937
	18	0,05093	9755,1	2,82111	0,0165	2,33279	2,37855	7,25924
	20	0,04917		2,80604	0,0160	2,31772	2,36348	7,27430
Globo del Provetto		0,5833	7010,	3,73656	0,18949	3,24827	3,42863	6,20911
1.ª		2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª

Le prime 3 colonne di questa tavola sono prese da Lombard (Q).

(Q) Lombard. Moto de' proietti §. 133 tav. VI.

La colonna 5.ª esprime i valori de' diametri in metri. La 4.ª con la 6.ª indica i logarittimi de'valori di $\frac{4aD}{3}$ presi in piedi, ed in metri. La 8.ª i logaritmi di $\frac{1}{c}$ $\log e = \frac{1}{\frac{4aD}{3 \times 0,9}} \times 0,43429$. Siffatta colonna è indispensabile, come vedremo, per tutti i casi che si presentano nelle applicazioni.

Si noti che $e = 2,718281828$ è la base dei logaritmi iperbolici, e $\frac{1}{0,43429448} = 2,30258$ ..... è il modulo de' logaritmi iperbolici rispetto al sistema de' logaritmi Brigiani: ovvero moltiplicando i logaritmi Brigiani per 2, 30258 si hanno i logaritmi iperbolici, e viceversa dividendo i logaritmi iperbolici per 2,30258, ovvero moltiplicandoli per 0,43429.... si hanno i logaritmi Brigiani. Il numero 2,30258 è il logaritmo iperbolico di 10, e il numero 0,43429 è il logaritmo Brigiano di e.

TEORICA V.

Moto della sfera nell' aria senza tener conto della gravità.

63. Supponiamo che una sfera del diametro a e della densità D traversi l'aria in linea retta colla velocità iniziale V, cioè si suppone la gravità eguale a zero, come avverrebbe se il moto si eseguisse su di un piano orizzontale: si domandano le circostanze del moto.

Essendo $\frac{dv}{dt} = -\frac{v^2}{c}$ (§. 60), e $v = \frac{dx}{dt}$ o $vdt = dx$ per ogni maniera di moto, sarà, moltiplicando in ordine, a fine di eliminare il tempo,

$$vdv = -\frac{v^2}{c} dx,$$

dalla quale $dx = -c \cdot \frac{dv}{v}$: integrando

$$x = -c \log.\text{ip}\, v + C:$$

quando $x=0$ la velocità residua v diventa V, onde

$$C=c\log.\text{ip}\,V,$$

e perciò l'integrale particolare sarà

$$x=c(\log\text{ip}\,V-\log.\text{ip}\,v)=c\log.\text{ip}\,\frac{V}{v};\ \text{infine}$$

$$x=2{,}30258\,c\cdot\log.\frac{V}{v}\ldots\ldots\ldots(22).$$

Da $\frac{dv}{dt}=-\frac{v^2}{c}$ si ha $dt=-c\frac{dv}{v^2}$: integrando è $t=\frac{c}{v}+C'$; ma quando $t=0$ è $v=V$, onde $C'=-\frac{c}{V}$, e l'integrale particolare verrà

$$t=c\left(\frac{V-v}{Vv}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots(23).$$

Dalla (22) risulta $\frac{x}{c}=\log.\text{ip}\frac{V}{v}$, e $e^{\frac{x}{c}}=\frac{V}{v}$ da cui

$$v=\frac{V}{v^{\frac{x}{c}}}\ldots\ldots\ldots\ldots(24).$$

In quanto a k che fa parte di c gli esempi numerici ne stabiliranno il valore.

64. Esempio 1.° Sia $V=120^m$, $v=100^m$ sarà

$$x=2{,}30258\,c\cdot\log.\frac{120}{100}$$

$$t=c\left(\frac{120-100}{120\cdot100}\right).$$

Nell'eseguire i calcoli bisogna in $c=\frac{4aD}{3k}$ fare $k=0{,}66$ (§.61), perciocchè le date velocità sono minori di 122^m.

Esempio 2.° Sia $V=300^m$, e $v=200^m$: le due formole diventano

$$x=2{,}30258\,c\cdot\log.\frac{300}{200}$$

$$t=c\left(\frac{300-200}{300\cdot200}\right):$$

e perchè le date velocità sono comprese fra i limiti 122^m e 550^m (§.61), perciò bisogna nel valore di c fare $k=0,9$, dopo di ciò si valuteranno x e t.

Esempio 3.° Sia $V=300^m$, e $v=50^m$.

Nelle formole (22.23) bisogna sostituire per V 300^m e supporre $v=122^m$, e perchè tali velocità sono comprese fra 122^m e 550^m così il k prende il valore di 0,9: con ciò chiamando A e B i valori che danno dette formole, risulta

$$A=2,30258c\cdot\log\cdot\frac{300}{122}$$

$$B=c\left(\frac{300-122}{300\cdot122}\right).$$

Questo è un calcolo intermedio per giungere ai valori veri dello spazio, e del tempo che si domanda.

Nelle formole generali poi, conviene fare $V=122^m$ e $v=50^m$, e quindi $k=0,66$ (§.61): chiamando A' e B' i valori che risultano con siffatti dati verrà

$$A'=2,30258c\cdot\log\cdot\frac{122}{50}$$

$$B'=c\left(\frac{122-50}{122\cdot50}\right).$$

E poichè A ed A' sono gli spazi compresi fra le velocità 300^m e 122^m, e fra le velocità 122^m e 50^m, perciò $x=A+A'$ sarà lo spazio che si domanda. Come pure $t=B+B'$ sarà il tempo corrispondente.

Da ciò si comprende, che nel terzo esempio la doppia soluzione delle due formole generali nasce da che fra le due date velocità 300^m e 50^m cade il limite 122^m, ciò vuol dire che il calcolo intermedio dovrà eseguirsi tutte le volte che il limite 122^m di velocità si comprende fra la velocità iniziale e la velocità residua data.

Esempio 4.° Sia $x=2000^m$, $V=400^m$ si domanda v.

In questo esempio se v dovesse risultare maggiore del limi-

te 122^m, k dovrebbe prendere il valore 0,9: se poi v dovesse risultare minore di 122^m allora dovrebbe farsi il calcolo intermedio. In questo dubbio conviene seguire il metodo qui appresso.

Nella formola $v = \frac{V}{e^{\frac{x}{c}}}$ facendo $V = 400^m$, e supponendo $v = 122^m$ si ricava il valore di x con $k = 0,9$: se questo ottenuto valore emerge maggiore di 2000^m è segno che la velocità residua, che si cerca, dovrà essere maggiore di 122^m, e quindi per rinvenirla bisogna risolvere, senza calcolo intermedio, la sola equazione

$$v = \frac{400}{e^{\frac{2000}{c}}}$$

con fare $k = 0,9$.

Se poi facendo $V = 400^m$ e supponendo $v = 122^m$, per x si abbia un valore minore di 2000^m, segno è questo che la velocità residua che si cerca, dovrà risultare minore di 122^m, quindi avrà luogo il calcolo intermedio.

In conseguenza nella formola $v = \frac{V}{e^{\frac{x}{c}}}$ si faccia $V = 400^m$, $v = 122^m$ $k = 0,9$, e si ricava il valore dello spazio che indico con A: indi si prende $2000^m - A$, che indico con B, e la velocità residua che si cerca, si valuterà colla formola

$$v = \frac{400^m}{e^{\frac{B}{c}}}$$

con $k = 0,66$.

Le nozioni indicate ne' quattro esempi esposti, possono valere come guida in tutti i casi simili per avere una regola sicura sul valore da darsi a k.

TEORICA VI.

Moto verticale della sfera nell'aria nel verso della gravità, e velocità completa.

65. Nella discesa verticale della sfera nell'aria la forza di gravità accelera il moto, e la resistenza dell'aria lo ritarda, percui la forza acceleratrice sarà $g-\frac{v^2}{c}$ (§.60), e perciò

$$\frac{dv}{dt}=g-\frac{v^2}{c}=\frac{1}{c}(gc-v^2)\ldots.(a)$$

ma $vdt=dx$, quindi moltiplicando in ordine si ha $vdv=\frac{1}{c}(gc-v^2)\,dx$, e $dx=c\cdot\frac{vdv}{gc-v^2}=-\frac{1}{2}c\cdot\frac{-2vdv}{gc-v^2}$: integrando si ha

$$x=-\tfrac{1}{2}c\log.\mathrm{ip}(gc-v^2)+C.\ \ldots\ldots\ (b).$$

Si determina la costante con mettere la ipotesi che il corpo parta dalla quiete, con ciò $x=0$ dà $v=0$, onde $C=\frac{1}{2}c\log.\mathrm{ip}\,gc$, ed

$$x=2{,}30258\cdot\tfrac{1}{2}c\log\cdot\frac{gc}{gc-v^2}\ldots\ldots\ (25).$$

Dalla equazione (a) si ottiene

$dt=c\cdot\frac{dv}{gc-v^2}=c\cdot\frac{dv}{(\sqrt{gc}+v)(\sqrt{gc}-v)}$. Applicando la regola dei coeficienti indeterminati, cioè facendo $\frac{1}{(\sqrt{gc}+v)(\sqrt{gc}-v)}=\frac{A}{\sqrt{gc}+v}+\frac{B}{\sqrt{gc}-v}$, si ritrae $A=B=\frac{1}{2\sqrt{gc}}$; in conseguenza $dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{g}}\left(\frac{dv}{\sqrt{gc}+v}+\frac{dv}{\sqrt{gc}-v}\right)$. Integrando si ha in fine

$$t=2{,}30258\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{g}}\log\cdot\frac{\sqrt{gc}+v}{\sqrt{gc}-v}\ldots\ldots\ (26).$$

La costante va zero quando si determina colla condizione di $t=0$, e $v=0$.

66. Le Formole (25.26) sono applicabili quando la velocità residua data non ecceda i 122^m.

Esempio 1.° Sia $v=100^m$, avremo

$$x=2,30258\cdot\tfrac{1}{2}c\cdot\log\cdot\frac{gc}{gc-100^2}$$

$$t=2,30258\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{g}}\log\frac{\sqrt{gc}+100}{\sqrt{gc}-100}:$$

nell' eseguire i calcoli bisogna fare $k=0,66$ (§.61).

Se fosse $v=122^m$ si avrebbe, chiamando H e T lo spazio ed il tempo corrisponde,

$$H=2,30258\cdot\tfrac{1}{2}c\cdot\log\cdot\frac{gc}{gc-122^2}$$

$$T=2,30258\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{g}}\log\frac{\sqrt{gc}+122}{\sqrt{gc}-122}.$$

67. Se la velocità residua data fosse maggiore del limite 122^m la formola (a.§.65) andrebbe risoluta diversamente, cioè a dire la costante dovrebbe determinarsi con altra condizione.

Esempio 2.° Sia $v=300^m$, la velocità residua.

Nella formola (b) si determina la costante con la condizione che quando $v=122^m$ il valore di x sia indicato da H, il quale si determina colla formola (25.§.65) facendo $k=0,66$: con ciò $C=H+\frac{1}{2}c\log.\text{ip}.(gc-122^2)$, in ultimo verrà

$$x=H+2,30258\cdot\tfrac{1}{2}c\log\frac{gc-122^2}{gc-v^2}\quad\ldots\ldots\quad(27).$$

68. Similmente pel tempo riprendiamo la formola

$$t=2,30258\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{g}}\cdot\log\frac{\sqrt{gc+v}}{\sqrt{gc-v}}+C',$$

e sia $t=T$ quando $v=122^m$, adunque

$$T=2,30258.\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{g}}\cdot\log\frac{\sqrt{gc}+122}{\sqrt{gc}-122}+C',\text{ e}$$

$$t=T+2,30258\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{g}}\cdot\log\frac{(\sqrt{gc}+v)(\sqrt{gc}-122)}{(\sqrt{gc}-v)(\sqrt{gc}+122)}\ldots(28)$$

Il valore di T si ricava dalla formola (26) supponendo $v=122^m$, e facendo $k=0,66$.

In conchiusione, quando la velocità residua è data minore di 122^m le formole (25.26) danno x e t facendo $k=0,66$. Quando poi è data maggiore di 122^m, x e t si ricavano dalle formole (27.28) prendendo $k=0,9$, dopo aver fatti i calcoli intermedii per la ricerca di H e T.

69. I valori di x,t aumentano all'aumentare di v, come si appalesa dalle formole antecedenti (§§.65.67.68), e risultano infiniti facendo $v=\sqrt{gc}$.

Potrà quindi ritrarsi, *che cadendo una sfera nell'aria la velocità residua va sempre crescendo, a misura che si scosta dal punto di partenza, ed alla fine di uno spazio e di un tempo infinito diventa costante*, la quale prende il nome di *velocità completa* o *finale*, secondo Mariotte.

Ciò posto, essendo $\frac{dv}{dt}=-\frac{R}{M}=-\frac{v^2}{c}$ (§. 60) risulta $\frac{R}{M}=\frac{v^2}{c}$:

facendo R eguale al peso p del grave; si ha

$$\frac{p}{M}=g=\frac{v^2}{c}, \text{ e } v=\sqrt{gc}.$$

Si può da ciò dichiarare, *ad una distanza infinita dal punto di partenza la resistenza dell' aria pareggia il peso della sfera che la traversa, e la velocità finale sarà costante, ed un massimo.*

TEORICA VII.

Moto della sfera nell'aria in verso contrario della gravità.

70. Sia spinta in alto una sfera colla velocità iniziale V; è chiaro che tanto la gravità, quanto l'aria ne ritarderanno il moto, per cui la forza ritardatrice totale dovrà essere eguale alla forza di gravità, ed a quella della resistenza dell'aria, prese entrambe

negativamente (§§.51.60), per la qual cosa $\frac{dv}{dt}=-g-\frac{v^2}{c}$

e $\frac{dv}{dt}=-\frac{1}{c}(gc+v^2)$ ... (a); ma $vdt=dx$, dunque

$$dx=-c\frac{vdv}{gc+v^2}=-\tfrac{1}{2}c\frac{2vdv}{gc+v^2}\text{; integrando,}$$

$$x=-\tfrac{1}{2}c\log.\text{ip}(gc+v^2)+C\text{;}$$

al principio del moto $v=V$ ed $x=0$, e

$$C=\tfrac{1}{2}c\log.\text{ip}(gc+V^2)\text{, onde}$$

$$x=2{,}30258\,\tfrac{1}{2}c\log\frac{gc+V^2}{gc+v^2}\text{. . . . . (29).}$$

Dalla equazione (a) si ottiene

$$dt=-c\frac{dv}{gc+v^2}=-c\frac{\frac{dv}{gc}}{1+\frac{v^2}{gc}}=-c\cdot\frac{1}{\sqrt{gc}}\frac{d\cdot\frac{v}{\sqrt{gc}}}{1+\frac{v^2}{gc}}=-\sqrt{\frac{c}{g}}\frac{d\frac{v}{\sqrt{gc}}}{1+\frac{v^2}{gc}}\text{,}$$

integrando si ha

$$t=-\sqrt{\frac{c}{g}}ar\left(\tan=\frac{v}{\sqrt{gc}}\right)+C\text{:}$$

al principiò del moto $t=0$, e $v=V$, dunque

$$C=\sqrt{\frac{c}{g}}ar\left(\tan=\frac{V}{\sqrt{gc}}\right)\text{, e}$$

$$t=\sqrt{\frac{c}{g}}\left[ar\left(\tan=\frac{V}{\sqrt{gc}}\right)-ar\left(\tan=\frac{v}{\sqrt{gc}}\right)\right]\text{. (30).}$$

71. Quando ciascuna delle velocità V e v sia data non maggiore di 122^m le formole (29.30) risolveranno i due problemi dello spazio e del tempo, facendo però $k=0{,}66$ (§.61). Quando sono date tutte e due maggiori di 122^m le stesse formole risolveranno i quesiti prendendo $k=0{,}9$ (§.61).

Infine se V fosse maggiore di 122^m e v minore; per esempio $V=400^m$ e $v=100^m$, bisognerà fare il calcolo intermedio (§.64).

Infatti posto nelle formole (29.30) $V=400^m$ assumendo $v=122^m$ e $k=0{,}9$, si troveranno i valori A, e B per lo spazio e pel

tempo. Inoltre supponendo $V=122^m$, facendo $v=100^m$ e $k=0,66$, le formole medesime daranno due altri valori A', B', quindi lo spazio ed il tempo addimandato verranno $A+A'$, e $B+B'$.

72. Per avere la totale ascensione X, ed il corrispondente tempo T nel caso di V non maggiore di 122^m, si dovrà fare nelle due formole (29.30) $k=0,66$, e $v=0$, verrà

$$X=2,30258.\tfrac{1}{2}c\cdot\log\frac{gc+V^2}{gc}\ldots\ldots\ldots(31).$$

$$T=\sqrt{\frac{c}{g}}\,ar\left(\tan=\frac{V}{\sqrt{cg}}\right)\ldots\ldots\ldots(32).$$

73. Nel caso di $V=400^m$, l'ascensione ed il tempo totale si otterranno col calcolo intermedio, cioè si risolvono le formole (29.30) come sopra per rinvenire A,B; inseguito nelle formole (31.32) supponendo $V=122^m$ si otterranno due valori A',B', i quali uniti con A,B daranno $A+A'$, e $B+B'$ per l'ascensione ed il tempo totale.

TEORICA VIII.

Decrescenza della densità atmosferica.

74. Poniamo che sopra una base, presa come unità di superficie, prema una colonna di aria dell'altezza x. È chiaro che l'analogo sforzo sarà misurato dal peso p di detta colonna; o in altri termini, la pressione atmosferica sulla superficie equivale all'effetto della forza elastica dell'aria. Supponiamo ora l'atmosfera divisa in infiniti strati, de' quali abbia ciascuno l'altezza dx: e sia D' la densità di uno strato, il cui peso sarà $dp=gD'\cdot dx$. E siccome crescendo l'altezza diminuisce la pressione, così la formola da stabilirsi verrà

$$dp=-gD'\cdot dx\,,\ \text{e}\ dx=-\frac{1}{g}\cdot\frac{dp}{D'}.$$

Integrando e valutando g costante, che per tale puossi considerare, senza errore sensibile, la gravità de'corpi per le altezze che si calcolano negli usi, si ha $x = -\frac{1}{g}\int\frac{dp}{D'}$.

Primieramente supponiamo la temperatura esser costante per tutta la colonna atmosferica: e sia ε la pressione sull'unità di densità. E poichè a temperature eguali la forza elastica dell'aria è proporzionale alla sua densità, e questa forza stessa è proporzionale altresì ai pesi di cui l'aria è gravata, avremo che $1 : D' :: \varepsilon : p = \varepsilon D'$, e $dp = \varepsilon dD'$, dunque

$$x = -\frac{1}{g}\int\frac{dp}{D'} = -\frac{\varepsilon}{g}\int\frac{dD'}{D'} = -\frac{\varepsilon}{g}\log.\text{ip}\, D' + C\,;$$

quando $x=0$ il D' si cambia in D, che rappresenta la densità dell'aria ove si cominciano a valutare le altezze; percui l'integrale diventa $x = 2{,}30258\frac{\varepsilon}{g}\log\frac{D}{D'}$. Esprimendo con h, h' le altezze barometriche, le quali dinotano le colonne comprimenti, verrà $\frac{h}{h'} = \frac{D}{D'}$; quindi $x = 2{,}30258\,\frac{\varepsilon}{g}\log\,\frac{h}{h'}$.

Così pure $x' = 2{,}30258\frac{\varepsilon}{g}\log\frac{H}{H'}$, da cui $x : x' :: \log\frac{h}{h'} : \log\frac{H}{H'}$.

Se $h = H$, si verrà a considerare il caso in cui le altezze cominciano a valutarsi dallo stesso punto di partenza; dunque $x : x' :: \log h - \log h' : \log h - \log H'$; cioè *le altezze che si considerano da uno stesso punto sono proporzionali alle differenze logaritmiche delle altezze barometriche, valutate agli estremi delle dette colonne, supponendo per altro che sia costante in tutti i siti la temperatura dell'aria.*

75. Gli sperimenti più accurati han dimostrato (T)

1.° *A livello del mare ed alla temperatura zero l'altezza che segna il barometro è di* $0^{m},760$.

(T) Venturoli. Meccanica §. 90. Secondo volume.

2.° *Prendendo per unità di densità quella dell'aria al grado zero, l'altra del mercurio verrà* 10485.

3.° *Per ogni elevazione di* $10^m,485$ *l'altezza del mercurio nel barometro decresce per* $0^m,001$.

Ciò posto possiamo secondo l'antecedente paragrafo stabilire la proporzione $x : 10^m,485 :: \log\frac{h}{h'} : \log\frac{760}{759}$, ed

$x = \frac{10,485}{0,0005718164} \log\frac{h}{h'} = 18336^m \log\frac{h}{h'}$ per l'altezza x atmosferica supponendo zero il grado di calore.

Allorquando la temperatura non è, nè costante, nè zero, si prenda la media aritmetica fra le due osservate al principio ed alla fine dell'altezza x. E poichè l'aria secca, secondo *Gay-Lussac*, dilata di 0,000375 il suo volume per ogni grado del termometro centigrado, tenendo conto della umidità, detta dilatazione si riduce a $\frac{1}{250}$.

Esprimendo con θ, θ' i gradi del termometro agli estremi dell'altezza x, l'aumento nel volume dell'aria sarà $\frac{\theta+\theta'}{500}$; e perciò quella colonna di aria che a livello del mare ed alla temperatura zero, è di metri 10,485, alla temperatura $\frac{\theta+\theta'}{2}$ sarà metri $10,485 + \frac{\theta+\theta'}{500} \times 10^m,485$: onde la proporzione anzidetta diventa $x : 10^m,485 + \frac{\theta+\theta'}{500} \times 10^m,485 :: \log\frac{h}{h'} : \log\frac{760}{759}$,

ed $x = 10^m,485 \left(1 + \frac{\theta+\theta'}{500}\right) \frac{1}{0,0005718164} \log\frac{h}{h'}$, infine

$$x = 18336^m \left(1 + \frac{\theta+\theta'}{500}\right) \log\frac{D}{D'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33).$$

Volendosi ottenere con più precisione il valore di x, esponiamo la seguente tavola (U).

(U) Prony. Architettura Idraulica.

TAVOLA XVI.

Dilatazioni dell'aria per ogni grado del termometro di Réaumur.

Gradi.	Dilatazioni.	Gradi.	Dilatazioni.	Gradi.	Dilatazioni.
0	1,0000	11	1,0354	22	1,0909
1	1,0026	12	1,0395	23	1,0973
2	1,0053	13	1,0439	24	1,1040
3	1,0082	14	1,0482	25	1,1109
4	1,0111	15	1,0528	26	1,1181
5	1,0143	16	1,0576	27	1,1256
6	1,0174	17	1,0626	28	1,1334
7	1,0207	18	1,0678	29	1,1416
8	1.0243	19	1,0739	30	1,1496
9	1,0279	20	1,0789	31	1,1589
10	1,0315	21	1,0848	32	1,1681

Le colonne 1.ª 3.ª 5.ª indicano i gradi del termometro di Réaumur; al grado zero la dilatazione è indicata dall'unità. Le colonne 2.ª 4.ª 6.ª esprimono le dilatazioni per i gradi di aumento nella temperatura.

Ora chiamando ω una dilatazione qualunque di quelle che sono inserite nella tavola, nella formola ultima per $1 + \frac{\theta+\theta'}{500}$ si può sostituire ω, e verrà

$$\varpi = 18336^{m}\omega \log \frac{D}{D'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (34).$$

76. Per avere una formola scevra di logaritmi, bisogna osservare, che per le serie si ha

$$\frac{D}{D'} = 10^{\log.\frac{D}{D'}} = 1 + \frac{\log \frac{D}{D'}}{1.\log e} + \frac{\left(\log \frac{D}{D'}\right)^2}{2\cdot(\log e)^2} + \frac{\left(\log \frac{D}{D'}\right)^3}{2.3(\log e)^3} + \text{ec: in cui}$$

$\log e = 0,43429$, modulo de' logaritmi naturali.

Inoltre eseguendo la divisione, si ottiene

$$\frac{\log e+\frac{1}{2}\log\frac{D}{D'}}{\log e-\frac{1}{2}\log\frac{D}{D'}}=1+\frac{\log\frac{D}{D'}}{1\cdot\log e}+\frac{\left(\log\frac{D}{D'}\right)^2}{2\cdot(\log e)^2}+\frac{\log\left(\frac{D}{D'}\right)^3}{4.(\log e)^3}+\text{ec.}$$

Di più si esamini la tavola seguente (V).

TAVOLA XVII.

Decrescenze barometriche.

Pollici.	Tese.	Pollici.	Tese.
28,2	000	19	1710
27	184	18	1945
26	348	17	2195
25	512	16	2456
24	695	15	2736
23	880	14	3036
22	1073	13	3332
21	1275	12	3679
20	1487		

In questa tavola i numeri delle colonne 1.ª e 3.ª sono le altezze barometriche in pollici: i numeri della 2.ª e 4.ª sono le altezze corrispondenti, a contare dal livello del mare; e si deduce da questa tavola che il rapporto $\frac{h}{h'}=\frac{D}{D'}$, ne' limiti delle altezze da zero a tese 3679, dove non ha più luogo la respirazione, ed alla quale non giungono mai i proietti, è $\frac{D}{D'}=\frac{h}{h'}=\frac{28,2}{12}=2,35$; e $\log 2,35=0,36922$.

Quindi si conchiude che le due serie nelle applicazioni, per l'artiglieria e per tutt'altri sperimenti, sono di rapida convergenza. E perchè esse hanno i tre primi termini rispettivamente

(V) Secondo Deluc.

eguali, e gli altri di pochissimo differiscono, possiamo senza errore sensibile stabilire

$$10^{\log\frac{D}{D'}}=\frac{\log e+\frac{1}{2}\log\frac{D}{D'}}{\log e-\frac{1}{2}\log\frac{D}{D'}}\text{; ma }\frac{D}{D'}=10^{\log\frac{D}{D'}}\text{; quindi}$$

$$\frac{D}{D'}=\frac{\log e+\frac{1}{2}\log\frac{D}{D'}}{\log e-\frac{1}{2}\log\frac{D}{D'}}=\frac{\log e+\frac{x}{2\times 18336\omega}}{\log e-\frac{x}{2\times 18336\omega}}=\frac{36672\omega\log e+x}{36672\omega\log e-x}\text{, e}$$

$$D'=D.\frac{36672\omega\log e-x}{36672\omega\log e+x}.$$

Sia il grado medio di calore 10 di Réaumur, sarà per la Tavola XVI $\omega=1,0315$; e siccome le densità ad egual massa sono nella ragione inversa de' volumi, così $1:D::1,0315:1$, $D=\frac{1}{\omega}=\frac{10000}{10315}=0,969$, ch'è la densità dell'aria a 10° di calore, allorchè si prenda per unità di densità quella dell'aria al grado zero di calore, perciò

$$D'=\frac{36672\times 1,0315\times 0,43429-x}{36672\times 1,0315\times 0,43429+x}.$$

Indicando con k, $36672^{m}\omega\log e$, avremo generalmente

$$\frac{D'}{D}=\frac{k-x}{k+x}\text{. . . . . (35).}$$

Esempio. È $k=36672^{m}\omega\log e$: a 10° si ha $\omega=1,0315$, quindi

log 36672.....4,56431
log 1,0315.....0,01368
log.0,43429.....9,63779

log k.....4,21578

$k=16430^{m}$ circa, e perciò

$\frac{D'}{D}=\frac{16430-x}{16430+x}$. Se fosse $x=200^{m}$, verrebbe $\frac{D'}{D}=\frac{16230}{16630}=\frac{1623}{1663}=0,9759$, espressione che senza errore sensibile è eguale

all' unità : dunque D , D' hanno quasi lo stesso valore , cioè dall' altezza zero a 200^m in 250^m la densità aerea può considerarsi uniforme senza sensibili variazioni. L' aver supposto 10 il grado di calore significa , che a livello del mare si è ottenuto col termometro un numero di gradi , che sommati con quelli presi all' altezza di 200^m in 250^m , hanno dato 20° , la cui metà è 10°.

Nel logaritmo di $\frac{D}{D'}$ formola (33.§.75) ,posto per D' zero , si ha $x = \infty$; cioè l'altezza atmosferica è infinita. Intanto gli Astronomi per valutare l' altezza dell' atmosfera fino al punto in cui diventa sensibile ai raggi solari , si giovano del cominciamento del crepuscolo matutino, o del finire di quello della sera ; e suppongono in conformità delle osservazioni , ch' esso cominci o finisca allorchè il Sole si trova 18° sotto l' orizzonte. Dal qual sito la luce vien riflessa dall' aria verso la Terra , di maniera che il raggio visuale è parallelo all' orizzonte. Da tale osservazione e dalla legge dell' angolo d' incidenza eguale a quello di riflessione , si conchiude con Keil , che la distanza dall' aria sensibile a segno da riflettere la luce , è non minore di 58470^m ($=30000$ tese circa) , nè maggiore di 79960^m ($=$ 40000 tese circa). I quali risultamenti concordi sono a quelli di Mariotte.

Daniele Bernoulli stabilisce la formola $\frac{18^m,98}{18^m,98+H}$ per calcolare la densità dell' aria all' altezza H , supponendola eguale all' unità alla superficie della terra , come appunto la formola lo dimostra facendo $H=0$.

TEORICA IX.

Resistenza avuto riguardo alla decrescenza della densità dell'aria.

77. Sia x una retta verticale che parte dalla superficie della Terra, e siano D, D' le densità dell'aria al principio ed alla fine di questa verticale: supponiamo che una sfera abbia al principio di x una velocità la cui resistenza sia espressa da r, se poi la medesima sfera avesse alla fine di x la stessa velocità, la resistenza dovrà cambiare con la densità, e la dinotiamo con r'.

Ora per quello detto antecedentemente (6.§.49) è lieve conchiudere che

$$D : D' :: r : r' = r \cdot \frac{D'}{D}.$$

Sostituendo per $\frac{D'}{D}$ il suo valore (33.§.76) si ha

$$r' = \frac{k-x}{k+x} r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35).$$

Prendendo sulla verticale una retta costante b ad arbitrio maggiore di x a partire dalla superficie della terra, e facendo $b - x = x'$, e perciò $x = b - x'$, risulta $r' = r \frac{k-b+x'}{k+b-x'}$, e togliendo gli apici si ha

$$r' = \frac{k-b+x}{k+b-x} r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36).$$

Nella prima di queste due formole le x si valutano dal basso in alto, e nella seconda dall'alto in basso partendo dal punto fisso nell'aria distante per b. In entrambe poi sostituendo per r le resistenze calcolate come sopra alla superficie della Terra (20.§.59) si troverà per r' un valore, dandosi x.

TEORICA X.

Moto verticale della sfera nel verso della gravità, avuto riguardo alla decrescenza della densità dell'aria.

78. Allorchè una sfera cada dal punto distante dalla superficie terreste per b, giunta alla distanza x acquisti alla fine del tempo t la velocità v, e sperimenti una resistenza r' per parte dell'aria, la forza motrice sarà $p-r'$, e quindi l'acceleratrice sarà (§.51)

$$\frac{dv}{dt}=\frac{p-r'}{M}=g-\frac{r'}{M}:$$

posto per r' il suo valore (36.§.77), verrà

$$\frac{dv}{dt}=g-\frac{k-b+x}{k+b-x}\frac{r}{M},\text{ e perchè }\frac{r}{M}=\frac{v^2}{c}\text{ (21.§.60), perciò}$$

$$\frac{dv}{dt}=g-\frac{k-b+x}{k+b-x}\cdot\frac{v^2}{c}.$$

E siccome ne' limiti segnati ne' nostri sperimenti l'espressione $\frac{k-b+x}{k+b-x}$ è senza errore sensibile eguale all'unità, atteso il gran valore di k (§.76), così avremo

$$\frac{dv}{dt}=\frac{k-b+x}{k+b-x}\left(g-\frac{v^2}{c}\right)=\frac{k-b+x}{k+b-x}\cdot\frac{1}{c}(gc-v^2)$$

ma $vdt=dx$, moltiplicando in ordine viene

$$vdv=\frac{k-b+x}{k+b-x}dx\cdot\frac{1}{c}(gc-v^2),\text{ e}$$

$$\frac{k-b+x}{k+b-x}dx=-\tfrac{1}{2}c\cdot\frac{-2vdv}{gc-v^2}.$$

Eseguendo la divisione nel coeficiente di dx si ha

$$-dx+\frac{2k}{k+b-x}dx=-\tfrac{1}{2}c\cdot\frac{-2vdv}{gc-v^2}:$$

integrando

$$-x-2k\log.\mathrm{ip}(k+b-x)=-\tfrac{1}{2}c\log.\mathrm{ip}\,(gc-v^2)+C,$$

e facendo $x=0$ quando $v=0$, si ottiene

$$-2k\log\ \mathrm{ip}(k+b)=-\tfrac{1}{2}c\log.\mathrm{ip}\,gc+C\,,$$

sottraendo l'una dall'altra, e riducendo è

$$-x+2k\log.\mathrm{ip}\,\frac{k+b}{k+b-x}=\tfrac{1}{2}\,c\log.\mathrm{ip}\,\frac{gc}{gc-v^2}\,.$$

Essendo il secondo membro il valore di x della formola (25.§.65) lo indichiamo con A, perciò

$$-x+2k\cdot\log.\mathrm{ip}\,\frac{k+b}{k+b-x}=A\ .\ .\ .\ .\ .\ (c)$$

Si faccia $k+b-x=z$, verrà $k+b=z+x$, in conseguenza

$$\log.\mathrm{ip}\,\frac{k+b}{k+b-x}=\log.\mathrm{ip}\left(1+\frac{x}{z}\right):\ \text{ma}$$

$\log.\ \mathrm{ip}\left(1+\frac{x}{z}\right)=\frac{x}{z}-\frac{x^2}{2z^2}+\frac{x^3}{2.3z^3}-$ec., ed eseguendo la divisione di

$$\frac{2x}{2z+x}=\frac{x}{z}-\frac{x^2}{2z^2}+\frac{x^3}{4z^3}-\text{ec.}$$

Si conchiude come sopra (§.76) che queste due serie sono di rapidissima convergenza, ed essendo eguali i primi due termini si può fare prossimamente $\log.\mathrm{ip}\left(1+\frac{x}{z}\right)=\frac{2x}{2z+x}=\frac{2x}{2(k+b)-x}$, con ciò l'equazione ($c$) diventa

$-x+2k.\frac{2x}{2(k+b)-x}=A$: e riducendo avrassi $\frac{2(k-b)+x}{2(k+b)-x}x=A$.

Si noti che ponendo tanto nel numeratore, quanto nel denominatore per x A la differenza non influisce sensibilmente sul rapporto, per questa ragione si può fare

$$\frac{2(k-b)-A}{2(k+b)+A}x=A,\ \text{infine}$$

$$x=\frac{2(k+b)+A}{2(k-b)-A}\cdot A.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (37).$$

Equazione che risolve il quesito di trovare l'altezza x quando è data la velocità residua v contenuta in A.

Negli esempii numerici bisogna calcolare prima A, tenendo presente le avvertenze di sopra (§.67), e poscia questa ultima formola darà il valore della distanza x valutata dal punto fisso stabilito colla distanza b assegnata.

Per avere il tempo riprendiamo l'equazione

$$\frac{dv}{dt}=\frac{k-b+A}{k+b-A}\cdot\frac{1}{c}(gc-v^2);$$

dalla quale

$$dt=\frac{k+b-A}{k-b+A}\cdot\frac{cdv}{gc-v^2}.$$

Integrando

$$t=\frac{k+b-A}{k-b+A}c\int\frac{dv}{gc-v^2}:$$

ma $c\int\frac{dv}{gc-v^2}$ è il valore di t della formola di sopra (26.§.65), che indichiamo con B, donde

$$t=\frac{k+b-A}{k-b+A}B \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (38).$$

Valore del tempo in funzione della velocità residua contenuta in A ed in B.

Queste due ultime formole sono state rinvenute anche da Hutton con altro metodo.

TEORICA XI.

Moto verticale della sfera nel verso contrario della gravità, avuto riguardo alla decrescenza della densità dell'aria.

79. Supponiamo ora che la sfera sia spinta in alto verticalmente con una velocità iniziale V: si vogliono determinare lo spazio, ed il tempo in funzione della velocità residua.

Ragionando come sopra (§.78) si ha

$$\frac{dv}{dt}=-g-\frac{r'}{M}:$$

e perchè (35.§.77) $r'=\frac{k-x}{k+x}\cdot r$, perciò

$$\frac{dv}{dt}=-g-\frac{k-x}{k+x}\cdot\frac{r}{M}=-g-\frac{k-x}{k+x}\cdot\frac{v^2}{c}\,(21.\S.60).$$

E perchè il rapporto $\frac{k-x}{k+x}$ è sensibilmente eguale all'unità, perciò

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{k-x}{k+x}\cdot\frac{1}{c}(gc+v^2),\ \ldots\ldots\ (d)$$

eliminando il tempo colla nota formola $v=\frac{dx}{dt}$, risulta

$$vdv=-\frac{k-x}{k+x}\cdot dx\cdot\frac{1}{c}(gc+v^2)$$

$$\frac{k-x}{k+x}dx=-c\,\frac{vdv}{gc+v^2}=-\tfrac{1}{2}c\,\frac{2vdv}{gc+v^2}:$$

eseguendo la divisione del coeficiente di dx, si ottiene

$$-dx+\frac{2k}{k+x}dx=-\tfrac{1}{2}c\frac{2vdv}{gc+v^2},$$

ed integrando viene

$$-x+2k\cdot\log.\mathrm{ip}(k+x)=-\tfrac{1}{2}c\log.\mathrm{ip}(gc+v^2)+C;$$

e facendo $x=0$ risulta $v=V$, onde

$$2k\log.\mathrm{ip}.k=-\tfrac{1}{2}c\log.\mathrm{ip}(gc+V^2)+C,$$

togliendo dalla prima la seconda si avrà

$$-x+2k\log.\mathrm{ip}\frac{k+x}{k}=\tfrac{1}{2}c\log\mathrm{ip}\,\frac{gc+V^2}{gc+v^2}:$$

ma il secondo membro indica l'altezza x della formola (29.§.70) che chiamo A, in conseguenza

$$-x+2k\log.\mathrm{ip}\,\frac{k+x}{k}=A.$$

Poichè $\log\mathrm{ip}\,\frac{k+x}{k}=\log.\mathrm{ip}\left(1+\frac{x}{k}\right)=\frac{2x}{2k+x}$ (§.78), perciò

$$-x+2k\cdot\frac{2x}{2k+x}=A\text{, ovvero}$$

$\frac{2k-x}{2k+x}x=A$: facendo nel rapporto $x=A$ (§.78) si ha infine

$$x=\frac{2k+A}{2k-A}\cdot A\ \ldots\ldots\ldots\ (39).$$

Nella formola (d) facendo $x=A$ si ha

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{k-A}{k+A}\cdot\frac{1}{c}(gc+v^2)\text{ e}$$

$$dt=-\frac{k+A}{k-A}\cdot c\cdot\frac{dv}{gc+v^2}=-\frac{k+A}{k-A}\cdot\sqrt{\frac{c}{g}}\cdot\frac{d\frac{v}{\sqrt{gc}}}{1+\frac{v^2}{gc}}\text{, integrando}$$

si ha

$$t=-\frac{k+A}{k-A}\sqrt{\frac{c}{g}}\cdot\left(\mathrm{arc\,tang}=\frac{v}{\sqrt{gc}}\right)+C,$$

ma $t=0$ dà $v=V$ onde

$$0=-\frac{k+A}{k-A}\sqrt{\frac{c}{g}}\left(\mathrm{arc\,tang}=\frac{V}{\sqrt{gc}}\right)+C\text{, prendendo la differenza}$$

emerge

$$t=\frac{k+A}{k-A}\sqrt{\frac{c}{g}}\left[\left(\mathrm{arc\,tang}=\frac{V}{\sqrt{gc}}\right)-\left(\mathrm{arc\,tang}=\frac{v}{\sqrt{gc}}\right)\right].$$

Essendo il secondo membro il valore del tempo della formola (30.§.70), che chiamo B, si avrà infine

$$t=\frac{k+A}{k-A}\cdot B\ \ldots\ldots\ldots\ (40).$$

Vogliamo avvertire, che nelle formole di questa e dell' antecedente teorica bisogna aver presente quello che altrove si è dichiarato pel valore di k, relativamente al limite della velocità residua di 122^m (Teor. VI. VII.).

80. Se un corpo cada verticalmente da un punto nello spazio, e sia sottoposto alla legge di gravità, è chiaro che se la Terra restasse immobile, il sito di caduta sarebbe al piede della verticale che dal punto si condurrebbe alla superficie terrestre, ossia il corpo si dovrebbe trovare in un punto di detta superficie determinato dal raggio della terra, che prolungato passerebbe pel punto di partenza. Ma siccome il Globo-Terraqueo ha un moto di rotazione, il quale non è stato posto a calcolo nelle formole suddette, così il vero punto di caduta sarà diverso da quello che abbiamo cennato. Ond' è che misurando l' ipotenusa di un triangolo rettangolo che abbia per cateto la verticale suddetta, se la Terra restasse immobile, e per l'altro cateto abbia la distanza del piede di questa verticale dal vero punto di caduta, si avrebbe il cammino del proietto.

Questo secondo cateto è ciò che diciamo *deviazione* del proietto, la quale si fa sempre, com' è chiaro, nel verso della rotazione, cioè verso l' Est; ma le nostre formole, come si è detto, non danno che il valore del primo cateto, e non già quello della citata ipotenusa, per cui sembrano esse non applicabili ai fatti; ma ponendo mente agli sperimenti dal professore *Reich* fatti a *Freyberg* (X), si conoscerà che un corpo cadendo da un' altezza di $158^m,54$ ha per cateto di deviazione una lunghezza di $0^m,028396$, risultamento medio ottenuto dopo centosei osservazioni. Quindi i valori delle altezze rinvenute con le formole di cui parliamo, debbansi considerare esatti senza sensibilissimo errore. Da ciò deriva la stessa conseguenza per la valutazione de' tempi.

Verità simili all' esposta si possono dedurre, quando il corpo è proiettato in direzione contraria della gravità.

(X) Poisson, Recherches sur le mouvement des projectiles dans l'air. §. 7...1839.

Ma siccome non è nostro intendimento andar dietro alla esattezza quasi ideale, così abbiamo creduto inutile porre a calcolo in questa specie di moto la rotazione della Terra, molto più che le applicazioni delle formole che ne sarebbero derivate, avrebbero dato risultamenti o eguali o quasi eguali a quelli che abbiamo valutati con le nostre. Intanto la citata opera di Poisson, che forma un capo lavoro di analisi, potrebbe esser consultata, per ammirare con quanto sapere quel solenne matematico ha posto a calcolo le circostanze finora trascurate della rotazione diurna del Globo, le quali a rigore parlando sono inerenti al moto de' corpi.

É da notarsi che chiamando p il peso di un corpo valutato nell' aria, p' quello dello stesso corpo valutato nel vôto, e p'' il peso dell' aria spostata, si avrà $p = p' - p''$. Ma siccome in tutte le applicazioni del moto verticale de' corpi nel mezzo resistente, e precipuamente pei proietti di artiglieria, p'' è trascurabilissimo rispetto a p', perciocchè un piede cubo di aria pesa circa $\frac{6}{5}$ di oncia, così nelle dette formole non si è tenuto conto della differenza de' pesi p e p', la quale ne' risultamenti arrecherebbe divarii tanto piccoli da sfuggire persino alle più accurate osservazioni.

FINE DELLA SECONDA PARTE.

PARTE TERZA.

TEORICA I.

Teoremi sulla velocità de' proietti, stabiliti dagli sperimenti.

81. Nella Idrodinamica la forza di un fluido elastico si valuta dal prodotto della massa del corpo su cui esso fluido agisce, pel quadrato della velocità che comunica.

Da questo si ottiene la formola $F=MV^2$; nella quale F è la forza del fluido elastico, M la massa del corpo, e V la velocità iniziale che esso corpo riceve. Similmente si ha $f=mv^2$; onde

$$F:f::MV^2:mv^2::PV^2:pv^2,$$

perciocchè le masse sono come i pesi (§. 47). Supponiamo per poco che in un' arma da fuoco l' accensione della polvere sia istantanea: ciò ne conduce alla conseguenza che i pesi C e c di due cariche saranno proporzionali alle forze che svolgono, cioè a dire si avrà

$$F:f::C:c;$$

dunque

$$V^2:v^2::\frac{C}{P}:\frac{c}{p}=(C:c)(p:P).$$

Il che vale quanto dire, *che i quadrati delle velocità iniziali di due proietti nella stess' arma, sono nella ragione composta della diretta del peso delle cariche, e della inversa del peso dei proietti.*

82. Sia $P=p$, verrà

$$V^2:v^2::C:c.$$

Quindi i quadrati delle velocità iniziali de' proietti in una stessa bocca da fuoco, seguono il rapporto de' pesi delle cariche.

83. Sia $C=c$, si ha

$$V^2 : v^2 :: p : P.$$

Dunque in una stess'arma i quadrati delle velocità iniziali dei proietti sono nel rapporto inverso del peso di questi, quando le cariche sono eguali.

È d'avvertire per altro che i diametri de' proietti debbano essere eguali; perciocchè in caso contrario i fluidi elastici che si svolgono dalle cariche non eserciterebbero eguali spinte, per la ragione che i venti restando ineguali ci sarebbero differenti dispersioni di fluido.

84. Sia $V=v$, risulta

$$\frac{C}{P}=\frac{c}{p}, \text{ ossia } C : c :: P : p.$$

Perciò in una stess' arma, le velocità iniziali de' proietti si eguaglieranno, quando il peso delle cariche è in proporzione con quello de' proietti.

Per arme dello stesso calibro, i diametri de' proietti hanno ad essere eguali, affinchè le polveri accese, che sfuggono pel vento, siano parti simili del peso delle rispettive cariche. Per le armi poi di diverso calibro faremo conoscere in seguito le altre condizioni necessarie per ottenere la eguaglianza delle velocità.

85. I filetti fluidi che svolge una carica, essendo eguali in intensità, *se ne desume che le spinte risultanti, saranno proporzionali alle superficie urtate.*

Esprimendo dunque con A ed a i diametri di due proietti di egual peso, dovrà sussistere la proporzione

$$F : f :: A^2 : a^2.$$

Nella quale F ed f indicano le forze de' soli filetti attivi, di quelli cioè che operano sulle superficie urtate.

In simil guisa procedendo per un altro proietto dello stesso peso de' primi, si ottiene la proporzione

$$F : f' :: A^2 : a'^2.$$

Ciò posto, le tre forze F, f, f' abbiano impresso ai detti proietti le velocità iniziali V, v, v', e sia D il diametro della bocca da fuoco, saranno $D - A = m$, $D - a = n$, $D - a' = o$, i tre venti rispettivi. Dalle due proporzioni si ottiene

$$F - f : F - f' :: A^2 - a^2 : A^2 - a'^2.$$

Vale a dire *che le forze del fluido, le quali si perdono per la differenza de' venti, sono in ragion diretta della differenza de' quadrati de' diametri de' proietti.*

86. Inoltre essendo (§. 82) $F : f :: V^2 : v^2$; $F : f' :: V^2 : v'^2$; sarà (§§. 82.85) $V : v :: A : a$, $V : v' :: A : a'$, o pure $V : v :: D - m : D - n$, $V : v' :: D - m : D - o$: dalle quali proporzioni procede che $V - v : V - v' :: n - m : o - m$.

Dunque le differenze delle velocità iniziali, in una stess' arma caricata con proietti di egual peso, e con eguale quantità di polvere, sono proporzionali alla differenza dei venti.

87. Supponiamo che, siccome veramente succede, l'accensione sia successiva, ed analizziamo fino a che punto l'esposte verità possano tornare utili nelle applicazioni ai fatti.

I moltissimi sperimenti eseguiti nel 1771 al 1791 da Hutton con pezzi di piccolo e di grosso calibro, di varie lunghezze di anima e con cariche diversissime, riferiti nelle traduzioni di Villantroys e di Terquem, non che gli sperimenti del Gregory, hanno confermato con la massima approssimazione tutto quello che si è stabilito nel §. 82. E se fra i risultamenti sperimentali ed i teorici ha qualche divario, questo è sempre trascurabile, poichè esso riesce minore degli errori che in tutte le applicazioni non si possono evitare. Si è per altro osservato nei riferiti sperimenti, che per le cariche molto grandi la proporzione del detto paragrafo dà una piccola differenza in

meno. Ciò non pertanto è d'avvertire, che nello stabilire la detta proporzione, fra le velocità ed i pesi delle cariche, non deesi paragonare una carica con un'altra che ne differisca di molto: dappoichè si avrebbero risultamenti assai discordi dal vero, come i citati sperimenti dimostrano. La qual cosa è facile a comprendersi, ove si ponga mente esserci delle cariche le quali non si sono totalmente accese mentre il proietto è già uscito dall'arma.

Inoltre se il corpo venga spinto da due cariche molto fra loro differenti, dovrà percorrere dentro l'anima dell'arma spazii sensibilmente diversi, la qual cosa ha potere altresì di rendere la teorica notabilmente discordante dai fatti. Ma se per lo contrario le cariche differissero di poco, oltre che i tempi delle accensioni sarebbero quasi eguali, le circostanze del moto si potrebbero considerare sensibilmente le medesime, perchè i proietti rimanendo esposti, senza errore sensibile, per lo stesso tempo all'urto del fluido elastico percorrerebbero spazii prossimamente eguali nell'arma.

Sia pertanto $V = 560^m$ la velocità iniziale della palla da 12 spinta con due Kilogrammi di polvere, e si voglia conoscere la rispondente velocità iniziale con $1^k,5$ di polvere. Si faccia

$$2 : 1,5 :: 560^2 : v^2 = \frac{1,5}{2} \cdot 560^2 ;$$

log.560	2,74819
$\frac{1}{2}$ log 1,5	0,08804
$\frac{1}{2}$ comp.log 2	9,84948
log v	2,68571

$$v = 485^m . \text{circa}$$

88. Negli scorsi paragrafi si è tacitamente supposto essere la polvere di una sola qualità. Quando ciò non ha luogo bisogna tener conto della proporzione $V^2 : V'^2 :: P : P'$ (§.33).

Questa proporzione è verificata anche con la massima approssimazione prendendo col fatto (§. 40.) i valori di V, V'; e misurando sul terreno le lunghezze P, P' (§. 31.). Quindi pos-

siamo stabilire, *che i quadrati delle velocità iniziali di due proietti perfettamente eguali, spinti da due cariche eguali in peso solamente in una medesima bocca da fuoco, sono nel rapporto delle portate delle polveri, o nel rapporto delle frecce che dà il polverometro a pendolo* (§. 29).

89. La proporzione del §.83 è sufficientissima per potercene giovare nelle occorrenze, come Hutton ha dimostrato in tutti i suoi sperimenti. Egli costantemente se n'è servito per ridurre a una sola regola le velocità iniziali, perchè potessero appartenere a proietti dello stesso calibro. L'analogìa in discorso è dimostrata pure con la massima precisione dagli sperimenti di Antoni, Thompson e Gregory con pezzi di grosso e di piccolo calibro. Ma i risultamenti che questi ne porgono, allora sono molto esatti quando la proporzione risguarda le cariche, le quali non oltrepassano la metà di quelle che producono il massimo effetto.

Sia $P = 0^k,4776$ (=once $16\frac{7}{8}$ ing), $P' = 0^k,428$ (=once $15\frac{1}{8}$ ing), $V = 409^m$ (=piedi 1345.ing): i quali dati sono ricavati dagli sperimenti (Y), avremo $0,4776 : 0,428 :: v^2 : 409^2$, $v^2 = \frac{4776}{4280} . 409^2$,

log.409	2,61172
$\frac{1}{2}$log.4776.	1,83953
$\frac{1}{2}$com. log.4280.	8,18428
log.v	2,63553

$$v = 432^m;$$

ch'è la velocità iniziale della seconda palla, il cui diametro si suppone essere quanto quello della prima, spinta con la stessa carica di $0^k,1132$ (=once 4.ing).

90. La proporzione del §. 84 è confermata con la massima approssimazione da tutti gli sperimenti di Hutton, e di Gregory. Ma si aggiunga, che per rendere quasi simili le circostanze del moto, bisogna che la lunghezza delle anime dei pezzi sia nel rapporto del calibro de' proietti. La qual cosa

(Y) Hutton. Nouvelles expériences d'artillerie pag. 100; trad. par Villantroys.

è secondo i princìpi della Dinamica, viene del pari stabilita dagli sperimenti del detto autore, e da quelli di Robins (Z), e da ciò che ne dice Lombard nella nota 28 dell'opera di quest'ultimo, parlando della lunghezza delle anime de'pezzi di piccolo, e di grosso calibro.

Esprimendo con L, l le lunghezze delle anime di due pezzi, dovrà alla proporzione in disamina aggiungersi l'altra $L : l :: A : a$. A questa va unita un'altra analogìa, vale a dire, che le armille de' rispondenti venti siano nel rapporto de' cerchi massimi de' proietti: perciocchè, perdendosi pei venti due parti di fluido elastico, conviene ch'esse siano proporzionali alle forze intere, affinchè quelle che operano su i proietti, rimangano nel rapporto de' pesi di questi.

Siano D, D' i calibri di due bocche da fuoco; a, a' quelli de' proietti; le armille de'venti saranno espresse da $\frac{\pi}{4}(D^2 - a^2)$, $\frac{\pi}{4}(D'^2 - a'^2)$: i cerchi massimi de'mobili risultano $\frac{1}{4}\pi a^2$, $\frac{1}{4}\pi a'^2$. E siccome le forze delle polveri seguono, senza errore sensibile, il rapporto delle superficie (§. 85), così dovrà sussistere la proporzione $D^2 - a^2 : D'^2 - a'^2 :: a^2 : a'^2$, da cui deriva $D : D' :: a : a'$.

L'altra condizione perchè abbia luogo l'analogìa indicata (§. 84) si è questa, che i diametri dei foconi siano in egual rapporto col diametro de' mobili.

Riepilogando ora ciò che si è detto, si può stabilire, che perchè si eguaglino le velocità iniziali di due proietti spinti da armi diverse, conviene:

1.° *Che i pesi delle cariche siano parti simili de' pesi dei proietti.*

2.° *Che le lunghezze delle anime siano nel rapporto de' calibri de' proietti.*

3.° *Che i diametri delle anime siano proporzionali a quelli de' proietti.*

(z) Robins. Nouveaux principes d'artillerie pag. 377. trad. par Lombard.

4.° *Che i diametri de' foconi siano in ragion diretta con quelli de' proietti.*

Le verità sperimentali discorse negli antecedenti paragrafi sono state confermate altresì da Gregory, usando arme di calibri più grossi, e cariche variate di peso.

91. Per stabilire altre verità rapportiamo la seguente (A)

TAVOLA XVIII.

CARICA.	PROIETTO.		VELOCITÀ iniziale.
kilog.	peso.	diametro.	
—	—	—	
	k	m	m
0,1132	0,4280	0,047498	373
0,1132	0,4563	0,048768	379
0,1132	0,4773	0,050038	410
0,2264	0,4280	0,047498	506
0,2264	0,4563	0,048768	526
0,2264	0,4773	0,050038	553

Lunghezza dell' anima del pezzo..1^m,4572(=pol. 57,37.ing)
Calibro corrispondente.....0,051308(= pol.2,02 «)
Diametro del focone.....0,00508 (=pol.0,2 «)

La prima colonna della tavola indica le cariche di polvere (di once 4 e once 8. ing) La seconda i pesi de' proietti. La terza i rispondenti diametri. La quarta le velocità iniziali, ciascuna delle quali è la media di molte altre che si sono ottenute con dati perfettamente eguali.

Da questo si scorge che le velocità iniziali crescono col peso de' proietti: la qual cosa sembra che sia in opposizione con quello che abbiamo antecedentemente stabilito (83): ma ciò

(A) Hutton. Nouvelles expériences d' artillerie pag. 100 trad. par Villantroys.

proviene da questo, che i rispettivi venti decrescendo, i pesi di essi mobili rimangono aumentati.

Si faccia $0,4280 : 0,4773 :: 410^2 : V^2$

$$\begin{array}{rl} \log 410 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 2,61278 \\ \frac{1}{2}\log 4773 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1,83939 \\ \frac{1}{2}\text{com.}\log 4280 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 8,18428 \\ \hline \log. V \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 2,63645 \end{array}$$

$$V = 433^m . \text{circa}$$

Tal è la velocità iniziale del proietto, il cui peso è di $0^k,4280$, e che ha egual vento dell' altro (§. 83), ma veramente esso non ha che 373^m di velocità iniziale, come si osserva dalla tavola. E perciò la differenza $433^m - 373^m = 60^m$ di perdita proviene dalla differenza $0^m,002540$ (= pol 0,1) in più nel vento pel calibro di $0^m,047498$, mentre l' altro calibro è di $0^m,050038$.

Il quale residuo di 60^m è quasi un sesto della velocità di 373^m data dagli sperimenti, o un settimo di 410^m ch'è la velocità totale. Perocchè essendo $V = 433^m$ la velocità iniziale del proietto che pesa $0^k,4280$ (= once 15. dram. 2) spinto dalla carica di $0^k,1132 = C$; e la velocità che veramente riceve essendo 373^m, ossia $\frac{6}{7} \times 410^m = \frac{6}{7} \times V$, sarà (§§. 81.82) $V^2 : (\frac{6}{7} V)^2 :: C : C' :: F : F' = \frac{36}{49} F = \frac{4}{7} F$ circa; o pure $C' = \frac{4}{7} C$ circa, che è la quantità di polvere che opera veramente. Di quì apparisce chiaro che $\frac{3}{7} C$ n'è la perdita, e che la forza si scema per $\frac{3}{7} F$. Ciò vuol dire che per $0^m,00254$ di più nel vento una terza parte circa della forza si disperde.

Ancora per la carica di $0^k,2264$ si ha $4280 : 4773 :: 553^2 : V^2$, e $V = 584^m$: ma la velocità effettiva è 506^m; dunque la perdita di 78^m è dovuta al di più nel vento.

E perchè $\frac{78}{584} = \frac{2}{15}$ circa, $\frac{78}{506} = \frac{2}{13}$ circa, così si conchiude che per la carica di $0^k,2264$ un eccesso di $0^m,00254$ nel vento, fa perdere al proietto i $\frac{2}{15}$ della velocità totale, o i $\frac{2}{13}$ della sperimentale.

Inoltre $1 : \left(\frac{13}{15}\right)^2 :: C : C' = \frac{169}{225} C = \frac{11}{15} C$ circa, che è la quantità di polvere la quale agisce sul corpo: onde la perdita sarà $\frac{4}{15} C$ all' incirca, ossia la perdita di forza, pel ridetto eccesso nel vento, sarà circa $\frac{4}{15}$, o senza errore sensibile $\frac{1}{3}$.

Intorno al quale subbietto spingendo Hutton le sue ricerche ha compilato la tavola seguente.

TAVOLA XIX.

Coefficienti della velocità per 0m,00254 di più nel vento.

CARICHE.	COEFFICIENTI.
k	
0,0566	$\frac{2}{11} = 0,182$
0,1132	$\frac{1}{6} = 0,167$
0,1698	$\frac{4}{25} = \frac{1}{6,25} = 0,160$
0,2264	$\frac{2}{13} = \frac{1}{6,50} = 0,154$
0,2830	$\frac{4}{27} = \frac{1}{6,75} = 0,148$
0,3396	$\frac{1}{7} = 0,143$
0,3962	$\frac{4}{29} = \frac{1}{7,25} = 0,138$
0,4528	$\frac{2}{15} = \frac{1}{7,50} = 0,133$
0,5094	$\frac{4}{31} = \frac{1}{7,75} = 0,129$

La prima colonna indica le cariche di polvere.

La seconda qual parte della velocità sperimentale si perde per 0m,00254 di più nel vento. Questa colonna corrisponde perfettamente ai risultamenti che si ottengono per mezzo del seguente metodo teoretico.

I fratti posti a fronte delle cariche, si sono ottenuti dagli sperimenti. Quello che corrisponde con la terza carica si potrebbe ottenere osservando, ch'essa carica è un medio aritmetico fra la seconda e la quarta, percui il detto fratto dev' esser compreso fra $\frac{1}{6}$ e $\frac{2}{13}\left(=\frac{1}{6,50}\right)$, e perciò si trova notato $\frac{1}{\frac{1}{2}(6+6,50)}=\frac{1}{6,25}$. Dunque alle cariche, seconda, terza, e quarta appartengono i coefficienti $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6,25}$, e $\frac{1}{6,50}$; cioè per ogni $0^k,0566$ (=once 2 ing) di più nella carica il denominatore del fratto cresce di 0,25: perciò in corrispondenza delle cariche, seconda, terza, quarta, quinta ec. ec. si sono scritti i fratti $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6,25}$, $\frac{1}{6,50}$, $\frac{1}{6,75}$ ec; rispettivamente eguali a $\frac{1}{6}$, $\frac{4}{25}$, $\frac{2}{13}$, $\frac{4}{27}$ ec; ridotti in modo che abbiano per numeratore l' unità. Alla carica poi di $0^m,0566$ corrisponde il fratto $\frac{2}{11}$ che non trovasi in ordine cogli altri.

Gli stessi sperimenti si sono eseguiti con tre altri pezzi dello stesso calibro, e con eguali foconi, ed hanno dato risultamenti quasi identici agli esposti, come può rilevarsi dalla Tavola XXI, che verremo poi esponendo. In essa ancora si osserverà che per tutte le cariche usate e scritte in quella, la forza che si disperde per ogni $0^m,00254$ di più nel vento è $\frac{1}{5}$ circa di quella che spinge il proietto del più grande diametro. Si vuole inoltre avvertire che la serie delle perdite di velocità procede con una legge costante fino alla massima carica di ciascuna bocca da fuoco.

92. Se nella proporzione enunciata di sopra (§. 86) facciasi $V-v=\frac{V}{\omega}$, ed $n-m=0^m,00254$, ne risulterà

$$V-v'=\frac{V}{\omega}\cdot\frac{o-m}{n-m}=\frac{V}{\omega}\cdot\frac{o-m}{0^m,00254}; \text{ e } v'=V\left[1-\frac{393,7(o-m)}{\omega}\right].$$

Ora essendo $D = 0^m,051308$ (=pol. 2,02 ing); sia $A = 0^m,050038$, sarà $D - A = m = 0^m,001270$ (=pol. 0,05 «); $a' = 0^m,049784$, e $D - a' = o = 0,001524$ (=pol 0,06), onde $o - m = 0^m,000254$. Supponiamo il pezzo accennato alla Tavola XVIII (§. 91) caricato con $0^k,2264$ (=once 8 ing) di polvere; sarà $\frac{1}{\omega} = 0,154$ (Tavola XIX. §. 91). Dalla Tavola XVIII si rileva ancora $V = 553^m$; sostituendo avremo

$v' = 553^m(1 - 393,7 \times 0,000254 \times 0,154)$, ma

log 393,7.....2,59517
log 0,000254.....6,40483
log 0,154.....9,18752

8,18752 il n.° è 0,0154,

che sottratto da uno da' 0,9846;
dunque $v' = 553 \times 0,9846$;

log 553^m 2,74273
log. 0,9846 9,99326

log v'..... 2,73599

$v' = 544^m$. circa,

che è la velocità iniziale del proietto che abbia un diametro di $0^m,049784$ (=pol. 1,96 ing), il cui peso si suppone che sia quanto quello del proietto che ha il diametro di $0^m,050038$, cioè del peso di $0^k,4773$ (=once $16\frac{1}{8}$); mentre il vero suo peso è $0^k,4748$ (=once $16\frac{13}{16}$).

Perciò avrà luogo la proporzione

$$0^k,4773 : 0^k,4748 :: V'^2 : 544^2, \text{ e}$$

$$V'^2 = \frac{4773}{4748} \cdot 544^2, \text{ e}$$

log 544 2,73560
$\frac{1}{2}$ log 4773.....1,83939
$\frac{1}{2}$ com. log 4748.....8,16175

log V'.....2,73674

$V' = 545^m$ circa.

Tenendo il metodo che abbiamo dichiarato in questo paragrafo, Hutton ha regolato le velocità iniziali in maniera che appartenessero ai proietti di quattro pezzi che noteremo, e che sono stati sottoposti ad esperimento, considerando i proietti costantemente del diametro di $0^m,049784$, e del peso di $0^k,4748$, modificando con lo stesso procedimento gli sperimenti di tutte le altre bocche da fuoco di cui si è servito, con accrescere o diminuire le velocità iniziali di qualche piede affinchè avessero adequatamente soddisfatto alle regole finora stabilite. Bisogna per altro avvertire, che la proporzione del §. 82 ha dovuto in alcune parti venire modificata, allorquando le cariche si sono accresciute. Perocchè in tal caso la forza d'impulsione ha gradatamente meno tempo e meno spazio per operare sul proietto (§.81).

93. Si è osservato (§. 91) che il terzo circa della forza della carica si perde per la differenza di $0^m,00254$ nel vento; e per ciò stabilendo la proporzione

$\overline{0^m,049784}^2 - \overline{0^m,049530}^2 : \overline{0^m,051308}^2 - \overline{0,049784}^2 :: \frac{1}{3}F$: al quarto, che viene $0,21F$ circa, che è la forza perduta pel vento, risultante dal proietto di $0^m,049784$, caricato nell'arma del calibro di $0^m,051308$.

Essendo le forze perdute nella ragione delle superficie di sfogo (§. 85): possiamo al pari di Hutton stabilire pel focone che $\overline{0^m,049784}^2 - \overline{0^m,049530}^2 : \overline{0^m,00508}^2 :: \frac{1}{3}F$: al quarto che risulta di $0,035\,F$ circa; che è la forza perduta.

Adunque $0,21\,F + 0,035\,F = 0,245\,F = \frac{1}{4}F$ circa, rappresenta la forza perduta pel vento e pel focone.

Da questo paragrafo non può dedursi la conseguenza che per tutte le bocche da fuoco si possa apprezzare la suddetta perdita di forza per l'apertura del vento e del focone, seguendo il medesimo metodo; ma si dovrebbe, per conseguire il fine, ripetere per tutte le armi gli stessi sperimenti; perocchè la perdita di $\frac{1}{3}$ di forza non è per qualunque arma, i venti de'cui proietti variassero di $0^m,00254$; ma siffatta perdita appartiene al calibro di $0^m,051308$ solamente.

94. Siccome è necessario notare i dati de' pezzi, di cui sopra abbiamo discorso, per quello che verremo dappoi stabilendo, così esporremo le seguenti tavole.

TAVOLA XX.

NUMERO del cannone.	LUNGHEZZA del pezzo.		LUNGHEZZA dell' anima.		DIAMETRO alla culatta	DIAMETRO alla bocca.	DIAMETRO dell' anima	PESO.	DIAMETRO del focone.	LUNGHEZZA dell' anima col fondo rotondato.
	calibri. —	metri. —	calibri. —	metri. —	metri. —	metri. —	metri. —	kilogram. —	metri. —	metri. —
1.°	15,	0. 76962	13, 91	0, 71628	0. 19939	0, 17475	0,051308	131,486	0,00508	0.72466
2.°	19, 98	1, 02489	18. 86	0.96774	0, 18872	0, 15037	0,051308	129,219	0,00508	0. 97612
3.°	29,20	1, 52400	28,40	1, 45720	0, 17094	0, 11887	0.051308	133.753	0,00508	1, 46558
4.°	41,04	2, 35436	39,55	2, 02946	0, 15494	0,10947	0.051308	167,758	0,00508	2, 03784

TAVOLA XXI.

LUNGHEZZA della CARICA.		PESO.		LUNGHEZZA dell' anima. IN CALIBRI DELLA PALLA.				PROIETTO.	
				numero del pezzo					
sola polvere.	col sacchetto.	della polvere.	del sacchetto	1° 15	2° 20	3° 30	4° 40	peso.	diametro.
metri	metri	kilog.	kilog.	Velocità iniziali				kilog.	metri
0,032258	0,055372	0,0566		237,7	245,5	280,4	295,7	0'4748	0,049784
0,064516	0,087630	0,1132	0,01415	336,6	359,6	396,2	417,6	0,4748	0,049784
0,096774	0,119888	0,1698		408,4	440,4	484,6	512,1	0,4748	0,049784
0,129032	0,152146	0,2264	0,021225	435,9	481,6	545,9	591,3	0,4748	0,049784
0,193548	0,216662	0,3396		437,7	499,9	»	»	0,4748	0,049784
0,225806	248920	0,3962		429,8	505,1	»	»	0,4748	0,049784
0,258064	281178	0,4534	0,037073	419,7	504,8	609	641,9	0,4748	0,049784
0,290322	313436	0,5064		»	»	»	670,6	0,4748	0,049784

Nella Tavola XX la quarta colonna addimostra la lunghezza di ciascun'arma in calibri dell'anima : la quinta dà le lunghezze delle anime che si sono prese nel modo seguente. Si è introdotto nell'arma un *calcatore,* diviso in pollici e decimali, di tale diametro che potesse entrare per $\frac{1}{2}$ nella mezza sfera del fondo dell'arma del raggio di pol. 1,01. Il numero, che al piano della bocca si leggeva nell'asta di esso calcatore, fu notato in detta colonna. Da siffatta misura deriva che i numeri segnati sono minori delle lunghezze, che si prenderebbero dal centro della bocca al fondo della superficie sferica per $\frac{1}{3}$ del diametro o $\frac{2}{3}$ del raggio, ossia di $0^m,01676$ (=pol. 0,66). Inoltre

siccome la mezza sfera è eguale ad un cilindro che abbia per base il cerchio massimo e per altezza $\frac{2}{3}$ del raggio pol. 1, 01, così se i numeri della suddetta colonna si accrescano di 0^m,00838 (=pol. 0,33), si otterranno le altezze de'cilindri equivalenti ai vani totali delle anime.

La Tavola XXI è stata compilata notando gli sperimenti di Hutton (B) per le cariche scritte nella terza colonna, che corrispondono rispettivamente ad once inglesi 2.4.6.8.12.14.e 16 di polvere, e di quello dello stesso (C) per l'ultima carica di once 18. La prima colonna indica la lunghezza della sola polvere, ossia l'altezza di un cilindro la cui base è quanto il cerchio dell'anima. La seconda esprime l'altezza di un cilindro di polvere rivestita del corrispondente sacchetto, la cui base è pure eguale al cerchio dell'anima. La spessezza della flanella di cui fu formato il cartoccio è di 0^m,000635 (=pol.0,025). La terza dà il peso delle cariche usate nei diversi sperimenti. Nella quarta sono notati i pesi di tre soli sacchetti. Le quattro colonne seguenti contengono le velocità iniziali de'proietti dello stesso peso e dello stesso diametro, ridotte, come si è detto al §. 89, a regola uniforme. In capo a queste colonne posti sono i numeri 15.20 30.40 che rappresentano in numeri interi i quozienti di ciascuna lunghezza di anima divisa pel calibro del proietto. Il che vuol dire, che i detti numeri si ottengono, senza errore sensibile, col divider ciascun numero della colonna ultima della Tavola XX pel calibro del proietto. E se le frazioni del quoziente sonosi ridotte ad interi, anche le velocità iniziali sonosi per questa parte convenevolmente modificate. Nelle due ultime colonne vi sono indicati i pesi e i diametri de'proietti.

Gli sperimenti si sono eseguiti con polvere chiusa nei sacchetti. Dalla tavola in disamina si rileva che le velocità iniziali

---

(B) Hutton. Nouvelles expériences d'artillerie, pag. 153 e 155 trad. par Villantroys.

(C) Hutton. Nouvelles expériences d'artillerie pag. 136. trad. par Terquem.

con la stessa carica crescono con la lunghezza delle anime delle bocche da fuoco. La quale verità è stata anche confermata da Robins, che adoperò tre pezzi, le cui anime erano lunghe 16, 32, e 60 calibri, e dal D'Àrcy il quale impiegò pezzi di 80, 110, e 132 calibri, caricati con grandi e con tenuissime cariche.

Dalla medesima tavola e da tutti gli sperimenti di Hutton si rileva, che con la stessa carica le velocità iniziali sono fra loro in un rapporto approssimato, un poco maggiore di quello delle radici cube delle lunghezze delle anime, ed un poco minore di quello delle radici quadrate di dette lunghezze. Sembra avverarsi che il rapporto sia un medio aritmetico fra i due espressi (D). Di modo che, chiamando L, l le lunghezze delle anime di due bocche da fuoco dello stesso calibro usate con eguali cariche, e V, e v le velocità iniziali de' proietti perfettamente eguali, si avrà

$$\sqrt[3]{L}:\sqrt[3]{l}::V \text{ sta ad } u,\ \sqrt{L}:\sqrt{l}::V \text{ sta ad } u',\ \text{quindi}$$

$$v=\frac{u+u'}{2}=\tfrac{1}{2}V\left(\sqrt[3]{\frac{l}{L}}+\sqrt{\frac{l}{L}}\right)$$

Questa formola potrà essere utilissima in molte occorrenze se non a rigore geometrico, almeno per le applicazioni che non richieggono molta esattezza.

Potendosi alle lunghezze delle anime sostituire il numero dei calibri de' proietti, il rapporto $\frac{l}{L}=\frac{na}{ma}=\frac{n}{m}$ può inserirsi nella formola, e si avrà

$$v=\tfrac{1}{2}V\left(\sqrt[3]{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{n}{m}}\right),$$

nella quale m, ed n sono i quozienti che si hanno dal dividere le lunghezze delle anime pel diametro del proietto.

(D) Hutton. Nouvelles expériences d'artillerie pag. 168 trad. par Villantroys: e pag. 132 trad. par Torquem.

Gli sperimenti di Robins, di D'Arcy, di Antoni, di Grobert, di Hutton e di Gregory (E), hanno dimostrato con molta esattezza, tanto con i piccoli che con i grossi calibri, che le velocità iniziali seguono, con moltissima approssimazione, il rapporto delle radici quarte della lunghezza delle anime, purchè le cariche, i proietti, e le altre circostanze siano perfettamente eguali, ossia per la pratica è giovevole, con un' esattezza maggiore della suddetta proporzione l'altra

$$V : v :: \sqrt[4]{L} : \sqrt[4]{l} :: \sqrt[4]{ma} : \sqrt[4]{na} :: \sqrt[4]{m} : \sqrt[4]{n}.$$

95. Dall'ultima Tavola si ricava la seguente

TAVOLA XXII.

Carica del massimo effetto.

NUMERO del PEZZO.	CARICA.	LUNGHEZZA della sola POLVERE.	PORZIONE dell'anima con la POLVERE.	PORZIONE dell'anima senza POLVERE.	LUNGHEZZA della polvere in calibri DEL PROIETTO.
1°	0,3396 k	0,193548 m	0,267	0,733	3,88
2°	0,3962	0,225806	0,231	0,769	4,53
3°	0,4534	0,258064	0,176	0,824	5,18
4°	0,5094	0,290322	0,142	0'858	5,83

Essendo 15 calibri l'anima del 1.° pezzo, il 3,88 è compreso fra $\frac{1}{3}$ ed $\frac{1}{4}$ della lunghezza dell'anima.

Per gli altri 4,53.5,18.5,83 sono compresi rispettivamente fra $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{7}$, delle lunghezze di 20,30 40 calibri.

Nella prima colonna è designato il numero del pezzo. Nella seconda sono inserite le cariche che danno la massima velocità.

(E) Duchemin. Mémorial de l'artillerie: sur la vitesse initielle des projectiles n.IV.

Nella terza trovasi la lunghezza di esse cariche. La quarta dà il rapporto della lunghezza della polvere con la parte rotondata modificata, alla lunghezza dell'anima anch'essa modificata (§.94): e tale rapporto dinoterà la parte dell'anima riempita di polvere.

La quinta esprime la parte dell'anima non riempita di polvere. La sesta si è ottenuta con dividere ciascun numero della terza colonna pel calibro del proietto: i quozienti indicheranno quanti calibri contiene ciascuna carica del massimo effetto.

Da quanto è dichiarato in questo paragrafo, e dai molti sperimenti di Hutton, di Gregory ec. si può stabilire:

1.° *Che ogni bocca da fuoco ha una carica, la quale dà la massima velocità iniziale, al di là della quale si osservano i decrementi fino ad essere zero la velocità iniziale, come avverrebbe se il pezzo fosse riempito di polvere fino alla bocca.*

2.° *Che il rapporto della lunghezza della carica del massimo effetto alla lunghezza dell'anima cresce pei pezzi corti.*

3.° *Le parti dell'anima riempite di polvere sono in ragione inversa delle radici quadrate delle parti non riempite. Cioè a dire che due numeri della terza colonna sono fra loro, presso a poco, in ragione inversa delle radici dei due numeri corrispondenti della quarta colonna.*

96. Il pezzo numero 3.° è stato adoperato contro il pendolo balistico (§.40) con la carica di $0^k,1698$ (=once 6), ed aggravato successivamente da pesi di piombo. I proietti sono stati tutti dello stesso peso, e dello stesso diametro di quelli della Tavola XXI (§.94). I risultamenti ottenuti si sono registrati nella tavola che segue, affine di ritrarne utilissime conseguenze di sommo schiarimento per guidare senza errore le applicazioni delle teoriche ai fatti.

Digitized by Google

TAVOLA XXIII.

Carica costante di 0k,1698.

PESO del pezzo n.° 3.°	VELOCITA' iniziali.	VELOCITA' medie.
220k	490m	491m,5
220	493	
297	487	487
297	487	
416	504	497
416	490	
530	499	495,5
530	492	

La prima colonna dà il peso del pezzo aggravato successivamente con piombo. La seconda le velocità iniziali di ogni coppia di sperimenti. La terza le risultanti velocità medie della colonna antecedente.

Si noti che l'arma fu sospesa in modo che oscillava liberamente (F).

Inoltre il pezzo N.° 1.° si tornì un'altra volta, e fu alleggerito di nuovo, e ridotto al peso di 81k circa (=lib. 179). Si adoperò quindi come l'altro, ma con tre cariche di 0k,1132 (=once 4) l'una; poi con quattro di 0k.1698 (=once 6), e finalmente con due di 0k,2264 (=once 8). In ciascuno degli spari fatti con le medesime cariche non si palesò differenza sensibile nelle velocità (G).

(F) Hutton Nouvelles expériences d'artillerie pag. 88 e 89: trad par Villantroys.
(G) Hutton. Nouvelles expériences d'artillerie pag. 102: trad par Villantroys.

Due pezzi da sei, cioè del calibro di $0^m,092171$ (= pol. 3,65), e di $0^m,08966$ (= pol. 3,53) i proietti: ciascun'arma del peso di $531^k,8$ (= lib. 1173), e $287^k,9$ (= lib. 635); con quasi la stessa lunghezza di anima, cioè di $1^m,4389$ (= pol. 56,65), e di $1^m,4351$ (= pol. 56,50), sottoposti agli sperimenti (H) con eguali cariche hanno dato a divedere, che le velocità iniziali de' corrispondenti proietti sono prossimamente eguali, o che i pezzi si sospendano, o stiano su i loro affusti da potere retrocedere, o che si fermino con invincibili ritegni.

Perciò si può stabilire *che le differenze de' pesi nelle bocche da fuoco, che hanno le altre circostanze perfettamente eguali, e caricate alla stessa guisa, non producono sensibili divarii nelle velocità iniziali de' proietti.*

Hutton parlando di un pezzo da tre si esprime nel modo seguente (I)..... « Si è poscia tirato col pezzo corto con la » stessa carica e con la stessa palla, mettendo un ostacolo alla » culatta per impedire il recesso. La velocità media era allora » $414^m,2$ (= piedi 1359) per ogni secondo, cioè un poco » minore di quella che si otteneva quando la mobilità dell'af- » fusto permetteva il recesso; ma la differenza non è talmente » grande che non si possa riguardare come la differenza or- » dinaria che ha luogo tra gli sperimenti di un giorno e quelli » di un altro, dimanierachè si può dire con sicurtà che la » mancanza di recesso non arreca differenza sensibile nella ve- » locità della palla ».

Siffatta conchiusione è avvalorata da infiniti altri sperimenti simili, che tutto giorno si eseguono nei Poligoni.

97. Neppure il calcare più o meno la carica nel fondo dell'anima o con tappi regolari o senza, reca variazioni sensibili alle velocità iniziali de' proietti, come afferma Hutton (K) relativamente al pezzo n.° 3.°..... Alcune volte si è posta so-

(H) Hutton. Nouvelles expériences d'artillerie pag. 72, e 74: trad par Terquem
(I) Hutton. Nouvelles expériences d'artillerie pag. 49 trad par Terquem.
(K) Hutton. Nouvelles expériences d'artillerie pag. 90 trad. par Villantroys.

» lamente la carica di polvere, senza comprimerla, altre volte
» si è compressa con differenti numeri di colpi e con diversi
» gradi di forza, nè mai è avvenuto di notare veruna diffe-
» renza sensibile nella velocità della palla. I tappi avevano
» pollici 2 di spessezza ed erano costruiti o di giunchi, o di
» fili di canape di tale grossezza da entrare a stento nell'arma.
» Si è data ad essi tutta la possibile consistenza, si sono pure
» posti tra la palla e la polvere, e spesso al disopra di ambe-
» due; alcune volte se ne sono posti varii ed alcune volte un
» solo. Non si è trovata veruna differenza nelle velocità della
» palla. Esse erano le medesime, sia che ci fosse uno, due o
» nessun tappo. Può stare che il poco vento della palla ne fosse
» la cagione. Ai due ultimi colpi se ne posero due: nella mag-
» gior parte degli altri se n'era posto un solo, e il peso medio
» di ciascuno era once 2 e dramme 9.

Gli sperimenti eseguiti col pezzo n.° 1.° (L), caricato con once 8 di polvere e con tappi di sughero, confermano perfettamente la stessa cosa.

A provare maggiormente quanto abbiamo esposto, Lombard dice (M)..... « Si sono eseguiti sei tiri con un pezzo da 16,
» caricato con 6 libbre di polvere chiusa in cartocci di carta, e
» diretti orizzontalmente, de'quali tre con due tappi di fieno cia-
» scuno, uno sulla carica calcato con sei colpi, e l'altro sulla
» palla calcato con due colpi. Ne' tre altri tiri la carica è stata
» solamente premuta nel fondo dell'anima; la palla vi è stata
» soprapposta, e coperta di un tappo ch'è stato calcato con
» un sol colpo, volendo solamente aver certezza, che la ca-
» rica toccasse il fondo dell'anima, e la palla fosse contigua
» alla carica. I risultamenti di queste pruove son indicati nella

(L) Hutton. Nouvelles expériences d'artillerie pag. III. trad. par Villantroys.
(M) Lombard. Moto dei proietti §. 178.

TAVOLA XXIV.

	CALCANDO			NON CALCANDO		
Ordine de' tiri.	1°	3°	5°	2°	4°	6°
Velocità iniziale.	460,9	461,2	467,7	469,3	471,2	467,0
Velocità media		463,3			469,2	

» D'onde si rileva per lo meno ch'è inutile di calcare.

98. Col pezzo n.° 3.° caricato con once 4 di polvere, dandosi foco in diversi siti della carica (N) si è avuto la seguente

TAVOLA XXV.

IL FOCO SI È PORTATO AL	D'AVANTI		CENTRO		FONDO	
Ordine de' tiri.	1°	2°	4°	6°	3°	5°
Velocità iniziale.	418,5	422,1	426,1	423,7	430,6	425,6
Velocità media	420,3		424,9		428	

Inoltre col pezzo n.° 4.°, caricato con $0^k,4534$ (=16 once) di polvere si è ottenuto la seguente tavola (O).

TAVOLA XXVI.

IL FOCO SI È PORTATO AL	D'AVANTI		CENTRO		FONDO	
Ordine de' tiri.	2°	6°	3°	7°	4°	8°
Velocità iniziale.	623,9	607,7	605,6	628,5	612,9	628,2
Velocità media	615,8		617		620	

(N) Hutton. Nouvelles expériences d'artillerie pag. 101 trad. par Villantroys.
(O) Hutton. Nouvelles expériences d'artillerie pag. 112 e 113, trad. par Villantroys.

Nella tavola antecedente il peso de' proietti fu costante cioè di once 16 e dramme 9, ma in quest' ultima fu di once 16 e dramme 11. Da queste due tavole si scorge che *dandosi fuoco a diversi siti della carica le velocità iniziali de' proietti non ricevono sensibili alterazioni.*

Si è corretta in questa tavola la velocità iniziale del terzo tiro che in Hutton si trova scritta erroneamente. Le velocità del 1.° e 5.° tiro non si trovano quì notate, perchè credute incerte per non prevedute anomalie.

99. Le cariche di $0^k,1132$, e $0^k,4534$ di polvere (=once 4 e 16.) occupano le lunghezze di $0^m,064516$, e di $0^m,258064$ (Tavola XXI §. 94) eguali rispettivamente a pol. 2,54.10,16; e danno, come si è osservato, ciascuna le stesse velocità, negli sperimenti dell' antecedente paragrafo. Perciò ne deriva che prima che si vinca la resistenza del proietto si accende, nelle tre posizioni del focone, la stessa quantità di polvere.

Allorquando le due lunghezze di carica sopra dette appartengono ad armi di più grosso calibro, deve con maggior ragione aver luogo lo stesso fatto: perciocchè la sperienza continua ci dimostra che due cilindri di polvere di egual lunghezza ma di diverso diametro, si accendono in tempi differenti, cioè quello del maggior diametro in minor tempo (§. 38). Per la qual cosa noi portiamo opinione, malgrado la sentenza contraria di Gassendi, che nelle bocche da fuoco in uso è indifferente appiccare il fuoco a qualunque sito della carica. Infatti la tavola seguente (Q) estratta da Lombard afforza la nostra opinione.

(Q) Lombard. Tavole del tiro.

TAVOLA XXVII.

PEZZO da	CARICA	LUNGHEZZE della carica.
24	k 5,874	m 0,3643
16	3,916	0,3158
12	2,937	0,2871

Le lunghezze delle cariche notate nella terza colonna poco differiscono da $0^m,258064$; ed oltre a ciò il rapporto della lunghezza dell'anima del pezzo da 24 a $0^m,3643$ è prossimamente eguale a quello della lunghezza dell'anima del pezzo n.° 4.° a $0^m,258064$. Lo stesso si dica per gli altri.

Trattandosi poi di cariche minori del peso della metà del proietto, il rapporto di cui si parla è più grande, e quindi le conseguenze simili all'esposte si debbono maggiormente avverare.

In seguito discorreremo un'altra volta di quello annunziato in questo e nell'antecedente paragrafo.

TEORICA II.

Sforzo del fluido svolto dalla polvere contro il proietto.

100. Essendo sferici i proietti di artiglieria, riceveranno su la parte convessa l'azione del fluido che si svolgerà da una data carica: per lo che vi sarà risolvimento di forza nell'attività del motore. E poichè è ignota la legge con la quale il fluido agisce, perciò faremo due ipotesi; la prima è, che i filetti fluidi siano diretti normalmente sulla superficie urtata, ossia abbiano una direzione cospirante al centro del mobile: la seconda è, che la loro attività sia parallela all'asse dell'arma.

Delle quali sentenze una è sostenuta da Lombard, e l'altra da Newton e da Eulero.

(*Fig. 17.*) Esprima MF la intensità di un filetto elastico diretto al centro A della sfera SBQ, del diametro $2r$, alla quale sia circoscritto il cilindro RH. Sia A l'origine delle coordinate, $AC=y$ e $CM=x$ siano le coordinate del punto M. Si prenda $CP=dy$, si prolunghi CM e si conduca FG parallela alla QS. Con siffatta costruzione la forza MF resterà decomposta nelle due MG, GF. Quest' ultima sarà distrutta dalla eguale e contraria emergente dalla forza che agisce da un punto tanto distante da B, su l'arco QB, quanto lo è il punto M, e l'altra avrà tutto il suo effetto.

I triangoli simili MFG, ACM danno

$$FM : MG :: AM : MC :: CN . CM :: r : x$$

Questa proporzione dimostra che la forza di un filetto fluido, e la corrispondente parte attiva sono proporzionali al raggio, ed all' ascissa del punto di applicazione.

Eseguendosi la rotazione intorno AB, la CP descrive un'armilla circolare espressa da $\pi(AP^2-AC^2)=2\pi ydy$, si è trascurato il dy^2 come differenziale di second' ordine.

Ora nella rotazione la forza de' filetti fluidi, che operano sulla zona elementare descritta dall' arco MO, e la parte attiva sono proporzionali a $2\pi rydy$, e a $2\pi xydy$: in conseguenza le forze che agiscono su di una zona finita, o vero la forza tutta e la parte attiva corrispondente sono $::\int 2\pi rydy : \int 2\pi xydy$ presi però fra gli stessi limiti, e quest' integrali cominciano quando $y=0$ ovvero le due forze sono proporzionali a

$$\int_0^y 2\pi rydy+C, \text{ e ad} \int_0^y 2\pi xydy+C',$$

$$\text{ma} \int_0^y 2\pi rydy=\pi ry^2, \text{ perchè } C \text{ risulta zero, e}$$

$$\int_0^y 2\pi xydy+C'=\int_0^y 2\pi ydy\sqrt{r^2-y^2}+C'=-\tfrac{2}{3}\pi(r^2-y^2)^{\frac{3}{2}}+C',$$

dalla quale $C'=\frac{2}{3}\pi r^3$, adunque

$$\int_0^y 2\pi xydy+C'=\tfrac{2}{3}\pi r^3-\tfrac{2}{3}\pi(r^2-y^2)^{\frac{3}{2}}$$

Estendendo quest' integrali fino ad $y=r$, la forza del fluido su tutta la mezza sfera starà alla parte attiva

$$:: \pi r^3 : \tfrac{2}{3}\pi r^3 :: 1 : \tfrac{2}{3} :: 3 : 2.$$

il che vale quanto dire che la forza elastica impiega i $\frac{2}{3}$ della sua efficacia per ispingere il proietto.

Che se il fluido operasse al modo stesso sul cilindro circoscritto, cioè se i filetti fluidi andassero normalmente a percuotere la sua base, la quale è quanto il cerchio massimo della sfera, la forza assoluta, non soffrendo alcuna diminuzione, sarebbe indicata da πr^3; dunque *la forza assoluta del fluido sul cerchio massimo del mobile sta alla forza relativa a spingere la sfera* :: 3 : 2.

101. (*Fig. 18*) Inoltre sia FM la intensità di un filetto che operi parallelamente all' asse dell' arma. Si conduca la tangente MG al cerchio, la FG perpendicolare ad essa, e la GQ perpendicolare alla MF.

La MF è la risultante delle due MG, GF: l' effetto della prima resta distrutto dall' effetto della identicamente situata dalla parte opposta, la quale tende a promuovere una rotazione contraria, e la seconda produrrà il suo effetto. Ma siccome essa è la risultante delle QF, GQ, e questa resta distrutta dalla eguale e contraria che agisce su detto punto, così la forza del fluido sta alla parte attiva

$$:: FM : QF :: FM^2 : GF^2 :: AM^2 : CM^2 :: CN^2 : CM^2 :: r^2 : x^2.$$

Pel medesimo raziocinio di sopra, dopo la rotazione l'espressioni delle forze in paragone saranno

$$2\pi r^2 \int_0^y y dy = \pi r^2 y^2.$$

$$2\pi \int_0^y y dy \cdot x^2 = 2\pi \int_0^y y dy (r^2 - y^2) = \pi r^2 y^2 - \tfrac{1}{2}\pi y^4;$$

facendo $y=0$ le costanti vanno a zero.

E ponendo $y=r$, verrà

$$\pi r^4 : \tfrac{1}{2}\pi r^4 :: 1 : \tfrac{1}{2} :: 2 : 1.$$

rapporto della forza intera alla parte attiva.

Questo teorema è l'istesso di quello dimostrato antecedentemente (§. 49) in maniera più generale.

Ragionando come nel paragrafo scorso, *si conchiude che la forza del fluido opera sul cilindro circoscritto, o sul cerchio massimo della sfera, con intensità doppia di quella con la quale opera su di essa sfera.*

I due rapporti stabiliti fanno conoscere che quello di eguaglianza, devoluto da Robins, non può in verun conto ammettersi.

È cosa conosciuta da tutti gli artiglieri che la espansion della polvere accesa opera per istrati sferici, come meglio si osserva nelle mine, allorquando si ragiona delle sfere di *attività* di *rottura*, e di *friabilità*. Quindi è che un granello qualunque di polvere svolgendo un'elasticità eguale in tutti i versi, si formerà un globetto di fluido che andrà dilatandosi sempre fino che incontri tangenzialmente il proietto, il quale dovrà in conseguenza ricevere uno sforzo normale alla sua superficie, ossia sarà diretto al centro di esso proietto. Vero è che le pareti ed il fondo dell'arma presentano alla espansione un ostacolo invincibile, ed il globetto fluido, esercitando parte della sua forza contro del metallo, non si dilaterà egualmente in tutti i versi: ma siccome è proprietà de' fluidi elastici di reagire al modo stesso che agiscono, così le parti frenate nell'accensione si svolgeranno in direzione contraria in forme di porzioni sferiche, le quali sempre più si dilateranno non ostante il disquilibrio degli altri globetti, finchè incontrino normalmente la superficie del proietto.

Quantunque speciosa sembrar possa questa maniera di ragionare in astratto, pur nulladimeno serve ad avvalorare la prima delle due ipotesi summentovate.

I proietti uniti ai tacchi, o *zocchetti*, dovranno in vista della cennata proprietà ricevere una velocità maggiore di quella dei proietti sciolti.

TEORICA III.

Vento ed angoli di partenza.

102. Una bocca da fuoco dovendo contenere nella sua anima il rispondente proietto, diviene assolutamente necessario lo stabilire il diametro di questo minore del calibro dell'arma. Ora la differenza di siffatti diametri dicesi *vento*, la cui metà si deve considerare come replicata circolarmente intorno al cerchio massimo del mobile, e questo cerchio ha da intendersi normale all'asse del pezzo.

(*Fig. 19*). Siano ABC, FEG due cerchi concentrici i cui diametri AB, FG esprimano i calibri dell'anima e del mobile. Sarà $2FA$ il vento, o per meglio dire il doppio della larghezza dell'armilla circolare $AEGD$, la quale è la differenza de' detti cerchi, e pareggia la lunula $AEMD$ che si ottiene allorquando il cerchio piccolo risulta tangente internamente al grande, ch'è appunto la posizione del proietto allorchè è introdotto nell'arma.

Si faccia $FO = \frac{1}{2}a$, $FA = \frac{1}{2}m$, sarà $AO = \frac{a+m}{2}$: l'armilla circolare, o la lunula, verrà espressa da

$\pi\left(\frac{a+m}{2}\right)^2 - \frac{\pi a^2}{4} = \frac{\pi m(m+2a)}{4}$, il quale valore diminuisce con m: per la superficie di tale lunula sfugge, ad ogni istante, il fluido elastico in pura perdita.

Supponiamo pertanto che il vento non esista: allora la risultante della corrente fluida essendo quasi diretta al centro del proietto non si produrrà nè perdita di forza nè ballottamento. Quando poi il vento esiste, allora accade che una parte della colonna fluida sfugge per la lunula circolare, e l'altra parte s'imbatte nel proietto. Quindi per un disquilibrio di resistenza i filetti fluidi s'inclineranno all'asse dell'arma, e la loro risultante dovrà passare per un punto superiore al centro del

proietto, e perciò non solo ci sarà perdita di forza, ma pure ballottamento.

(*Fig. 20*) Per esaminare ciò con più chiarezza, sia *IDZ* il mobile, ed *AP* l'anima della bocca da fuoco. Dal centro *B* del fondo dell'arma si conduca *BH* obbliqua all'asse, fino a che incontri il diametro *IZ* in un punto *H* superiore al centro *O*. Esprima *FD* la intensità della risultante di quei filetti che urtano il corpo. Si conduca il raggio *OD*, e la tangente; si compia il rettangolo *EDG*, si prolunghi *EO* in *P*, si tagli *OT*=*DE*, e si costruisca il rettangolo *XOQT*.

Essendo *FD* non diretta al centro di gravità produrrà, per legge dinamica, la rotazione; e siccome è risultante delle *ED*, *DG*, così la prima spingerà il mobile secondo *OP*, e la seconda opererà tangenzialmente. La *OT* è risultante di *OQ*, *OX*, di cui l'una dà il moto progressivo al corpo e l'altra, attivata dal fluido che sfugge superiormente pel vento, lo comprimerà contro l'arma nel punto di contatto *I*, ove formasi nel metallo una impronta. Da ciò proviene che il proietto prende la posizione *MKL* il cui centro si abbasserà, per esempio in *V*, e la forza *OX* resterà menomata dalla elasticità del metallo e poscia distrutta, perciocchè è normale alla superficie della calotta d'infossamento; e così rimane il solo moto per *VR*. Uniti i punti *V* ed *L*, e formato il rettangolo *YVUR*, l'effetto della *VR* si riduce a quello delle due *VU*, *VY*, di cui la prima rimane distrutta dalla resistenza della calotta *MKL*, perchè normale alla superficie sferica, e la seconda produrrà il moto secondo *VY*, o per meglio dire, il corpo verrà spinto secondo la tangente dell'arco *MKL* con moto di rotazione. La stessa cosa succede per la parte opposta della parete dell'anima, e così il ballottamento ha luogo fino a tanto che il proietto lascia l'arma.

Quando il metallo non assume le impronte sarà, in astratto parlando, l'angolo d'incidenza eguale a quello di riflessione, cioè *OPI*=*ba P*. Quest'ultimo si ottiene conducendo la tangente *ab* al cerchio, con la condizione che sia parallela alla

congiungente OP', dopo essersi presa $IP' = IP$; ma l'effettivo angolo di riflessione è NLP ch'è maggiore di baP.

Se il vento s'ingrandisse o il proietto diminuisse di diametro, la risultante de'filetti attivi dovrebbe diminuire, e la sua direzione sarebbe determinata dal punto B e da un punto compreso fra Z ed H; la componente omologa ad OT diminuirebbe prendendo una direzione fra I e P come Op, la quale formerebbe l'angolo d'incidenza OpI maggiore dell'altro OPI; e la componente simile a VR diventerebbe più piccola.

Da ciò che in questo paragrafo si è detto, si può stabilire:

1.° *Se il vento fosse zero la risultante della colonna fluida agirebbe per intero, generalmente parlando, nel centro del proietto senza esserci nè moto di rotazione nè ballottamenti.*

2.° *Allorquando ci è il vento, la risultante della parte attiva della colonna fluida sarà diretta al disopra del centro del mobile inclinandosi all'asse dell'arma, si produrrà perdita di forza, rimbalzi, e moto rotatorio, ed il fluido elastico che sfugge pel vento comprimerà la sfera contro il metallo nel punto di appoggio.*

3.° *Quando si producono le impronte, l'effettivo angolo d'incidenza è minore di quello di riflessione.*

4.° *Quando il vento cresce, la risultante della parte attiva diminuisce, e la direzione sua si scosta maggiormente dal centro del globo, l'angolo d'incidenza s'ingrandisce, la componente che genera il moto progressivo si debilita, e perciò la velocità iniziale decresce.*

5.° *Se la impronta nel metallo cresce di profondità, maggiore sarà l'angolo della riflessione.*

6.° *Il proietto nel superare l'anima può fare indifferentemente o l'angolo di depressione o quello di elevazione. Quando l'urto ultimo è nella parete superiore l'angolo sarà di depressione, e nel caso opposto sarà di elevazione, supposto l'asse dell'arma orizzontale.*

103. Ne'varii usi di guerra i proietti sono di ferro fuso, onde riesce difficilissimo il renderli perfettamente puliti, quantunque una specie di essi sia stata sottoposta all'azione della macchina di *ribattimento*. Il ferro in generale, e precipuamente quello di

fusione conservando una grande affinità per l'ossigeno, si aumenta di volume, e quindi i proietti sono soggetti a successive variazioni. Quelli di assedio, e di difesa prendono incrostature di terra difficili a separarsi. Quelli poi destinati alle coste, oltre che esposti sono agli stessi inconvenienti, dovendosi arroventare, perdono, è vero, l'ossigeno e quelle incrostature di terra, ma per effetto del riscaldamento crescono di volume. I proietti de' pezzi da campagna sono meglio conservati, perchè posti nei cassettini.

In tutte le armi poi le anime diventano alquanto ristrette, e per l'untume della polvere dopo lo sparo, e per l'accaloramento del metallo.

Quello che fin'ora abbiamo dichiarato manifesta esser necessario determinare i venti secondo l'uso ed il calibro delle bocche da fuoco. Infatti Gribeauval volendo conciliare la giustezza del tiro delle armi con la durata di queste, stabilì ad 1 linea il vento nei pezzi da campagna, cioè per quelli da 4, 8, 12 e per l'obice da 6: ad $1\frac{1}{2}$ linea quello de' pezzi da 16 e da 24: ad 1 linea quello de' pezzi da 8, 12 ed obice da 8 di assedio. Nei mortari fissò ad $1\frac{1}{2}$ linea il vento per quello da 12, e ad 1 linea per gli altri da 10, e da 8.

Infine pe' pezzi in ferro il vento è di $2\frac{1}{2}$ linee pel calibro da 36, di $2\frac{1}{4}$ linee pe' calibri da 30 e 24; di linee 2 pel calibro da 18, di linee $1\frac{3}{4}$ per quello da 12, e di linee $1\frac{1}{2}$ per i calibri da 8 e da 6.

Prima del Gribeauval Valliér stabilì il vento nel seguente modo. Sperimentò quello da darsi ad una palla di cognito diametro e di conosciuto peso, con rinvenire il diametro da dare alla rispondente bocca da fuoco, e poscia proporzionò i calibri delle anime ai pesi dei proietti.

Ciò posto sia a il diametro di un mobile del peso p, δ il calibro della corrispondente arma determinato dagli sperimenti. Si cerca il calibro x del globo del peso P, e quello y della bocca da fuoco.

Si faccia

$p:P::a^3:x^3, x=a\sqrt[3]{\frac{P}{p}}$, e $p:P::\delta^3:y^3, y=\delta\sqrt[3]{\frac{P}{p}}$, e quindi il vento della novella bocca da fuoco sarà

$y-x=(\delta-a)\sqrt[3]{\frac{P}{p}}$; *cioè eguale alla radice cuba del rapporto del peso del dato proietto a quello di norma, moltiplicata pel vento della bocca da fuoco sperimentata.*

104. Quando in un'arma il vento non esistesse, il proietto nel superare la bocca descriverebbe una curva, il primo elemento della quale si confonderebbe con l'asse dell'anima prolungato. Allorchè esiste il vento, il primo elemento della curva non coincide certamente con l'asse medesimo, perciocchè i varii ballottamenti fanno sì, che il mobile percuotendo le pareti si spingerà con un certo angolo di partenza, il cui valore dipenderà dalla seguente costruzione.

(*Fig. 21*). Si situi l'arma *ADF* a breve distanza da un piano verticale *IL* veduto di profilo, con l'asse orizzontale e normale ad *IL*; mediante la livellazzione si protrae *MD*, su cui riposa la sfera, fino che incontri in *h* detto piano. Dalla verticale *hI* si tagli *hp*=*BD*, diametro del proietto; dal punto *h* si conduca una orizzontale, la quale in proiezione viene espressa dal punto *h*.

Supponiamo che nello sparo il proietto abbia percosso per ultima volta la parete inferiore dell'anima in *D*; perciò dovrà farsi l'angolo di elevazione formandosi un foro circolare *gqa*, così nominato per più chiarezza.

Sia *Dxf* la traiettoria, condottavi la tangente *Db*, sarà l'angolo *bDh* quello di partenza. Se la gravità non operasse nel tragitto del mobile per giungere in *IL*, la parte più bassa della rottura in vece di essere in *g* sarebbe in *b*, perciò l'altezza *bg* sarà l'effetto della gravità nel tempo che si esegue il cammino, sensibilmente equabile, per l'arco *Dxg*, il quale, senza errore sensibile, è eguale alla corda *Dg* per la poca sua lunghezza. Il tempo per la *Dg* sarà in conseguenza eguale pros-

simamente al tempo che ci vuole per la verticale bg in virtù della forza di gravità. Per la Meccanica essi tempi sono rispettivamente $\frac{Dg}{v}$, e

$\sqrt{\frac{2 \cdot bg}{g}}$: dalla loro eguaglianza risulta $bg = \frac{g \cdot \overline{Dg}^2}{2v^2}$: ma

$$\text{tang} \cdot bDh = \frac{bh}{Dh} = \frac{bg + gh}{Dh} = \frac{g \cdot \overline{Dg}^2 + 2v^2 \cdot gh}{2v^2 \cdot Dh} = \frac{g \cdot (\overline{Dh}^2 + \overline{gh}^2) + 2v^2 \cdot gh}{2v^2 \cdot Dh}$$

E poichè ballottando continuamente il mobile nel pezzo, pei limiti in cui sono ristretti i venti, l'ultimo urto non può accadere che vicinissimo alla bocca, in conseguenza risulta Dh prossimamente eguale a Qh, come anche suppone Lombard (R).

Esprimendo Qh con d, gh con b e l'angolo bDh con α, si avrà

$$\text{tang}\, \alpha = \frac{g(d^2 + b^2) + 2bv^2}{2v^2 d} \ldots\ldots\ldots (1),$$

per la tangente dell'angolo di partenza.

Se IL in vece di essere un piano qualunque, fosse il pendolo balistico, com'è assolutamente da supporre, si rinverrebbe il valore di v secondo è stato spiegato antecedentemente (§.39), e quindi resterebbe fissato il valore di $\tan \alpha$, e quello di α.

In questa formola rimanendo positivo il valore di b, il quale si misura dopo lo sparo, emergerà l'angolo di partenza di elevazione.

Se $b = o$, la formola dà

$$\tan \alpha = \frac{gd}{2v^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

valore assolutamente positivo; dunque l'angolo di partenza sarà di elevazione.

Quando b emerge negativo, cioè quando il punto più basso della palla percuote un punto sottoposto ad h, allora la formola si cambierà in

$$\tan \alpha = \frac{g(d^2 + b^2) - 2v^2 b}{2dv^2} \ldots\ldots\ldots (3).$$

(R) Lombard. Moto de' proietti §. 69.

Nella quale allorquando $g\,(d^2+b^2)$ è maggiore di $2v^2b$, $\tan\alpha$ emergerà positiva, cioè l'angolo di partenza sarà di elevazione: nel caso che è eguale, $\tan\alpha$ sarà zero, e $\alpha=o$, ossia l'angolo di partenza sarà zero, ed anche ciò ha luogo quando il proietto non ha vento. Se poi il primo termine del fratto fosse minore del secondo, il valore di $\tan\alpha$ diventerebbe negativo, e perciò l'angolo di partenza sarebbe di depressione, cioè l'urto finale si effettuerebbe contro la parete superiore.

Fin qui si è supposto, che il fluido elastico nello sfuggire per la lunula del vento rimanga egualmente divisa dal piano verticale condotto per l'asse del pezzo, poichè la carica probabilmente si accende egualmente dall'una e dall'altra parte di detto piano, il quale bipartisce anche il focone da cui si comunica l'accensione. Ma se ciò non avvenisse o perchè detto piano non divide il focone in parti eguali, o per qualsivoglia altra cagione, allora le pressioni de'filetti fluidi che sfuggono non si equilibreranno a vicenda, ed il globo dovrà lasciare il piano verticale seguendo tutt'altro cammino, o a dritta, o a sinistra della verticale *IL*. Ciò dimostra che l'urto ha luogo in punti differenti da quelli esistenti nelle orizzontali *AN*, *DM*, astrazion facendo da altre circostanze che accompagnar possono il moto del globo, e perciò le formole stabilite dovrebbero essere modificate, ma pel poco vento che si dà alle armi da fuoco possiamo valerci delle dette formole, senza tema di commettere errori sensibili nelle applicazioni, come appunto pratica Lombard nella ricerca dell'angolo di partenza (S).

105. L'angolo di partenza per una bocca da fuoco inclinata all'orizzonte si ottiene della stessa maniera, togliendo però dal calcolato α l'angolo di elevazione, o pure usando la macchina di rotazione (§. 46), situando l'asse de'dischi parallelamente all'asse dell'arma, e procedendo poscia la ricerca come nello scorso paragrafo, giovandoci della velocità iniziale che si ottiene con l'arco di differenza.

(S) Lombard. Moto de' proietti Tav. VII.

L'angolo di partenza non segue nessuna legge, ma per ogni arma dovrà esservi il massimo, il quale sarà funzione del vento e del diametro del mobile, ed il minimo, com'è chiaro, sarà zero.

(*Fig. 22*). Sia *AFM* l'anima di una bocca da fuoco. È evidente che il ballottamento del proietto genererà l'angolo massimo di partenza allorchè il finale urto ha luogo nella posizione *BDF*, ove il diametro estremo *AF* della bocca si confonda con quello *BF* del mobile, il quale partendo dall'arma vada tangenzialmente al punto *A* dell'anima: e perciò, condotta la tangente *AD* al cerchio *BDF*, l'angolo *AEF* sarà il richiesto. Se l'urto in *F* accade in modo che *AF* sia in direzione con una corda del cerchio *BDF*, nel punto *F* vi sarà una decomposizione maggiore di forza, perciò il risalto dovrà essere al disotto della tangente *EAH*, cioè il cerchio massimo *DBF* dovrà essere compreso nell'angolo *HAF*, come, per esempio, nella posizione *Q*.

Da *A* sia condotta la tangente *AQ*, la quale prolungata dovrà esser sempre al di là di *AE* come *AR*, onde risulta l'angolo in *E* maggiore dell'altro *R*, come esterno del triangolo *ARE*.

Si faccia $FB=a$, $AB=m$, l'angolo $AEF=AOD=\alpha$ angolo massimo, sarà $FA=a+m$, $AD=\sqrt{(a+m)m}$; e perciò

$$\tan\alpha=\frac{2\sqrt{(a+m)m}}{a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4).$$

Siccome lo stesso ragionamento è applicabile intorno al cerchio della bocca, così presa $AE'=FE$, e tirata la $E'FH'$, i proietti faranno nello sparo angoli di partenza compresi tutti nel cono, che in proiezione è rappresentato dall'angolo *HLH'*.

Se internamente a *BDF* si descriva un altro cerchio che lo tocchi in *F*, la tangente che da *A* gli si conduce, si approssimerà più di *AE* alla verticale *AF*. Dalla qual cosa si conchiude: *che impiccolendosi il calibro crescerà l'angolo massimo di partenza, restando però costante il calibro dell'anima: e cre-*

scendo il vento per uno stesso calibro, crescerà altresì l'angolo massimo di partenza.

Analizzando la natura della formola ultima si scorge ancora, *che per uno stesso vento, i piccoli calibri formar debbono gli angoli massimi di partenza più grandi di quelli de'calibri maggiori.*

Dipendendo principalmente la giustezza del tiro dal più o meno di vento, noi siamo di avviso che, fissato questo con accurati sperimenti per una bocca da fuoco assegnata, si potrebbero determinare e stabilire i venti di tutte le altre bocche da fuoco con la condizione, che gli angoli massimi di partenza si eguagliassero fra loro, ed all'angolo massimo della bocca da fuoco presa per norma.

TEORICA IV.

Sperimenti di Robins sulla elasticità del fluido svolto dalla polvere.

106. Si è dimostrato (§. 28) che il fluido svolto dalla polvere da guerra nell'accensione è *elastico* e permanente; ma il rapporto della sua elasticità a quella dell' aria non è stato ancora bene determinato. Che anzi le discrepanti opinioni su tal subbietto richiamano la seria attenzione degli uomini di artiglieria, affinchè siano bene chiarite molte ricerche teoretiche, vere sempre ne'principii, ma prive di applicazioni; perchè la elasticità di sì poderoso agente, che con simbolo generale fa parte di moltissime formole, resta a determinarsi, se non con precisione geometrica, almeno con tale approssimazione da poterne far uso nelle occorrenze.

Potendosi costruire polveri diverse nella efficacia, tanto per la proporzione de'componenti, quanto per la loro raffinazione ed esatto manipolamento, ne deriva che le elasticità corrispondenti non saranno certamente tutte rappresentate dal medesimo simbolo numerico, facendo eguale all'unità la elasticità dell'aria. Così una polvere più battuta di un'altra, pari essendo le altre condizioni, conterrà ne'suoi granelli più fluido elastico, e quindi

risulterà di maggiore elasticità. Sembra che la polvere meno densa più rapidamente si accenda, e quindi imprima più forza ai proietti. Siffatto ragionamento è dettato dai fraudolenti appaltatori e costruttori, a fine di risparmiare il tempo del battimento per aumentare il loro guadagno. A tutti gli artiglieri è noto, che la polvere porosa ha più affinità con l'umido, e quindi ha bisogno di maggior tempo per accendersi: ne' transiti precipuamente produce molto polverino, il quale pure ritarda la propagazione della fiamma: infine i granelli contengono, dati eguali volumi, minor fluido elastico, e necessariamente dovranno svolgere un calorico meno intenso.

Le quali asserzioni vengono rafforzate col fatto dalle polveri fabbricate con la Pressa Idraulica, e di quelle inglesi, che ad una estrema durezza accoppiano una forza maravigliosa, maggiore di quella che deriva da polveri fatte con tutt'altro procedimento. Oltredichè siffatte polveri si conservano per lungo tempo perfettamente, e sono più accomodate al servizio per la pochissima affinità che hanno con l'umido, perchè i granelli sono molto levigati; aggiungendo, ch'essendo i tagli di molto pronunziati, la fiamma ha con essi granelli facile aderenza, e perciò si comunica con grande celerità. Delle quali polveri vengono più chiaramente mostrati i vantaggi dal pendolo balistico, allorquando si adopera per la ricerca delle velocità iniziali de' proietti (§. 39).

Da ciò che in questo paragrafo abbiamo discorso apertamente risulta, che volendo conoscere la elasticità del fluido che svolge una data polvere, si conviene primieramente provarla col mortaro vetto, o col polverometro a pendolo (§§. 29 30), o pure, che sarebbe meglio, usarla in una bocca da fuoco assegnata per sapere qual velocità iniziale imprima al rispondente proietto. Le quali cose sono indispensabili per avere norme tali di partenza onde conoscere la elasticità del fluido della polvere data.

107. Robins dopo varii saggi eseguiti dentro il vôto pneumatico (§. 28) con polvere prescritta dalle ordinanze, cioè

composta di 75 parti di nitro, $12\frac{1}{2}$ di zolfo e $12\frac{1}{2}$ di carbone, ha stabilito che un pollice cubo di polvere ne svolge 244 di fluido egualmente elastico dell'aria, poste a livello le temperature: la polvere era della portata di 210^m col mortaro provetto, come ci dimostra nella sua Artiglieria Teoretica il Generale d'Escamard, il quale ripetè gli stessi sperimenti. Poscia arroventò una canna di schioppo fino al rosso-bianco, otturandone ermeticamente la bocca la tuffò nell'acqua, e dopo che l'eccedente calore fu dissipato, v'introdusse il liquido, il quale occupò circa $\frac{24}{45}$ del volume, e gli altri circa $\frac{21}{45}$ si trovarono riempiti di aria ridotta alla temperatura ed alla pressione dell'atmosfera libera. Perciò conchiuse che la temperatura del ferro arroventato fino al rosso bianco aumenta $\frac{45}{21}$ volte l'elasticità dell'aria, la quale esprimendo con l'unità nello stato naturale atmosferico, risulterà quella del fluido della polvere, ad egual temperatura 244, e $\frac{45}{21} \times 244 = 998$, o 1000 sarà l'elasticità del fluido in disamina, tenuto conto del forte calore che si svolge dalla fiamma.

Rinvenne altresì Robins, come altri fisici, che il peso del fluido elastico sta a quello della polvere, che lo svolge come 3 : 10.

Siffatto ragionamento si è creduto esatto, perchè la intensità del calorico della fiamma eccitata dalla polvere accesa sublima la potassa, come accade col ferro riscaldato fino al rosso-bianco. Ma Eulero, fra le altre ragioni contro un tal raziocinio, avverte non essere esatto lo stabilito rapporto, perchè l'aria atmosferica ed il fluido della polvere essendo di natura diversa, non possono essi concepire lo stesso grado di calore; e noi aggiungiamo che se il ferro arroventato fino al rosso-bianco sublima la potassa, non ne segue perciò che la fiamma della polvere lo faccia con la medesima efficacia, perciocchè un maggior grado di calore ha la stessa proprietà, e può avvenire altresì che un grado di calore minore di quello della fiamma, abbia la forza di sublimare la potassa, giacchè non si è dimostrato che l'intensità della fiamma eguagli quella del calore del ferro riscaldato fino al rosso-bianco.

Notiamo qui la elasticità che parecchi sommi uomini hanno attribuito al fluido di che si parla, ponendo eguale ad uno la elasticità dell'aria, senza descrivere nè le inutili sperienze, nè i loro speciosi ragionamenti per darci tanti disparati rapporti.

Robins, e Hunsbec....	1000.	Ulach.....	8000.
Pappacino.....	1650.	Lombard	9215.
Eulero.....	3000.	Bernoulli	10000.
Belidoro	4000.	Bouttèe, e Riffaut.	10000.
Bigôt di Morouges.....	5600.	Rumfort.....	50000.

La quale diversità di numeri non dee recar meraviglia, dappoichè è noto potere una stessa forza produrre tanti effetti diversi, quante sono le maniere con le quali si fa operare. Infatti fra gli autori citati, alcuni hanno rinvenuto il rapporto in disamina analizzando la forza di ciascun componente della polvere; altri han fatto gli sperimenti sotto la campana pneumatica, altri in canne di schioppo, altri in recipienti chiusi, altri finalmente in diverse maniere. Ma ciò che grandemente deve interessare all'artigliere si è il conoscere la elasticità e quindi la forza della polvere dagli effetti che produce, quando è però situata come carica nelle armi da fuoco, affine di averne tale un rapporto da far coincidere la teorica con le diverse applicazioni, o per meglio dire, il conoscere la elasticità e la forza della polvere, posto che il fluido svolto operi su di un proietto situato nell'arma, come si fa per la guerra. Ogni altra forza valutata da altri effetti non deve appartenere all'uso delle bocche da fuoco.

La ragione più forte che adduce Robins per giustificare il valore 1000, è la conformità che ei trova fra gli sperimenti ed il calcolo per la ricerca della velocità iniziale, ma senza aver posto mente ai varii dati. Infatti nella formola di cui fa uso è supposta istantanea l'accensione della polvere, nè si tiene conto dello sfogo del focone, nè della perdita di fluido pel vento, nè dell'aria che sta nell'arma, nè dell'attrito del proietto nel correre l'anima ec. ec, circostanze tutte che hanno forza di modificare il detto rapporto 1000 da Robins stabilito in for-

mole semplicissime, le quali diverrebbero oltremodo complicate, come vedremo, allorchè si volesse tener conto delle dette cagioni.

108. Sia V la velocità iniziale di un proietto del peso P spinto dalla carica C; sarà la forza della polvere ridotta in peso (§.81) $F=MV^2=\frac{V^2}{g}P$. Questa espressione è ciò che dicesi *forza dinamica* della polvere.

Essendo (§.81) $F:F'::C:C'$, sarà $F'=\frac{C'}{C}F=\frac{C'}{C}\cdot\frac{V^2}{g}P$: facendo $C'=1$, il valore di F' sarà la forza dinamica di un'unità di peso di polvere. Così se C' indica 2 kilogrammi, F' sarà la forza dinamica di 2 kilogrammi di polvere. Dalla qual cosa deriva che la forza dinamica della polvere varia col variare il peso del proietto, e della sua velocità iniziale.

TEORICA V.

Velocità iniziale, e circostanze che accompagnano il moto del proietto nell'anima dell'arma.

109. *Eulero* con metodo puramente analatico dà una formola per la ricerca della velocità iniziale di un proietto in funzione di varii dati: il metodo è il seguente.

(*Fig. 23*). Sia $EF=L$, la lunghezza dell'anima.

$EL=l$, la lunghezza della carica di polvere.

$EZ=b$, la distanza dal fondo dell'anima al punto in cui comincia il moto del proietto, supponendo che fra questo e la polvere vi fosse un ostacolo LZ, di maniera che b diventa l nel caso che il mobile tocchi la polvere immediatamente.

$AB=a$, il diametro del mobile, supponendo essere zero il vento ed il focone, o vero a indica tanto il diametro del mobile, quanto quello dell'anima.

p = al peso del mobile:
M = alla massa corrispondente:
n = alla gravità specifica dello stesso:

di modo che usando la misura metrica, 1000 kilogrammi indica la gravità specifica dell'acqua distillata al grado zero di temperatura, ed alla pressione $0^m,76$, ossia il peso di un metro cubo di acqua, ed n esprime il peso di un metro cubo della materia colla quale è costruito il proietto. Se per esempio il proietto fosse di ferro fuso, sarebbe $n = 7407$ kilogrammi: e se in una formola esistesse il rapporto $\frac{1000}{7407}$, questo si cambierebbe in $\frac{1}{7,407}$.

$\theta = \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{4} \times 3,1416 = 0,7854$ per comodità di calcolo:

φ = all'altezza della colonna di acqua ch'equilibra la pressione atmosferica. Se trattasi di metri,

$\varphi = 10^m,39$ (=32 piedi fran.). Questo numero si riduce a $10,^m07$ (= 31 piedi) per una media pressione.

m = alla elasticità del fluido che svolge la polvere accesa, supponendo uno quella dell'aria.

F = alla forza del fluido elastico svolto dalla polvere colla accensione istantanea; o vero la forza di detto fluido quando occupi lo spazio iniziale EL.

$EN = x$ la distanza dal fondo al punto nel quale sia giunto il proietto, dopo la dilatazione del fluido.

F' = alla forza del fluido quando occupi lo spazio variabile EN.

Supponendo dunque l'accensione istantanea, ed il grado di calore costante, per la riconosciuta legge di *Mariotte*, che la forza di un fluido elastico è inversamente proporzionale allo spazio che occupa, si ha

$$F : F' :: EN : EL, \text{ ed}$$

$$F' = \frac{EL}{EN} \cdot F = \frac{l}{x} \cdot F.$$

Se nello spazio iniziale EL si contenesse aria atmosferica, lo sforzo contro GH sarebbe eguale ad un cilindro di acqua di base il cerchio GH e di altezza φ, o vero lo sforzo in peso sarebbe, supponendo la misura metrica, $1000^k\varphi\theta a^2$. Ma in detto spazio si trova il fluido svolto dalla polvere il quale è m volte più elastico dell'aria, quindi lo sforzo del fluido sarà $1000^k m\varphi\theta a^2$, ossia

$$F = 1000^k m\varphi\theta a^2,$$

in conseguenza

$$F' = 1000^k m\varphi\theta a^2 \cdot \frac{l}{x}.$$

E perchè la forza acceleratrice del moto è eguale alla forza sollecitante divisa per la massa del mobile (§.51), perciò

$\frac{dv}{dt} = \frac{F'}{M} = \frac{F'g}{Mg} = \frac{F'g}{p}$: posto per F' il suo valore viene

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1000 \cdot gm\varphi l \cdot \theta a^2}{p} \cdot \frac{1}{x} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(a)}.$$

Eliminando il tempo colla nota formola $v = \frac{dx}{dt}$, si ha

$$vdv = \frac{1000 \cdot gm\varphi l \cdot \theta a^2}{p} \cdot \frac{dx}{x};$$

integrando

$$v^2 = \frac{1000 \cdot 2gm\varphi l \cdot \theta a^2}{p} \log.\text{ip}\, x + C :$$

per determinare la costante si osservi, che nel punto Z di partenza del mobile è $v = o$ ed $x = b$, onde

$$C = -\frac{1000 \cdot 2gm\varphi l \cdot \theta a^2}{p} \log.\text{ip}\, b, \text{ in conseguenza}$$

$$v^2 = \frac{1000 . 2gm\varphi l . \theta a^2}{p} \log.\text{ip}\, \frac{x}{b}.$$

Fatto $x = L$ come avviene alla bocca dell'arma, si ottiene la velocità iniziale

$$V^2 = 2,30258 \cdot \frac{1000 . 2gm\varphi l . \theta a^2}{p} \log \cdot \frac{L}{b} \quad \ldots\ldots \text{(h)}.$$

Questa espressione può prendere altra forma: infatti essendo

$$p = n \cdot \tfrac{4}{3}\theta a^3,$$

risulta

$$V^2 = 2,30258 \cdot \frac{1000.3gm\varphi l.}{na} \log. \frac{L}{b}, \text{ e}$$

dividendo numeratore e denominatore per 1000, la n divisa per 1000 la indichiamo anche con n, ben inteso che facendo le applicazioni numeriche la gravità specifica del proietto la divideremo effettivamente per 1000, onde

$$V^2 = 2,30258 \cdot \frac{3gm\varphi l}{na} \log. \frac{L}{b} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5),$$

I valori di l ed a, di L e b formando un rapporto si possono prendere su qualunque misura: e volendo V^2 in metri, g e φ si dovranno valutare in metri.

110. Per applicare questa formola a qualche caso particolare riportato negli sperimenti di Hutton (§.94.Tav.XXI), è da osservarsi che la gravità specifica del ferro di cui si fa uso è $n = 7407^k$, e perciò nella formola (5) conviene porre per n 7,407 come abbiamo osservato: che torna lo stesso, supponendo la gravità specifica dell'acqua eguale all'unità quella del ferro sarà 7,407, e perciò $F' = m\varphi \cdot \theta a^2 \cdot \frac{l}{x}$ (§. 109).

Ciò premesso: sia il pezzo n.° 2°, verrà

$L = 0^m,9761 \,..\, b = 0^m,08763 \,..\, a = 0^m,04978 \,..\, l = 0^m,06452.$

E supponiamo secondo Robins $m = 1000$, si avrà il seguente

QUADRO DEL CALCOLO.

log. 2,30258	0,36229
log. $3g(3 \times 9^m,809)$	1,46879
log. $m(=1000)$	3,00000
log. $\varphi(=10^m,39)$	1,01662
log. $l(=0^m,06452)$	8,80969
com. log $n(=7,407)$	9,13036
com. log $a(=0^m,04978)$	1,30295
log. $2,30258 \cdot \frac{3gm\varphi l}{na}$	5,09070

$$=$$

$\log L(=0^m,9761)$ 9,98949
com. $\log b(=0^m,08763)$ 1,05735

$\log. \frac{L}{b}$ 1,04684

$\log. \left(\log. \frac{L}{b}\right)$ 0,01995

$\log. V^2 = 5,09070 + 0,01995 = 5,11065$
$\log. V$ 2,55532
$V = 359^m$ circa.

Questa velocità, quasi, coincide con quella degli sperimenti inseriti nella cennata tavola: lo stesso accade per le altre velocità, e per gli altri pezzi. Quindi per ottenere le velocità iniziali de' proietti bisogna nella formola (5.§.109) supporre, secondo Robins, la elasticità del fluido mille volte maggiore della elasticità dell' aria, o vero supporre $m=1000$.

L' accordo in disamina, fra la detta formola e gli sperimenti dimostra, che l' elasticità del fluido è più di mille volte maggiore della elasticità dell' aria, perciocchè se si valutassero le cagioni attenuanti, espresse di sopra (§.107), e le circostanze che accompagnano il moto del proietto, come dichiareremo, la formola da stabilirsi avrebbe per primo termine la (5.§.109), e gli altri risulterebbero negativi. Se dunque si volesse che la formola siffattamente ottenuta corrispondesse agli sperimenti, converrebbe aumentare il valore di m, che si trova nel solo primo termine, per ottenersi nella totalità la velocità sperimentale.

111. La pressione dell'aria sulla carica oppone qualche ostacolo all' acceleramento del moto lungo l' anima, ossia indebolisce gli effetti del motore. Per conoscerne la giusta influenza si ponga mente, che l'effetto cui produce equivale al peso di un cilindro di acqua indicato da $\varphi \cdot \theta a^2$, e quindi la forza sollecitante diventa (§.109) $F' = m\varphi\theta a^2 \frac{l}{x} - \varphi\theta a^2$.

E ragionando come sopra si ha

$$vdv = \frac{3gm\varphi l}{2na}\,\frac{dx}{x} - \frac{3g\varphi}{2na}\,dx\,:$$

integrando

$$v^2 = \frac{3gm\varphi l}{na}\log.\mathrm{ip}\,x - \frac{3g\varphi}{na}\,x + C\,,$$

quando $v=o$ è $x=b$, dunque

$$C = -\frac{3gm\varphi l}{na}\log.\mathrm{ip}\,b + \frac{3g\varphi}{na}\,b\,,$$

e l'integrale diviene

$$v^2 = \frac{3gm\varphi l}{na}\log.\mathrm{ip}\,\frac{x}{b} - \frac{3g\varphi}{na}(x-b).$$

Facendo $x=L$, si avrà

$$V^2 = 2{,}30258\cdot\frac{3gm\varphi l}{na}\log.\frac{L}{b} - \frac{3g\varphi}{na}(L-b). \quad . \quad . \quad (6).$$

Siano i dati dell'esempio proposto di sopra, il primo termine del secondo membro è cognito cioè 259^2, pel secondo termine si ha il seguente

QUADRO DEL CALCOLO.

log. $3g$	1,46879
log. φ	1,01662
com. log. n	9,13036
com. log. a	1,30295
log. $(L-b)(=0{,}8885)$	9,94866
log. $\frac{3g\varphi}{na}(L-b)$	2,86738

$$\frac{3g\varphi}{na}(L-b) = 736^{m}.$$

Dunque

$$V^2 = 359^2 - 736 = 128881 - 736 = 128145\,;$$

ma log. $128145 = 5{,}10770$, log. $V = 2{,}55385$, onde

$$V = 358^{m} \text{ circa.}$$

Da questo esempio si rileva che la pressione atmosferica produce un ritardo di $359^m,6 - 358^m = 1^m,6$. La velocità $359^m,6$ è la sperimentale scritta di sopra. Se dunque si voglia che la formola ultima riproduca la velocità sperimentale di $359^m,6$ conviene assumere per m un numero maggiore di mille.

112. La resistenza dell'aria contra il mobile nel percorrere l'anima dell'arma, è un'altra circostanza che menoma l'effetto del motore: per stabilirne il corrispondete valore si osservi, che essendo (20.§.59).

$$R = \tfrac{1}{3} k \omega \pi a^2 \frac{v^2}{g},$$

in cui $\pi = 4\theta$, risulta

$$R = k\omega\theta a^2 \frac{v^2}{2g};$$

ω è la gravità specifica dell'aria, e siccome questa è 850 volte meno densa dell'acqua, così prendendo per unità la gravità specifica dell'acqua, sarà $\omega = \frac{1}{850}$, ed in conseguenza

$$R = \frac{k}{850} \theta a^2 \frac{v^2}{2g}$$

indicherà il peso di un cilindro di acqua eguale alla resistenza che sperimenta il proietto. Per la qual cosa sarà la forza sollecitante

$F' = m\varphi\theta a^2 \frac{l}{x} - \varphi\theta a^2 - \frac{k}{850} \theta a^2 \frac{v^2}{2g}$: perciò seguendo lo stesso andamento si ha

$$vdv = \frac{3gm\varphi l}{2na} \frac{dx}{x} - \frac{3g\varphi}{2na} dx - \frac{3gk}{2.850na} \frac{v^2}{2g} dx:$$

ma $v^2 = 2gh$, e $vdv = gdh$, onde

$gdh = \frac{3gm\varphi l}{2na} \frac{dx}{x} - \frac{3g\varphi}{2na} dx - \frac{3gk}{2.850.na} hdx$: riducendo, e facendo $\frac{3k}{2.850na} = \frac{1}{r}$ viene

$$dh + \frac{hdx}{r} = \frac{3m\varphi l}{2na} \frac{dx}{x} - \frac{3\varphi}{2na} dx.$$

Si moltiplichino ambi i membri pel fattore differenziale $e^{\frac{x-b}{r}}$, si à

$$e^{\frac{x-b}{r}}\left(dh+\frac{hdx}{r}\right)=\frac{3m\varphi l}{2na}\cdot\frac{e^{\frac{x-b}{r}}dx}{x}-\frac{3\varphi}{2na}e^{\frac{x-b}{r}}dx:$$

l' integrale completo sarà

$$he^{\frac{x-b}{r}}=\frac{3m\varphi l}{2na}\int\frac{e^{\frac{x-b}{r}}dx}{x}-\frac{3\varphi r}{2na}e^{\frac{x-b}{r}}+C.$$

Poichè al principio del moto è $x=b$ e $h=o$, perciò con questa ipotesi si determina la costante C appartenente al secondo integrale già eseguito, con la condizione di più che il primo integrale, da eseguirsi, sia eguale a zero in virtù della particolare sua costante: con ciò emerge

$$C=\frac{3\varphi r}{2na} \text{ e quindi}$$

$$he^{\frac{x-b}{r}}=\frac{3m\varphi l}{2na}\int\frac{e^{\frac{x-b}{r}}dx}{x}+\frac{3\varphi r}{2na}\left(1-e^{\frac{x-b}{r}}\right), \text{ ed}$$

$$h=\frac{3m\varphi l}{2na}e^{-\frac{x-b}{r}}\int\frac{e^{\frac{x-b}{r}}dx}{x}+\frac{3\varphi r}{2na}\left(\frac{1}{e^{\frac{x-b}{r}}}-1\right) \quad . \quad . \quad (c).$$

Nelle serie

$$e^{\frac{x-b}{r}}=1+\frac{(x-b)}{r}+\frac{(x-b)^2}{2.r^2}+\text{ec.}$$

$$e^{-\frac{x-b}{r}}=1-\frac{(x-b)}{r}+\frac{(x-b)^2}{2.r^2}-\text{ec:}$$

il valore di $\frac{1}{r}$ essendo infinitamente piccolo, queste due serie saranno di rapida convergenza, e quindi si può stabilire

$$e^{\frac{x-b}{r}}=1+\frac{x-b}{r}, \text{ ed } e^{-\frac{x-b}{r}}=1-\frac{x-b}{r}:$$

in conseguenza

$$\int \frac{e^{\frac{x-b}{r}}dx}{x}=\int \frac{1+\frac{x-b}{r}}{x}dx=\int \frac{\left(1-\frac{b}{r}\right)+\frac{x}{r}}{x}dx=$$

$$\left(1-\frac{b}{r}\right)\log.\mathrm{ip}x+\frac{x}{r}+C' :$$

ma questa costante deve rendere zero l'integrale quando $x=b$ ed $h=o$, onde

$$C'=-\left(1-\frac{b}{r}\right)\log.\mathrm{ip}\,b-\frac{b}{r} ;$$

per la qual cosa

$$\int \frac{e^{\frac{x-b}{r}}dx}{x}=\left(1-\frac{b}{r}\right)\log.\mathrm{ip}\,\frac{x}{b}+\frac{x-b}{r} ; \text{ ed}$$

$$e^{-\frac{x-b}{r}}\int \frac{e^{\frac{x-b}{r}}\cdot dx}{x}=\left(1-\frac{x-b}{r}\right)\left[\left(1-\frac{b}{r}\right)\log.\mathrm{ip}\,\frac{x}{b}+\frac{x-b}{r}\right]=$$

$$\left(1-\frac{b}{r}\right)\log.\mathrm{ip}\frac{x}{b}+\frac{x-b}{r}-\frac{x-b}{r}\log.\mathrm{ip}\frac{x}{b}+\frac{b(x-b)}{r^2}\log.\mathrm{ip}\frac{x}{b}-\frac{(x-b)^2}{r^2} :$$

trascurando i termini moltiplicati per $\frac{1}{r^2}$, si ha

$$e^{-\frac{x-b}{r}}\int \frac{e^{\frac{x-b}{r}}dx}{x}=\left(1-\frac{x}{r}\right)\log.\mathrm{ip}\frac{x}{b}+\frac{x-b}{r}.$$

E perchè $e^{-\frac{x-b}{r}}-1=-\frac{x-b}{r}$, perciò la formola (c) con queste due riduzioni esibisce

$$h=\frac{3m\varphi l}{2na}\left(1-\frac{x}{r}\right)\log.\mathrm{ip}\frac{x}{b}+\frac{3m\varphi l}{2nar}(x-b)-\frac{3\varphi}{2na}(x-b):$$

posto $x=L$, e chiamando V la velocità iniziale la quale dà $h=\frac{V^2}{2g}$, si ottiene infine

$$V^2=2,30258\cdot\frac{3gm\varphi l}{na}\left(1-\frac{L}{r}\right)\log.\frac{L}{b}-\frac{3gm\varphi l}{nar}(L-b)-\frac{3g\varphi}{na}(L-b).\ (7).$$

Ripetendo lo stesso esempio con questa formola si ottiene il calcolo seguente, in cui nel valore di $\frac{1}{r}$ $k=0,92$(§:57 Ta:XIII), quindi

$$\frac{1}{r}=\frac{3k}{2\times 850.na}=\frac{3\times 0,92}{1700\times 7,407\times 0^{m},04978}$$

QUADRO DEL CALCOLO.

log 3	0,47712
log 0,92	9,96379
com. log 1700	6,76955
com. log 7,407	9,13036
com. log. $0^{m},04978$	1,30295
$\log\frac{1}{r}$	7,64377
$\log L$	9,98949
$\log\frac{L}{r}$	7,63326
$\frac{L}{r}$	0,004298
$1-\frac{L}{r}$	0,9957.
	=
$\log\left(1-\frac{L}{r}\right)$	9,99813
$\log\left[2,30258\frac{3g\varphi ml}{na}\log\frac{L}{b}\right]$ (=359^{2})	5,11018
$\log\left[2,30258\frac{3g\varphi ml}{na}\left(1-\frac{L}{r}\right)\log\frac{L}{b}\right]$	5,10831
$2,30258\frac{3g\varphi ml}{na}\left(1-\frac{L}{r}\right)\log\frac{L}{b}$	128300^{m} circa

Inoltre

$$\log \frac{3g\varphi}{na}(L-b)\,(=736^m) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2,86738$$

$$\log l\,(=0^m,06452) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8,80969$$

$$\log m\,(=1000) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3,00000$$

$$\log \frac{3g\varphi ml}{na}(L-b) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4,67707$$

$$\log \frac{1}{r} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7,64377$$

$$\log \frac{3g\varphi ml}{nar}(L-b) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2,32084$$

$$\frac{3g\varphi ml}{nar}(L-b) \ldots\ldots \quad 209^m \text{ circa.}$$

Il terzo termine dà $\frac{3g\varphi}{na}(L-b)\ldots$ 736^m circa.

In fine

$$V^2 = 128300^m + 209^m - 736^m = 127763^m\,;$$

$$\log. V^2 = 5,10643\,,\ \log V = 2,55321\,,\ \text{e}$$

$$V = 357^m,44\,,$$

quasi 2^m minore di $359^m,6$. La qual cosa dimostra che nelle applicazioni la pressione e la resistenza che incontra il proietto per parte dell'aria nel percorrere l'anima dell'arma, hanno poca influenza nel ritardare il moto. Ed essendo $\frac{2}{359} = \frac{1}{179}$ circa, si ricava che le dette due cagioni di ritardo diminuiscono la vera velocità di $\frac{1}{179}$, o $\frac{1}{180}$ circa. Lo stesso rapporto si ricaverebbe prossimamente, se i calcoli si eseguissero con tutti gli altri dati della citata tavola. In conseguenza si può stabilire che i risultamenti della formola (7) sono gl' istessi di quelli della (5. §. 109) ma diminuiti della 180esima parte, ossia

$$V = \sqrt{2,30258\frac{3gm\varphi l}{na}\log\frac{L}{b}} - \frac{1}{180}\sqrt{2,30258\frac{3gm\varphi l}{na}\log\frac{L}{b}}\,,\ \text{e}$$

$$V = \frac{179}{180}\sqrt{2,30258\frac{3gm\varphi l}{na}\log\frac{L}{b}} \ldots (8).$$

Nella qual formola s' intende calcolata la pressione e la resistenza, che l' aria oppone al proietto lungo l'anima dell' arma.

113. L' effetto dell'attrito che sperimenta il proietto, nel tempo che impiega per uscire dalla bocca da fuoco, è impossibile quasi a valutarsi. Eulero intanto, presso a poco, dice (T).

» Non si può dubitare che questo attrito non sia considera-
» bilissimo nelle armi da fuoco le quali vengono caricate con
» palle forzate. E supponendolo eguale al peso p del proietto,
» sarà la quantità di azione corrispondente $p\ (L-b)$; ma la
» quantità di azione della forza del fluido elastico è eguale alla
» metà della forza viva, cioè $\frac{1}{2}MV^2=\frac{1}{2}\frac{p}{g}V^2=ph$, quindi per
» effetto dell' attrito questa quantità di azione diventa
» $ph-p(L-b)=p\left[h-(L-b)\right]$, ciò vuol dire che volendo tener
» conto di questo attrito l' altezza rinvenuta h dovrà diminuirsi
» di $L-b$, ma siccome questa quantità è trascurabile rispetto
» h, così l' attrito può anche trascurarsi nella ricerca della ve-
» locità iniziale col metodo dichiarato: quando anche l'attrito
» si valutasse per 100 volte il peso del proietto, la quantità
» $100\ (L-b)$ sarebbe anche molto piccola per essere consi-
» derata rispetto h. Ne' cannoni l' attrito è molto più tenue per
» cagione del vento, questa forza passiva non pareggia neppure
» il peso del mobile.

Infatti nel primo caso delle palle forzate l' attrito è di stropiccio, cioè della prima specie, poichè la palla non ha moto di rotazione (§. 102). Nell'altro caso l'attrito è di seconda specie, giacchè il corpo gira intorno il suo asse nel correre l'anima, e quindi il suo effetto non dev' essere considerato nella menomazione della velocità iniziale. L'attrito poi de'proietti uniti ai tacchi, o *zocchetti*, si approssima più a quello della seconda che a quello della prima specie, e perciò si può trascurare.

(T) Robins. Nouveaux principes d' artillerie pag. 98.

114. La perdita di fluido pel focone e pel vento diminuisce in maniera sensibile la forza del motore contro la palla, e perciò la perdita di velocità sarà notabile, attesochè il fluido elastico sfugge da dette due aperture con la sua intera velocità, ch'è molto maggiore di quella del mobile. In seguito daremo una formola, per calcolare la velocità in funzione delle supercie del vento e del focone.

115. Nelle formole di questa teorica si è supposta istantanea l'accensione della polvere, ma veramente essa è successiva; in conseguenza la velocità dovrà ricevere altro cambiamento, il quale non potendosi mettere a calcolo si potrà stimare dalla differenza che passa tra la velocità sperimentale e la velocità teorica, quando si conoscerà m. Dall'essere successiva l'accensione della polvere emerge che il moto del fluido elastico è più lento verso la culatta, ma che scostandosi da quella progredisce con rapidità fino alla bocca. Il qual fluido si troverà verso il fondo dell'arma più denso, e perciò eserciterà sul mobile il massimo sforzo, il quale anderà gradatamente a diminuire per effetto della minor densità che acquista.

116. Nella teorica si suppone ancora, che l'agente elastico agisca sulla palla spingendola con tutta la sua forza e tutta la sua velocità, la qual cosa non accade, perchè il mobile trovandosi fin dal primo istante in moto, sarà successivamente incalzato con la velocità del fluido meno quella che il mobile stesso concepisce. Per questa considerazione la velocità teorica viene modificata.

117. Nelle formole si suppone che tutta la forza della polvere sia intesa a spingere il solo proietto; ma essendo successiva l'accensione, la forza del fluido è intesa tanto a muovere gradatamente tutte le parti della polvere non accesa contemporaneamente al primo strato, quanto a dar moto alle materie inalterabili dopo l'accensione, ed allo stesso fluido. Dunque la vera forza che ha azione sul corpo, pareggia la intera forza fluida meno quella che necessita per mettere in moto le dette cose; e ciò cagiona pure perdita di velocità.

118. La temperatura del fluido elastico si suppone costante nelle formole, ma essa secondo taluni decresce con l'aumento degli spazii, per cui Lombard nello stabilire la teorica, fa variare la forza del fluido elastico in ragione delle temperature, che egli considera nell'inverso rapporto de'quadrati degli spazii: e ciò farebbe altresì diminuire la velocità del proietto. La ipotesi di Lombard è fondata sull'accensione istantanea; ma realmente il calorico svolto dall'accensione progressiva apporta una modificazione a detta legge, giacchè all'aumento de'volumi del fluido supplisce, con una certa proporzione, il calorico che somministra la nuova quantità di polvere, la quale gradatamente si accende.

Dalla teorica in parola si può conchiudere, essere difficilissimo o quasi impossibile rinvenire con la sola analisi algebrica una formola, che potesse contenere tutte le modificazioni che arrecano le predette circostanze al valore esatto della velocità iniziale del mobile, per quindi dedurne la elasticità del fluido che svolge la polvere. Pure, supposto che sieno superate tutte l'esposte circostanze, ne desumiamo, che il valore dell'elasticità del fluido svolto dalla polvere, posta come carica nelle armi da fuoco, è molto più grande di 1000. Quantunque le presenti cose sembrino di poca utilità nelle applicazioni; pure se ne ritraggono verità, senza le quali alcune teoriche di molto conto non potrebbero accordarsi coi fatti; come in seguito dimostreremo.

TEORICA VI.

Elasticità del fluido svolto dalla polvere, paragonata alla elasticità dell'aria.

119. Robins (U) mediante il pendolo balistico adoperato come si è detto antecedentemente, ha rinvenuto la velocità di espansione della fiamma che svolge la polvere accesa, impiegata come

(U) Robins. Nouveaux principes d'artillerie pag. 187.

carica in un' arma, essere metri 2135 (= 7000 circa piedi inglesi); ma Hutton ripetendo le stesse sperienze più accuratamente, con un pendolo più esatto e meglio adoperato, ed ancora con pezzi di piccolo e di grosso calibro perfettamente costruiti, ha stabilito che la fiamma acquista una velocità di metri 1525 a 1677 (= 5000 a 5500 piedi inglesi circa).

La Memoria che tratta di siffatti sperimenti si trova inserita nelle *Transactions philosophiques del 1778*. La quale Memoria fu coronata con la medaglia di oro di quell'anno, decretata dalla *Società Reale Inglese*.

Ciò premesso riprendiamo la formola (b §. 109)

$$V^2 = 2,30258 \frac{1000.2gm\varphi l\theta a^2}{p} \log \frac{L}{b}.$$

Servendoci della pressione media dell'atmosfera, stabiliremo per più esattezza secondo Hutton $\varphi = 10^m,07$ (=31 piedi fran.), anzicchè $10^m,39$ (= 32 piedi fran.); con ciò la formola si cambia in

$$V^2 = 2,30258 \frac{2g.10070.ml.\theta a^2}{p} \log \frac{L}{b};$$

Inoltre

log 2,30258	0,36221
log 10070	4,00303
log 2	0,30103
log 9,809	0,99162
log θ (= 0,7854)	9,89509
	5,55298; la metà 2,77649, il n.° 597,7

perciò

$$V = 597,7\, a \sqrt{\frac{lm}{p} \log \frac{L}{b}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (9).$$

120. In ogni *dt* il fluido, che si svolge con la combustione istantanea della polvere riempie lo spazio che rimane dietro il

mobile, e si spinge gradatamente lungo l'anima. Allorchè il corpo è avanzato per uno spazio della lunghezza y, altrettanto la polvere accesa ha dovuto dilatarsi, ed il centro di gravità del risultante cilindro fluido sarà sulla metà del proprio asse, ossia disterà dal fondo dell'anima per una lunghezza eguale a $\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}y$. Seguitando il moto progressivo e della sfera e del fluido, se la prima si trova avanzata dal suo punto di partenza per y', il centro di gravità del nuovo cilindro fluido disterà dal fondo dell'anima per $\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}y'$, e così proseguendo. Si può per conseguenza stabilire che i centri di gravità de' successivi cilindri fluidi percorrono degli spazii, che sono metà del cammino che fa il proietto nello stesso tempo: o vero la velocità del proietto in ogni tempo dt è doppia di quella de' centri di gravità de' cilindri fluidi. Sia ω il peso della polvere, il simbolo F', che esprime la rispondente forza del fluido a misura che va dilatando, deve operare non solo sul peso p, ma anche sull'altro ω, il quale si suppone sempre applicato ai detti centri di gravità, ricevendo in ogni tempo dt la velocità $\frac{1}{2}dv$: ossia F' deve avere azione su di $\frac{1}{2}\omega$ imprimendogli la velocità dv, e su di p comunicandogli la stessa velocità, cioè la forza F' deve agire sul peso $p+\frac{1}{2}\omega$.

Questo ragionamento sarebbe esatto se i cilindri successivi fossero omogenei nelle rispettive densità ed elasticità: ma condizioni siffatte non hanno luogo per innumerevoli circostanze che accompagnano la infiammazione della polvere. Infatti i $\frac{3}{10}$ di essa (§. 107.) si riducono a fluido elastico, ed i rimanenti $\frac{7}{10}$ che si mescolano con detto fluido, e sono materie estranee, debilitano la forza dell'agente elastico, le quali materie non trovandosi nè uniformemente distribuite, nè intimamente legate, non potranno ricevere un comune moto, ossia non essendo esse sollecitate con la stessa legge delle parti elastiche, non saranno interamente proiettate fuori dell'arma, come si appalesa dalla materia grassa, ed untuosa che si attacca alle pareti dell'anima. Per siffatta cagione avverrà qualche modificazione nella quantità

di moto $\frac{1}{2}\omega dv$, percui il coefficiente $\frac{1}{2}$ si dovrà convertire in un altro indeterminato z da stabilirsi cogli sperimenti, e quindi la forza sollecitante agirà sul peso $p+z\omega$ imprimendogli in ogni tempo dt la velocità dv.

Sostituendo nella formola (9. §.119) per p $p+z\omega$ si avrà

$$V=597,7a\sqrt{\frac{lm}{p+z\omega}\log\frac{L}{b}}.$$

In questa formola è calcolato ciò che abbiamo dichiarato nel §.117.

Tenendo conto della pressione e della resistenza, che l'aria esistente nell'arma oppone al proietto (§.112), risulterà

$$V=597,7\,a\sqrt{\frac{lm}{p+z\omega}\log\frac{L}{b}}-\frac{597,7a}{180}\sqrt{\frac{lm}{p+z\omega}\log\frac{L}{b}}\text{, e}$$

$$V=594a\sqrt{\frac{lm}{p+z\omega}\log\frac{L}{b}}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(10);$$

dalla quale

$$m=\frac{(p+z\omega)V^2}{(594)^2la^2\log\frac{L}{b}}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(11).$$

Facendo (§.94 Tav.XXI), $l=0^m,0645$. $b=0^m,0876$. $L=0^m,724$ $a=0^m,0497$, ed essendo $\omega=0^k,1132+0^k,0142=0^k,1274$, $V=336^m,4$. $p=0^k,4748$; e supposto $z=\frac{1}{2}$, emerge il seguente calcolo

$\log(p+\frac{1}{2}\omega)\,(=0^k,5385)$. . . .	9,73119
$\log V^2(=336^m,4)^2$.	5,05372
2com.log(594^m)	14,45242
com.log $l(=0^m,0645)$	1,19043
2 com.log $a\,(=0^m,0497)$	2,60728
com.log$\left(\log\frac{L}{b}\right)\left(=\frac{0,724}{0,0876}\right)$ . . .	0,03754
log m.	3,07258

$m=1182.$

121. Questo valore di m rappresenta la elasticità iniziale del fluido, nella supposizione che fra la palla e la carica vi sia

un corpo (§. 109), e che la polvere non sia stata rinchiusa in un sacchetto. Ma veramente negli sperimenti la carica è stata rinchiusa in cartocci di flanella: supponendo che anche lateralmente, ove trovasi la flanella, si ponga polvere, si avranno due cilindri della stessa altezza, uno composto della polvere nuda, e l'altro della stessa polvere più il sacchetto lateralmente convertito in polvere. Le forze fluide di questi cilindri seguendo la ragion del peso delle polveri (§. 81), staranno come i loro volumi, o come le rispettive basi. Essendo la spessezza della flanella $0^m,000635$ (§.94), il doppio è $0^m,001270$ che indicherà l'eccesso del diametro della base del cilindro esterno su quello interno: ma il diametro della base del primo è $0^m,049784$ (§.94. Tav. XXI), dunque quello del secondo sarà $0^m,049784 - 0^m,000635 = 0^m,049149$. E comecchè le superficie dei cerchi seguono il rapporto de' quadrati de' diametri, così

$$(0,049149)^2 : (0,049784)^2 :: 97 : 102 \text{ circa.}$$

In questa ragione si dovrà aumentare il valore di m per avere la elasticità del cilindro fluido considerando la flanella laterale convertita in polvere, sarà perciò tale elasticità

$$1182 \times \frac{102}{97} = 1182 + \frac{1}{19} \times 1182 = 1244 \text{ circa.}$$

Allorquando si eseguono i calcoli per le altre cariche, il corrispondente valore di m, trovato con un metodo identico a quello di sopra esposto, dovrà aumentarsi del suo diciannovesimo.

122. Supponiamo inoltre che anche le basi del sacchetto siano convertite in polvere: la elasticità 1244 va aumentata nella ragione di 0,064516 : 0,087630, o come 254 : 345 (§.94 Tav.XXI.). Pel nostro esempio $1244 \times \frac{345}{254} = 1244 + \frac{91}{254} \times 1244 = 1244 + 0,36 \times 1244 = 1691$ circa. Per le cariche di $0^k,2264$, e di $0^k,4534$ (=8 e 16 once ing.) gli aumenti saranno di $\frac{91}{508} = 0,17$, e di $\frac{91}{1016} = 0,08$ negli analoghi valori di m. I rapporti di $0^k,1290 : 0^k,1521$, e di $0^k,2580 : 0^k,2811$, per la lunghezza di queste due cariche a

nudo, e rivestite del sacchetto, sono rispettivamente eguali agli altri in interi di 508 : 599 ; e di 1016 : 1107 prossimamente.

Il valore di $m=1691$ esprimerà la elasticità iniziale del fluido allorchè la polvere è situata nuda nell' arma, e fra essa ed il proietto non si trovi corpo alcuno, ossia quando la palla stia a contatto con la polvere, cioè a dire nella supposizione di $l=b$ (§. 109).

123. Nella teorica si è proceduto come se il proietto fosse stato spinto tangenzialmente dalla base del cilindro fluido, ma veramente il mobile è spinto dal fluido cilindrico, il quale ne incalza mezza sfera, cioè crescendo detto fluido di un volume eguale ad un cilindro che abbia per base il cerchio massimo della palla e per altezza il raggio, meno il volume della mezza sfera, ossia cresce pel volume del solido scavato, ch'è eguale a $\frac{1}{2}a\times\theta a^2-\frac{1}{3}a\times\theta a^2=\frac{1}{6}\times 0^m,0497\times\theta a^2=0,0083\times\theta a^2$.

Premesso ciò il cilindro fluido ha per volume $b\times\theta a^2$; ed essendo le forze di uno stesso fluido e le elasticità, secondo Mariotte, nella ragione inversa de' volumi che occupa, si avrà

$$b\times\theta a^2 : b\times\theta a^2+0,0083\times\theta a^2 :: m : \text{al quarto ; o}$$

$$b : b+0,0083 :: m : m+\frac{0,0083}{b}m=1691+\frac{0,0083}{0,0876}.1691=1691+$$
$$0,09\times 1691=1843 \text{ circa.}$$

Per le altre due cariche il fratto $\frac{0,0083}{b}$ si cambia in

$\frac{0,0083}{0,1521}=0,05$ circa, ed in $\frac{0,0083}{0,2811}=0,03$ circa.

124. La perdita di fluido pel vento e pel focone si è detto essere la quarta parte della forza (§. 93), perciò nel fatto la elasticità ottenuta si dovrà aumentare del suo quarto. Dunque $1843+\frac{1843}{4}=1843+461=2304$ esprimerà la elasticità iniziale della polvere convertita in fluido occupando il medesimo spazio cilindrico dell' altezza $0^m,0876$.

Operando allo stesso modo per le cariche di $0^k,2264$ e $0^k,4534$, e per tutti gli altri pezzi indicati di sopra (§. 94. Tav. XX), si avrà la seguente tavola.

TAVOLA XXVIII.

NUMERO DEL PEZZO	LUNGHEZZA dell'anima L	CARICA DI POLVERE: peso	CARICA DI POLVERE: lunghezza di b	CARICA DI POLVERE: lunghezza di l	PESO DELLA PALLA, e metà della carica. $p+\frac{1}{2}\omega$	VELOCITÀ INIZIALE V	Elasticità iniziale. m	AUMENTO DI m: per la larghezza del sacchetto.	AUMENTO DI m: per la lunghezza del sacchetto.	AUMENTO DI m: per la sfericità.	AUMENTO DI m: pel vento e pel focone.	VELOCITÀ della fiamma. u	VELOCITÀ media della fiamma.
		k	m	m	k	m						m	
		0,1132	0,0876	0,0645	0,5385	336,4	1182	1244	1691	1843	2304	1410	
1°	m 0,274	0,2264	0,1526	0,1290	0,5986	436	1502	1581	1849	1941	2426	1244	
		0,4534	0,2811	0,2580	0,7200	420	1426	1501	1621	1669	2086	898	
		0,1132	0,0876	0,0645	0,5385	360	1192	1255	1706	1859	2324	1512	
2°	0,976	0,2264	0,1521	0,1290	0,5986	482	1607	1692	1979	2076	2595	1436	
		0,4534	0,2811	0,2580	0,7200	505	1526	1606	1734	1786	2230	1064	m 1404
		0,1132	0,0876	0,0645	0,5385	396,2	1238	1303	1772	1931	2414	1666	
3°	1,465	0,2264	0,1521	0,1290	0,5986	518,3	1662	1707	1997	2091	2620	1557	
		0,4534	0,2811	0,2580	0,7200	609	1670	1758	1898	1954	2442	1283	
		0,1132	0,0876	0,0645	0,5385	418	1231	1296	1762	1920	2400	1754	
4°	2,037	0,2264	0,1521	0,1290	0,5986	591,3	1664	1752	2049	2151	2689	1689	
		0,4534	0,2811	0,2580	0,7200	642	1549	1631	1761	1831	2267	1338	

125. Nella formola (10.§.120) facendo $l=b$ (§.109), avremo

$$V=594a\sqrt{\frac{bm}{p+z\omega}\log.\frac{L}{b}}\,,$$

appartenente alla palla che sta a contatto con la polvere, o per meglio dire allorchè l'intero sacchetto è convertito in polvere, ed ω esprime il peso di detta polvere.

Da questa formola si scorge che diminuendo il peso p del mobile senza alterare il diametro a, il valore di V crescerà. Al minimo valore di p corrisponderà il massimo per V; fatto $p=0$, e chiamando u un tale massimo, si otterrà

$$u=594a\sqrt{\frac{bm}{z\omega}\log\frac{L}{b}}\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

La u com'è chiaro, esprimerà la velocità della fiamma, o vero del fluido elastico alla bocca dell'arma.

Per applicare questa formola ai nostri casi, bisogna rinvenire i valori di ω per le tre quantità di polvere. Per la prima carica di $0^k,1132$ (=once 4.ing), e pel sacchetto convertito in polvere si ha (§. 121) $0^k,1132+\frac{1}{10}\times 0^k,1132=0^k,1192$ circa, e (§.122) $254:345::0^k,1192$ al quarto ω il cui logaritmo viene eguale a $\log.0,1192+\log 345-\log 254=9,20927$, ed $\omega=0^k,1619$. Per la carica di $0^k,2274$ (= once 8) si avrà $0^k,2264+\frac{1}{10}\times 0^k,2264=0^k,2383$; e $508:599::0^k2383:\omega$, $\log\omega=\log.0,2383+\log 599-\log 508=9,44869$ e $\omega=0^k,281$. Infine quella di $0^k,4534$ (=once 16) dà $0,4534+\frac{1}{10}\times 0,4534=0^k,4773$, e $1016:1107::0^k,4773:\omega$, in conseguenza $\log\omega=\log.0,4773+\log 1107-\log 1016=9,71605$ ed $\omega=0^k,5201$.

Sostituendo nella formola (12) i dati per la prima carica e pel pezzo N.° 1, si avrà

$\log(594)^2$	5,54758
$\log a^2(=0^m,0497)^2$	7,39272
$\log b(=0^m,0876)$	8,94250
$\log\left(\log\frac{L}{b}\right)\left(=\frac{0,724}{0,0876}\right)$	9,96246
$\log m(=2304)$	3,36248
. . . . .	15,20774
$\log\frac{1}{2}\omega(=\frac{1}{2}.0^k,1619)(=0^k,08095)$.	8,90822
$\log u^2$	6,29952

$$u=1410^m \text{ circa},$$

velocità della fiamma alla bocca dell'arma.

La stessa formola applicata per le altre cariche e bocche da fuoco enunciate (§. 94. Tavola XX e XXI), dà le velocità delle fiamme riferite nella tredicesima colonna della tavola ultima. Per ottenere la loro media, se ne fa la somma e si divide per dodici, il quoziente 1404^m indicherà la velocità della fiamma. Ma un tal valore è molto discorde dal vero, percioc-

chè non è compreso fra 1525^m e 1677^m (§. 119); dunque conviene che z assuma un valore minore di $\frac{1}{3}$. Si faccia $z=\frac{1}{3}$ e si eseguano gli stessi calcoli enunciati in questo e nell'antecedente paragrafo. Si avrà la seguente

TAVOLA XXIX.

NUMERO DEL PEZZO	LUNGHEZZA dell'anima L	CARICA DI POLVERE: peso	CARICA DI POLVERE: lunghezza di b	CARICA DI POLVERE: lunghezza di l	PESO DELLA PALLA, e terzo della carica. $p+\frac{1}{3}\omega$	VELOCITÀ INIZIALE V	Elasticità iniziale. m	AUMENTO DI m: per la larghezza del sacchetto.	AUMENTO DI m: per la lunghezza del sacchetto.	AUMENTO DI m: per la sfericità.	AUMENTO DI m: pel vento e pel focone.	VELOCITÀ della fiamma. u	VELOCITÀ media della fiamma.
		^{k}0,1132	^{m}0,0876	^{m}0,0645	^{k}0,5173	^{m}336,4	1135	1195	1625	1771	2213	^{m}1690	
1°	^{m}0,724	0,2264	0,1521	0,1290	0,5573	436	1399	1473	1723	1818	2272	1473	
		0,4534	0,2811	0,2580	0,6383	420	1263	1330	1436	1479	1848	1034	
		0,1132	0,0876	0,0645	0,5173	360	1145	1205	1638	1785	2231	1813	
2°	0,976	0,2264	0,1521	0,1290	0,5573	482	1497	1575	1842	1934	2417	1659	
		0,4534	0,2811	0,2580	0,6383	505	1353	1424	1537	1583	1979	1228	^{m}1649
		0,1132	0,0876	0,0654	0,1573	396,2	1189	1253	1702	1855	1319	1998	
3°	1,465	0,2264	0,1521	0,1290	0,5573	545,9	1510	1589	1859	1944	2430	1836	
		0,4534	0,2811	0,2580	0,6383	609	1418	1559	1683	1733	2168	1463	
		0,1132	0,0876	0,0645	0,5173	418	1183	1245	1693	1845	2306	2105	
4°	2,037	0,2264	0,1521	0,1290	0,5573	591,3	1549	1631	1908	2003	2503	1933	
		0,4534	0,2811	0,2580	0,6383	642	1373	1445	1560	1605	2007	1560	

La somma de' numeri della tredicesima colonna è 19792^m, la cui dodicesima parte è 1649^m circa, numero compreso fra 1525^m e 1677^m (§. 119); per cui il valore $\frac{1}{3}$ assegnato a z è quello che fa coincidere le applicazioni con la teorica, in conseguenza sarà il richiesto coefficiente di ω.

Il numero medio della dodicesima colonna è $\frac{26693}{12} = 2224$ circa, ch'esprimerà il vero valore di m il quale si può prendere per 2200, numero rotondo per rendere più facili i calcoli, non arrecando un sì lieve cambiamento alterazione sensibile nelle applicazioni, ad esempio di Hutton (V).

Nelle formole dunque in cui fanno parte m e z allorchè si fa $z=\frac{1}{3}$, ed $m=2200$ si dovranno avere i risultamenti numerici prodotti dall'accensione istantanea, e grado di calore costante, eguali a quelli che si hanno col fatto con l'accensione progressiva della intera carica; e ciò perchè il valore di m si è ottenuto mediante velocità iniziali stabilite su di accurati sperimenti, come pure quello di z è fissato sullo sperimento della velocità della fiamma. Segue da ciò che $\frac{2}{3}$ della carica si debbano considerare accesi istantaneamente, ed $\frac{1}{3}$ si debba considerare come inalterabile, facendo un tutto col peso del proietto.

Si sono nelle tavole ultime modificati alcuni valori per poco, perchè in origine i numeri in esse notati si sono ottenuti con i calcoli facendo uso delle misure inglesi, poscia abbiamo convertite queste misure in metri e kilogrammi, anzichè risolvere un'altra volta le formole: per cui i risultamenti che si otterrebbero, se i calcoli si volessero ripetere con la misura metrica, non potrebbero differire da quelli in parola che per frazioni piccolissime, come sempre avviene allorquando una misura si vuole convertire in un'altra.

Dalla tavola ultima se ne ritrae l'altra.

(V) Hutton. Nouvelles expériences d'artillerie pag. 214, trad. par Terquem.

Digitized by Google

TAVOLA XXX.

CARICA	PEZZO n.° 1.	PEZZO n.° 2.	PEZZO n.° 3.	PEZZO n.° 4.
	Elasticità iniziale del fluido			
$0^k,1132$	2213	2231	2319	2308
0,2264	2272	2417	2430	2503
0,4534	1848	1979	2168	2007

Scorgesi che per ciascuna carica di polvere generalmente i numeri aumentano di poco per le varie lunghezze di anima.

Questo aumento deriva dal che il fluido elastico agisce per più tempo nelle anime più lunghe. Il 2007 si trova minore di 2168 perchè la carica di $0^k,4534$ è quella del massimo effetto pel pezzo N.° 3, e quella pel pezzo N.° 4 è di $0^k,5094$ (§. 95. Tav. XXII), per cui nell' insieme de' calcoli la forza della polvere nell' uno pezzo è maggiore di quella dell' altro.

I numeri della prima linea orizzontale sono rispettivamente minori di quelli della seconda, come dovea succedere, perciocchè è vero che con la carica di $0^k,1132$ il mobile sta più lungo tempo nell' anima di quello che vi sta con la carica di $0^k,2264$, ma è vero altresì che in questo secondo caso ci è un eccedente compenso nella forza che ha azione sul mobile. Un tal compenso non si osserva paragonando i numeri della terza colonna con quelli della seconda, e ciò deriva che la dalla è proporzionatamente più vicino alla bocca allorchè la carica è di $0^k,4534$. Le conseguenze di Hutton su tal subbietto (X) variano per poco dalle esposte, perchè i suoi calcoli sono stabiliti

(X) Hutton. Nouvelles expériences d' artillerie pag. 214. trad. par Terquem.

su talune velocità errate nella scelta. Infatti la velocità di $435^m,9$ appartiene alla carica di $0^k,2264$ (§.94. Tav. XXI), intanto è sostituita alla carica di $0^k,4534$, e quella di $0^k,1698$ cioè $408^m,4$ è valutata come appartenente a $0^k,2264$, tutto ciò pel pezzo numero 1, ma la massima velocità con la carica di $0^k,3396$ è $437^m,7$ (§. 95. Tav. XXII); dunque vi è errore; come pure in diverse velocità degli altri pezzi. Per convincersi maggiormente di quello che discorriamo basta solamente confrontare le velocità, le quali si rapportano nella pagina 132, con quelle della pagina 210, nella citata opera di Hutton tradotta da Terquem.

126. Il numero 2200, rinvenuto mediante sperimenti accurati che ne fermano la certezza, rappresenta la elasticità del fluido che svolge la polvere accesa occupando lo spazio medesimo che occupava prima della combustione, con esservi compreso il grado di forza che emana il calorico inerente all'accensione. E siccome la elasticità del fluido rapportata a quella dell'aria nello stato naturale è 244 (§. 107); così $\frac{2200}{244} = 9$ circa, dimostra che il calore della fiamma rende nove volte maggiore in vece di quattro (§. 107), la forza del fluido in discorso, il quale si svolge dalla polvere adoperata come carica nelle armi da fuoco.

Essendo $10^m,39$ l'altezza della colonna di acqua il cui peso equilibra lo sforzo dell'aria, sarà $2200 \times 10^m,39 = 22858$ metri l'altezza della colonna di acqua il cui peso pareggia lo sforzo del fluido che svolge la polvere.

Non cade dubbio, parlando in generale, che se la polvere agisse con tutta la efficacia di cui è capace, non vi sarebbe recipiente di metallo, chiuso ermeticamente, atto a poter resistere agli sforzi del fluido in parola. Ma comunque la cosa sia, nelle bocche da fuoco cedendo il proietto ai primi conati del fluido, gli sforzi di questo contro le pareti dell'anima restano attenuati. E perchè il numero 2200 è ricavato dai valori sperimentali delle

velocità iniziali, perciò esso è quello da competere al fluido della polvere, posta però come carica, quantunque adoperata in tutt'altro modo come agente elastico, produca una forza maggiore, o per meglio dire in questa teorica la elasticità, e quindi la forza fluida della polvere, è stata misurata dagli effetti che si richieggono dalle artiglierie, e non già da quelli che ad esse sono estranei, come per esempio sarebbero, nelle nostre teoriche, male applicate le conseguenze ricavate dagli sperimenti di Robins, di Rumfort e di altri (§. 107).

TEORICA VII.

Velocità massima. Cariche in generale, e peso corrispondente paragonato a quello del proietto.

127. Facendo nella formola (10. §. 120) $l=b$, e $z=\frac{1}{3}$ (§. 125) si avrà

$$V=594a\sqrt{\frac{bm}{p+\frac{1}{3}\omega}\log\frac{L}{b}},$$

per la velocità iniziale del proietto, allorchè la polvere non trovasi rinchiusa nel cartoccio.

Sia n la gravità specifica del mobile, e γ quella della polvere. Si avrà $p=\frac{2}{3}n\cdot\theta a^3$, ed $\omega=\gamma\cdot b\theta a^2$; in conseguenza

$$V=594a\sqrt{\frac{3bm}{2n\theta a^3+\gamma b\theta a^2}\log\frac{L}{b}};$$

eseguendo le riduzioni, risulta

$$V^2=\frac{3\times\overline{594}^2\times m}{\theta}\times\frac{b}{2na+\gamma b}\times\log\frac{L}{b}\quad\ldots\ldots(13)$$

formola semplicissima per valutare la velocità iniziale.

Facendo $\frac{b}{a}=q$, $\frac{L}{a}=Q$, si ottiene

$$V^2=\frac{3\times\overline{594}^2\times m}{\theta}\times\frac{q}{2n+\gamma q}\times\log\frac{Q}{q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

altra formola della velocità iniziale del proietto in funzione de' rapporti delle lunghezze dell' anima e della carica al diametro del proietto, cioè tali lunghezze sono espresse coi numeri de' calibri del mobile.

In queste formole non è considerato nè il vento, nè lo sfogo del focone, ciò non pertanto la pratica ne può trarre conseguenze utilissime.

L' ultima formola è identica all' altra

$$V^2=\frac{3\times\overline{594}^2\times m}{2,30258\times\theta}\times\frac{q}{2n+\gamma q}\times 2,20258\log\frac{Q}{q}=$$

$$\frac{3\times\overline{594}^2\times m}{2,30258\times\theta}\times\frac{q}{2n+\gamma q}\times\log\cdot\mathrm{ip}\frac{Q}{q}.$$

Per conoscere quando V^2 risulti un massimo allorchè varia q, ossia la carica di polvere, bisogna prendere il coefficiente differenziale di V^2 rispetto a q ed eguagliarlo a zero. Il Q è costante, giacchè tanto la lunghezza dell' anima, quanto il diametro del proietto sono dati.

Onde

$$\frac{d\cdot V^2}{dq}=\frac{3\cdot\overline{594}^2\cdot m}{2,30258\cdot\theta}\left[\frac{2n}{(2n+\gamma q)^2}\log\cdot\mathrm{ip}\frac{Q}{q}-\frac{1}{2n+\gamma q}\right], \text{ e}$$

$$\frac{2n}{(2n+\gamma q)^2}\log\cdot\mathrm{ip}\frac{Q}{q}-\frac{1}{2n+\gamma q}=0, \text{ da cui}$$

$$\log\cdot\mathrm{ip}\frac{Q}{q}=1+\frac{\gamma}{2n}q, \text{ o pure } 2,30258\log\frac{Q}{q}=1+\frac{\gamma}{2n}q \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Per avere una equazione di condizione pel massimo scevra di logaritmi si noti, che (§.76)

$$\frac{Q}{q}=\frac{1+\frac{1}{2}\log\cdot\text{ip}\frac{Q}{q}}{1-\frac{1}{2}\log\cdot\text{ip}\frac{Q}{q}}\text{, dalla quale } \log\cdot\text{ip}\frac{Q}{q}=\frac{2Q-2q}{Q+q}=$$

$1+\frac{\gamma}{2n}q$: e riducendo

$$q^2+\left(\frac{6n}{\gamma}+Q\right)q=\frac{2n}{\gamma}Q. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

ch' è l' equazione di condizione, perchè la velocità iniziale sia un massimo.

128. Per rinvenire la carica in parti del peso del proietto, si stabilisca la proporzione

$$p:\omega::\tfrac{2}{3}n\cdot\theta a^3:\gamma b\cdot\theta a^2::\tfrac{2}{3}na:\gamma b\text{, e}$$

$$\omega=\frac{3\gamma}{2n}q\cdot p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Se per q in questa formola si sostituisca il rispondente valore per una data carica, per ω si avrà il peso di essa in funzione del peso p del proietto. Se poi per q si sostituisca il valore preso dalla formola (15. §. 127), per ω si avrà la carica della massima velocità.

129. Le formole (14.15.16.§§.127.128.) specialmente applicate pei proietti di ferro fuso si modificano in altre più semplici, fondate su i dati seguenti.

La $n=7407^k$, $\gamma=934^k$ secondo Hutton, onde la formola (14. §. 127) dà

$$V^2=\frac{3\cdot\overline{594}^2m}{\theta}\times\frac{q}{14814+934\cdot q}\times\log\frac{Q}{q}\text{;}$$

e perchè $14814+934q=925,8(16+1,008q)$, o prossimamente $925,8(16+q)$, perciò

$$V^2=\frac{3\cdot\overline{594}^2\cdot m}{\theta\cdot 925,8}\times\frac{q}{16+q}\log\frac{Q}{q}\text{; dalla quale}$$

$$V=\sqrt{\frac{3\cdot 594^2\cdot m}{\theta\cdot 925,8}}\sqrt{\frac{q}{16+q}\times\log\frac{Q}{q}}\text{ ; e}$$

log 3	0,47712
2 log 594	5,54758
log m (=2200).....	3,34242
com. log θ (=0,785).....	0,10513
com. log 925,8	7,03348
	6,50573 , la metà è
	3,25286 , il N.° è
	1790^m circa

valore del primo radicale; e quindi

$$V=1790\sqrt{\frac{q}{16+q}\times\log\frac{Q}{q}}\quad\ldots\ldots\quad(17).$$

La formola (15.§.127) dà $q^2+\left(\frac{6\times 7407}{934}+Q\right)q=\frac{14814}{934}Q$,

o pure senza notabile errore

$$q^2+(48+Q)q=16Q,\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(18),$$

e la (16. §. 128) diventa $\omega=\frac{3.934}{14814}qp$, ossia prossimamente

$$\omega=0,19\,qp\quad\ldots\ldots\ldots\quad(19).$$

Le formole dalla 14ª fino alla 19ª appartengono a tutti i proietti, qualunque ne siano i diametri, giacchè q e Q esprimono rapporti e non quantità assolute.

Sia $\frac{L}{a}=10=Q$, la formola (18) dà

$q^2+58q=160$; le radici sono

$$q=-29-31,64=-60,64$$
$$q=-29+31,64=+2,64.$$

La radice positiva indica che la carica della massima velocità ; in tutte le armi che hanno per lunghezza di anima dieci calibri, è di calibri 2,64 : questo valore posto in (19) dà la carica in parti del peso del proietto.

La formola (17) dà

$$\log\frac{Q}{q}\left(=\frac{10}{2,64}\right) \ldots\ldots\ldots \quad 0,57840$$

$$\log\left(\log\frac{Q}{q}\right) \ldots\ldots\ldots \quad 9,76223$$

$$\log q\ (=2,64) \ldots\ldots\ldots \quad 0,42160$$

$$\text{com.}\log\ (16+q)(=18,64) \ldots \quad 8,72955$$

$$\log\left(\frac{q}{16+q}\log\frac{Q}{q}\right) \ldots\ldots\ldots \quad 8,91338, \text{ la metà}$$

$$\log\sqrt{\frac{q}{16+q}\log\cdot\frac{Q}{q}} \ldots\ldots \quad 9,45669$$

$$\log 1790 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3,25285$$

$$\log V \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2,70954$$

$$V=512^{m},$$

ch'è la velocità massima.

Dalla formola (19) si ottiene $\omega=0,19\times2,64p=0,50p$ per la carica del massimo effetto.

La formola (a. §. 127) può anche servire per la ricerca della carica del massimo effetto per un'arma assegnata.

Applicata alle bocche da fuoco che spingono proietti di ferro fuso, avremo $\frac{\gamma}{2n}=\frac{934}{2.7407}=0,06$: e quindi, in questo caso, la equazione di condizione diventa

$$2,30258\ \log\frac{Q}{q}=1+0,06q$$

o pure

$$\log\cdot\frac{Q}{q}=0,43429+0,026q \ldots\ldots\ldots \text{(b)}.$$

Esempio. Sia $Q=20$ calibri, si domanda q.

Questa formola va risoluta con la falsa posizione: a tale oggetto sia $q=2$ la prima posizione, avremo $1=0,43429+0,052=0,48629$: il primo membro è maggiore del secondo per 0,51371, ovvero si è commesso un errore in più di 0,51371.

Si ponga $q=4$ per seconda posizione, si otterrà $0,69897=0,43429+0,104=0,53829$: il primo membro è maggiore del secondo, onde si è commesso un errore in più di 0,16068.

QUADRO DELLA REGOLA

1.ª posizione $q=2$ . . . . . 2.ª posizione $q=4$.

$\times$

1.° errore $+$ 0,51371 . . . . . 2.° errore $+$ 0,16068

Dunque $q=\frac{4\times0,51371-2\times0,16068}{0,51371-0,16068}=4,9$ circa:

perciò in tutti i pezzi lunghi 20 calibri, la carica del massimo effetto è calibri 4,9.

La formola (17, §. 129) dà

$$V=1790\sqrt{\frac{4,9}{16+4,9}\log.\frac{20}{4,9}}=677^{m},$$

per la velocità massima.

Operando con la formola (18), per altre lunghezze di anima, si avrà la seguente:

TAVOLA XXXI.

Q	q	$\frac{Q}{q}$	PESO della polvere	VELOCITÀ massima.
2	0,63	3,171	12	247m
4	1,20	3,333	23	342
6	1,72	3,488	33	411
8	2,20	3,636	42	466
10	2,64	3,786	50	512
12	3,05	3,934	58	553
14	3,43	4,082	65	588
16	3,78	4,233	71	620
18	4,11	4,380	78	648
20	4,42	4,525	84	674
22	4,71	4,671	90	699
24	4,99	4,810	95	721
26	5,25	4,952	100	742
28	5,50	5,091	105	761
30	5,73	5,235	109	780
32	5,96	5,369	113	797
34	6,17	5,510	117	813
36	6,35	5,651	121	829
38	6,56	5,793	125	843
40	6,75	5,926	128	857
42	6,93	6,061	132	871
44	7,10	6,197	135	884
46	7,27	6,328	138	896
48	7,43	6,460	141	908
50	7,58	6,594	143	919
52	7,72	6,736	146	930
54	7,86	6,870	149	940
56	8,00	7,000	152	950
58	8,13	7,134	155	960
60	8,26	7,264	157	970

La prima colonna presenta la lunghezza dell'anima dell'arma in calibri del proietto; la seconda la lunghezza della carica massima, anche essa in calibri; la terza il rapporto della lunghezza dell'anima alla lunghezza di detta carica; la quarta indica il peso della carica di polvere in centesimi del peso del proietto; e l'ultima la velocità massima del mobile.

Riguardo alla detta tavola Hutton dice . . . . .

« Infine si può osservare che questa tavola e le regole pre-

« cedenti; essendo dedotte da gran numero di sperimenti eseguiti « con molta accuratezza, possono servire nella pratica in maniera « assai più conveniente al bisogno di tutto quello che si è fatto « su questa materia fino al tempo presente ». Si vuol qui notare che la esposta tavola, pe' numeri 16.20.30.40 della prima colonna, presenta per la lunghezza delle massime cariche in calibri i numeri 3,78. 4,42. 5,73. 6,75, i quali poco differiscono da 3,88. 4,53. 5,18. 5,83, rinvenuti cogli sperimenti inseriti nella tavola XXII (§. 95). Questo ravvicinamento ne' risultamenti in disamina è una tacita pruova della quasi certezza di quello che in questa teorica, e nelle altre antecedenti abbiamo dichiarato.

Se poi le velocità analoghe nell'ultima tavola non corrispondono esattamente a quelle della tavola XXII, la ragione si è, che in questa i proietti hanno un vento, e le armi un focone; le quali circostanze, che allora non si sono considerate formano l'oggetto della seguente teorica.

TEORICA VIII.

Velocità iniziale in funzione delle superficie del focone, e del vento.

130. Nelle discorse teoriche si sono considerate le circostanze del moto che accompagnano il proietto nello scorrere l'anima della bocca da fuoco. Resta ad esaminare la influenza che ha sulla velocità iniziale la perdita del fluido motore pel focone e pel vento. Facendo la densità dell'aria eguale all'unità.

Sia a = al calibro della palla;
q' = alla densità del proietto;
n' = a quella della polvere;
k = all'altezza di un cilindro di aria pesante quanto la palla;
D = 244 è la densità del fluido che svolge la polvere accesa (§. 107);

z = al coefficiente indicante la parte del peso del fluido elastico che fugge pel focone ingrandito, durante il tempo che il proietto si trova alla distanza x dal fondo dell'anima;

s = alla densità di questo fluido dilatato.

Per agevolare il calcolo supporremo, che la perdita del fluido elastico pel focone e pel vento si faccia solo per un focone ingrandito della superficie del vento, o ch'è lo stesso, si considera l'arma col solo focone aumentato. Sia perciò φ il numero che indica il rapporto fra il cerchio massimo della palla, al cerchio massimo dell'anima diminuito del cerchio massimo della palla ed aggiuntovi quello del focone dato: dimodochè facendo

c = al calibro dell'anima,

c' = a quello del focone dato, verrà

$\varphi = \frac{\theta a^2}{\theta c^2 - \theta a^2 + \theta c'^2} = \frac{a^2}{c^2 - a^2 + c'^2}$; ossia rapporto fra il cerchio massimo della palla, e la superficie per la quale sfugge il fluido in pura perdita.

Il peso del fluido svolto da quella parte di polvere che si considera accesa istantaneamente (§. 126) verrà espresso dal volume moltiplicato per la gravità specifica, la quale è eguale alla gravità g moltiplicata per la densità D, cioè da $\theta a^2 \cdot \frac{2}{3} bgD$. Quello della polvere che si considera inalterabile nell'accensione sarà $\theta a^2 \cdot \frac{1}{3} bgn'$ (§. 126).

Essendo $\frac{\theta a^2}{\varphi}$ la superficie del focone ingrandito, il peso del fluido che ne sfugge nel tempo che la palla si avanza per x dal fondo, verrà rappresentato da $\theta a^2 \cdot \frac{2}{3} bgDz$; onde il peso del fluido elastico che rimarrà agente sul proietto risulterà

$$\theta a^2 \cdot \tfrac{2}{3} bgD - \theta a^2 \cdot \tfrac{2}{3} bgDz = 244\, \theta a^2 \cdot \tfrac{2}{3} (1 - z) g.$$

Spingendosi la palla pel cammino x dal fondo, il fluido elastico si troverà disteso per un cilindro dell'altezza $x - \frac{1}{3} b$,

la cui densità si è chiamata s; il volume corrispondente sarà $\theta a^2(x-\frac{1}{3}b)$, il quale considerato come fosse di aria, peserà $\theta a^2(x-\frac{1}{3}b)g$: ma ad eguali volumi i pesi seguono il rapporto geometrico delle densità: dunque

$$244\theta a^2 \cdot \tfrac{2}{3}b(1-z)g : \theta a^2(x-\tfrac{1}{3}b)g :: s : 1 \text{ , ed}$$

$$s = 244\frac{\frac{2}{3}b(1-z)}{x-\frac{1}{3}b} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a).$$

Sia H l'altezza della colonna di aria ch'equilibra la elasticità del fluido, allorchè la temperatura si considera eguale a quella dell'atmosfera, sarà βH l'altezza di una colonna di aria che equilibra la elasticità iniziale di detto fluido, allorchè si considera il forte grado di temperatura, ossia $\beta=9$ (§. 126).

Nel caso del fluido dilatato per $x-\frac{1}{3}b$ in cui la densità è s, sarà βHs l'altezza di una colonna di aria, che in peso pareggia lo sforzo del fluido elastico dilatato. Da ciò si ricava che una tal forza assoluta verrà espressa dal peso $\theta a^2\beta Hgs$.

La forza sollecitante è $F=M\frac{dv}{dt}$ in generale (§. 51), dà $\theta a^2k.\frac{dv}{dt}=$

$\theta a^2k.\frac{vdv}{dx}=\theta a^2kg.\frac{dh}{dx}$ per la palla;

$\theta a^2n'\frac{1}{3}bg\frac{dh}{dx}$ per la polvere che non si accende;

$244\theta a^2\frac{2}{3}bg(1-z)\frac{dh}{dx}$ pel fluido che agisce contro il mobile.

Perciò l'effetto totale risulterà

$$\theta a^2g\left[k+\tfrac{1}{3}n'b+244.\tfrac{2}{3}b(1-z)\right]\frac{dh}{dx} \;;$$

il quale dovrà pareggiare la cagione, ovvero la forza assoluta del fluido; dunque

$$\left[k+\tfrac{1}{3}n'b+244.\tfrac{2}{3}b(1-z)\right]dh=\beta Hsdx \quad . \; . \; . \; . \quad (b).$$

Si è qui trascurato la influenza dell'aria che trovasi nell'arma per le ragioni dette antecedentemente (§. 112).

Allorchè il mobile percorre nel tempo dt uno spazio dx, ossia

quando il fluido si distende per dx, il rispondente cilindro elementare che sfugge pel focone nello stesso tempo, abbia per altezza dy. Ed ε sia l'altezza dovuta alla velocità con la quale il fluido sfugge pel focone, verrà $\varepsilon=\beta H$; avremo perciò

$$\sqrt{2gh}:\sqrt{2g\varepsilon}::\frac{dx}{dt}:\frac{dy}{dt}\text{; e quindi}$$

$$dy=\frac{dx\sqrt{2g\varepsilon}}{\sqrt{2gh}}=\frac{dx\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{h}}=\frac{dx\sqrt{\beta H}}{\sqrt{h}};$$

altezza della colonna fluida elementare che esce dal focone, la quale è s volte più densa dell'aria.

Il peso che ne risulta viene $\frac{\theta a^2}{\varphi}\times\frac{sdx\sqrt{\beta H}}{\sqrt{h}}\cdot g$; in conseguenza avrà luogo l'equazione $244\cdot\theta a^2\cdot\frac{2}{3}bgdz=\frac{\theta a^2}{\varphi}\times\frac{sdx\sqrt{\beta H}}{\sqrt{h}}\cdot g$,

ossia $$244\cdot\tfrac{2}{3}bdz=\frac{sdx\sqrt{\beta H}}{\varphi\sqrt{h}}\quad\ldots\ldots\quad(c),$$

e $$sdx=\frac{244\cdot\frac{2}{3}b\varphi dz\sqrt{h}}{\sqrt{\beta H}}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(d);$$

sostituendo per s il suo valore preso da (a), si avrà

$$\frac{dz}{1-z}=\frac{dx}{x-\frac{1}{3}b}\times\frac{\sqrt{\beta H}}{\varphi\sqrt{h}}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(f).$$

Ponendo in (b) il valore di $sdx(d)$ viene

$[k+\frac{1}{3}n'b+244\cdot\frac{2}{3}b(1-z)]dh=244\cdot\frac{2}{3}b\varphi\sqrt{h}\sqrt{\beta H}\cdot dz$; dunque

$$dz=\left(\frac{k+\frac{1}{3}n'b+244\cdot\frac{2}{3}b}{244\cdot\frac{2}{3}b\cdot\varphi\sqrt{h}\sqrt{\beta H}}-\frac{z}{\varphi\sqrt{h}\cdot\sqrt{\beta H}}\right)dh\text{; e quindi}$$

$$dz+\frac{zdh}{\varphi\sqrt{h}\sqrt{\beta H}}=\frac{k+\frac{1}{3}n'b+244\cdot\frac{2}{3}b}{244\cdot\frac{2}{3}b\varphi}\times\frac{dh}{\sqrt{h}\sqrt{\beta H}}=$$

$$\left(\frac{k+\frac{1}{3}n'b}{244\cdot\frac{2}{3}b}+1\right)\frac{dh}{\varphi\sqrt{h}\sqrt{\beta H}}.$$

Facendo per brevità $\frac{k+\frac{1}{3}n'b}{244\cdot\frac{2}{3}b}=\delta$, e $\sqrt{\beta H}=2\alpha$, si avrà

$$dz+\frac{zdh}{2\varphi\alpha\sqrt{h}}=(\delta+1)\frac{dh}{2\varphi\alpha\sqrt{h}}.$$

Per eseguire la integrazione si moltiplichino ambi i membri pel fattore differenziale $e^{\frac{\sqrt{h}}{\varphi\alpha}}$, e si ottiene

$$e^{\frac{\sqrt{h}}{\varphi\alpha}}dz+\frac{e^{\frac{\sqrt{h}}{\varphi\alpha}}zdh}{2\varphi\alpha\sqrt{h}}=(\delta+1)e^{\frac{\sqrt{h}}{\varphi\alpha}}\frac{dh}{2\varphi\alpha\sqrt{h}},$$ ed integrando si ha

$$e^{\frac{\sqrt{h}}{\varphi\alpha}}\cdot z=(\delta+1)\int e^{\frac{\sqrt{h}}{\varphi\alpha}}\cdot\frac{dh}{2\varphi\alpha\sqrt{h}}=(\delta+1)\left(e^{\frac{\sqrt{h}}{\varphi\alpha}}+C\right).$$

Ma quando la velocità è zero, cioè quando $h=0$ dovrà essere pure $z=0$, quindi $0=1+C$, dunque $C=-1$: e l'integrale corrispondente viene

$$e^{\frac{\sqrt{h}}{\varphi\alpha}}\cdot z=(\delta+1)\left(e^{\frac{\sqrt{h}}{\varphi\alpha}}-1\right);\ \text{e}\ z=(\delta+1)\left(1-e^{-\frac{\sqrt{h}}{\varphi\alpha}}\right)=$$

$$\delta+1-(\delta+1)e^{-\frac{\sqrt{h}}{\varphi\alpha}},\ \text{ed}\ 1-z=(\delta+1)e^{-\frac{\sqrt{h}}{\varphi\alpha}}-\delta;\ \log(1-z)=$$

$$\log\left[(\delta+1)e^{-\frac{\sqrt{h}}{\varphi\alpha}}-\delta\right];\ \text{differenziando}$$

$$-\frac{dz}{1-z}=\frac{(\delta+1)\,e^{-\frac{\sqrt{h}}{\varphi\alpha}}\times-\frac{dh}{2\varphi\alpha\sqrt{h}}}{(\delta+1)\,e^{-\frac{\sqrt{h}}{\varphi\alpha}}-\delta};\ \text{riducendo}$$

$$\frac{dz}{1-z}=\frac{(\delta+1)\frac{dh}{2\varphi\alpha\sqrt{h}}}{\delta+1-\delta.e^{\frac{\sqrt{h}}{\varphi\alpha}}};\ \text{per l' equazione}\ (f)\ \text{si ottiene}$$

$$\frac{dx}{x-\frac{2}{3}b}\times\frac{2\alpha}{\varphi\sqrt{h}}=\frac{(\delta+1)\frac{dh}{2\varphi\alpha\sqrt{h}}}{\delta+1-\delta e^{\frac{\sqrt{h}}{\varphi\alpha}}};\ \text{da cui}\ \frac{dx}{x-\frac{2}{3}b}=\frac{(\delta+1)\frac{dh}{4\alpha^2}}{\delta+1-\delta e^{\frac{\sqrt{h}}{\varphi\alpha}}},$$

e perciò

$$\frac{4\alpha^2 dx}{x-\frac{1}{3}b}=\frac{(\delta+1)dh}{\delta+1-\delta e^{\frac{\sqrt{h}}{\varphi\alpha}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (g).$$

Supponiamo primieramente che φ sia un numero grandissimo, come spesso avviene nelle bocche da fuoco, e si avrà presso a poco $e^{\frac{\sqrt{h}}{\varphi\alpha}}=1+\frac{\sqrt{h}}{\varphi\alpha}$; sostituendo nella equazione ultima un tal valore, verrà

$\frac{4\alpha^2 \cdot dx}{x-\frac{1}{3}b}=\frac{\varphi\alpha(\delta+1)dh}{\varphi\alpha-\delta\sqrt{h}}$. Inoltre essendo $\frac{\varphi\alpha}{\varphi\alpha-\delta\sqrt{h}}=1+\frac{\delta\sqrt{h}}{\varphi\alpha-\delta\sqrt{h}}$ per l'effettiva divisione: e ponendo per condizione che φ sia un numero grandissimo, ne risulta che $\delta\sqrt{h}$ è trascurabile rispetto a $\varphi\alpha$; e perciò si ha senza errore sensibile

$$\frac{\varphi\alpha}{\varphi\alpha-\delta\sqrt{h}}=1+\frac{\delta\sqrt{h}}{\varphi\alpha}\text{; dunque}$$

$$\frac{4\alpha^2 dx}{x-\frac{1}{3}b}=(\delta+1)\left(1+\frac{\delta\sqrt{h}}{\varphi\alpha}\right)dh=(\delta+1)dh+\frac{\delta(\delta+1)}{\varphi\alpha}\cdot dh\sqrt{h}\,;$$

integrando

$$4\alpha^2 \log.\mathrm{ip}(x-\tfrac{1}{3}b)=(\delta+1)h+\frac{2\delta(\delta+1)}{3\varphi\alpha}h^{\frac{3}{2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (h).$$

Se non si perdesse fluido pel focone, il valore di φ diverrebbe infinito, ed il coefficiente di $h^{\frac{3}{2}}$ svanirebbe. Esprimendo con w il valore che assume h in tal caso, ne viene

$$(\delta+1)w=4\alpha^2 \log \mathrm{ip}\,(x-\tfrac{1}{3}b) \quad . \; . \; . \; . \; (l);$$

equazione che ci dà a conoscere la velocità del proietto allorchè non vi è perdita di fluido, nè pel vento nè pel focone, ponendo però per x quella parte di lunghezza di anima misurata dal fondo fino al proietto. Ed affinchè w dipenda da h e viceversa, fra (h) ed (l) si elimini $4\alpha^2 \log.\mathrm{ip}\,(x-\frac{1}{3}b)$; quindi si rinviene $h=w-\frac{2\delta}{3\varphi\alpha}h^{\frac{3}{2}}$; per tanto, ad esempio di Eulero, si può fare prossimamente $h=w-\frac{2\delta}{3\varphi\alpha}w^{\frac{3}{2}}$ perciocchè $\frac{2\delta}{3\varphi\alpha}$ è un numero pic-

colissimo ; dunque

$\sqrt{h}=\sqrt{w-\frac{2\delta}{3\varphi\alpha}w^{\frac{3}{2}}}=\sqrt{w}-\frac{\delta}{3\varphi\alpha}w=\sqrt{w}\left(1-\frac{\delta}{3\varphi\alpha}\sqrt{w}\right)$ senza errore sensibile, poichè il quadrato di $\sqrt{w}-\frac{\delta}{3\varphi\alpha}w$ è $w-\frac{2\delta}{3\varphi\alpha}w^{\frac{3}{2}}+\frac{\delta^2}{9\varphi^2\alpha^2}w^2$, ossia $w-\frac{2\delta}{3\varphi\alpha}w^{\frac{3}{2}}$, giacchè $\frac{\delta^2}{9\varphi^2\alpha^2}w^2$ è un infinitamente piccolo di secondo ordine, atteso il grandissimo valore di φ : quindi

$\sqrt{2gh}=\sqrt{2gw}\left(1-\frac{\delta\sqrt{2g}}{3\varphi\alpha\sqrt{2g}}\sqrt{w}\right)=\sqrt{2gw}\left(1-\frac{\delta}{3\varphi\alpha\sqrt{2g}}\sqrt{2gw}\right)$.

Sostituendo per α $\frac{1}{2}\sqrt{\beta H}$, per $\sqrt{2gh}$ v, e sia $\sqrt{2gw}=u$, si rinviene

$v=u\left(1-\frac{\delta\alpha}{3\varphi\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\beta.2gH}}\right)$; ed essendo (§. 52) $\sqrt{2gH}=415^m,146$ ($=1278$ piedi francesi $=1360$ circa piedi inglesi), $\beta=9$ (§. 126), otterremo $\frac{1}{2}\sqrt{\beta\cdot 2gH}=\frac{1}{2}\times 3\times 415^m,146=623^m$ circa ; la formola ultima si cambia in

$$v=u\left(1-\frac{\delta}{3\times 623\varphi}u\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Dalla (l) abbiamo

$w=\frac{4\alpha^2}{\delta+1}\log.\mathrm{ip}(x-\frac{1}{2}b)$, o pure $w=2,20258\cdot\frac{4\alpha^2}{\delta+1}\log(x-\frac{1}{2}b)$ e perciò

$2gw=2,30258\cdot\frac{4\alpha^2\cdot 2g}{\delta+1}\log(x-\frac{1}{2}b)$; posto per α^2 il suo valore $\frac{1}{4}\beta H$, e per $2gw$ u^2, sarà $u^2=2,30258\frac{\beta\cdot 2gH}{\delta+1}\log(x-\frac{1}{2}b)$; ma $\beta\cdot 2gH=9\times\overline{415^m,146}^2=(1245^m)^2$ circa ; infine

$$u^2=2,30258\frac{(1245^m)^2}{\delta+1}\log(x-\frac{1}{2}b) \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

131. Dichiariamo l'esempio di Eulero, in cui $u=522^m$ ($=1700$ piedi ing.), che è la velocità iniziale della palla, allorchè non vi è perdita di forza.

$b = 0^m,0666$ (= pol. 2,625 ing. circa); $a = 0^m,0279$ (= pol. 1,1 ing. circa), e 7,82 è la densità del ferro malleato impiegato pel proietto, rispetto all' acqua distillata. Dunque $7,82 \times 850 = 6647$ sarà la densità sua rispetto all' aria, cioè $q' = 6647$; di più $n' = 1000$ ch' è quella della polvere. Il peso della palla essendo $\frac{2}{3}\theta a^3 q' g$, ossia eguale al peso di una colonna di aria che abbia per base θa^2, e per altezza k, emergerà l'equazione $\frac{2}{3}\theta a^3 q' g = \theta a^2 k g$, quindi $k = \frac{2}{3} \cdot 6647 . a = 4430 . a$. Nel nostro caso $k = 4430 \times 0^m,0297 = 124^m$ circa;

$$\delta = \frac{k + \frac{1}{3} n' b}{244 \cdot \frac{2}{3} b} = \frac{124^m + \frac{1}{3} \times 0,0666 \times 1000}{244 \times \frac{2}{3} \times 0^m,0666} = 13,5 \text{, circa.}$$

La formola (20) diventa

$$v = 522^m \left(1 - \frac{13,5}{3 \times 623\varphi} \cdot 522\right) = 522 \left(1 - \frac{11,31}{3\varphi}\right).$$

Se fosse $\varphi = 100$ sarebbe

$$v = 522^m (1 - 0,0377) = 522^m \times 0,9623 = 502^m \text{ circa.}$$

Ciò vale a dire che la perdita di velocità, nel caso in cui il focone ed il vento sono il centesimo del calibro dell'anima, sarà $522^m - 502^m = 20^m$ circa.

Il valore di δ che rinviene Eulero (Y) è

$$\delta = \frac{2\alpha k + (\alpha - \lambda) b n'}{244 \cdot \alpha \cdot \lambda \cdot b} = \frac{k + \frac{\alpha - \lambda}{2\alpha} b n'}{244 \cdot \frac{\lambda}{2} b}; \text{ in cui } \alpha = \frac{3}{2},\ \lambda = \frac{9}{10}, \text{ ossia}$$

$$\delta = \frac{k + \frac{6}{10} b n'}{244 \cdot \frac{9}{20} b} = 18,822:$$ valore diverso da quello da noi stabilito con principii più certi. Eulero suppone nella formola $\beta = 4$ e noi $\beta = 9$; ciò non ostante la perdita di velocità che egli calcola è $20^m,437$ (= 67 piedi ing.), e differisce da quella calcolata di sopra per $0^m,437$ circa.

132. La perdita di velocità stabilita nel suddetto esempio è maggiore della vera, perchè nello svolgere in serie $e^{\frac{\sqrt{h}}{\varphi\alpha}}$ si è fatto uso solamente di due termini, giacchè φ si è supposto un

(Y) Robins, Nouveaux principes d'artillerie pag. 244.

numero molto grande; e quindi i termini dopo il secondo sonosi trascurati. Da ciò è facile rilevare che la perdita di velocità, la quale si calcola come sopra, si discosta maggiormente dalla vera al diminuirsi il valore di φ; dunque della formola (20. §. 130) può farsi uso solamente quando questo rapporto ha un gran valore numerico. In prova di ciò se fosse $\varphi=2$; si avrebbe per perdita di velocità $\frac{11,31}{3\cdot 2}\cdot 522^m$, espressione maggiore di 522^m.

La perdita di velocità nel caso di $\varphi=100$ è 20^m (§. 131), la quale non solo deve diminuirsi per la detta ragione risguardante i termini della serie, ma anche perchè la forza impulsiva è minore di quella supposta nel calcolo, essendo nel fluido che sfugge pel focone le materie inalterabili non fluide, le quali non sono spinte col proietto. Su di ciò dice Eulero « tal perdita si potrebbe compensare con supporre le aperture « del vento e del focone un poco più piccole delle vere ».

133. Non potendo giovarci generalmente nelle applicazioni della formola (20. §. 130), conviene prendere un valore più prossimo per $e^{\frac{\sqrt{h}}{\varphi\alpha}}$: cioè $e^{\frac{\sqrt{h}}{\varphi\alpha}}=1+\frac{\sqrt{h}}{\alpha\varphi}+\frac{h}{2\varphi^2\alpha^2}+\frac{h\sqrt{h}}{6\varphi^3\alpha^3}+\text{ec.}$

Sostituendo questo valore in (g §. 130) si ha

$$\frac{4\alpha^2dx}{x-\frac{1}{2}b}=\frac{(\delta+1)dh}{1-\frac{\delta\sqrt{h}}{\varphi\alpha}-\frac{\delta h}{2\varphi^2\alpha^2}-\frac{\delta h\sqrt{h}}{6\varphi^3\alpha^3}-\text{ec.}}=$$

$$(1+\delta)dh\left[1+\frac{\delta\sqrt{h}}{\varphi\alpha}+\frac{(\delta^2+\frac{1}{2}\delta)h}{\varphi^2\alpha^2}+\frac{(\delta^3+\delta^2+\frac{2}{6}\delta)h\sqrt{h}}{\varphi^3\alpha^3}+\text{ec}\right];$$

integrando

$$4\alpha^2\log.\text{ip}(x-\tfrac{1}{2}b)=h\left[1+\frac{2\delta}{3\varphi\alpha}h^{\frac{1}{2}}+\frac{2\delta^2+\delta}{4\varphi^2\alpha^2}h+\frac{6\delta^3+6\delta^2+\delta}{15\varphi^3\alpha^3}h^{\frac{3}{2}}+\text{ec}\right](\delta+1);$$

ma (l §. 130)

$4\alpha^2\log.\text{ip}(x-\frac{1}{2}b)=(\delta+1)w$: onde

$$w=h+\frac{2\delta}{3\varphi\alpha}h^{\frac{3}{2}}+\frac{2\delta^2+\delta}{4\varphi^2\alpha^2}h^2+\frac{6\delta^3+6\delta^2+\delta}{15\varphi^3\alpha^3}h^{\frac{5}{2}}+\text{ec.}\quad\ldots\quad(m).$$

Applicando il metodo del ritorno delle serie, viene

$$h^{\frac{1}{2}}=w^{\frac{1}{2}}-\frac{\delta}{3\varphi\alpha}w+\left(\frac{1}{36}\delta^2-\frac{1}{8}\delta\right)\frac{1}{\varphi^2\alpha^2}w^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{1}{270}\delta^3-\frac{1}{20}\delta^2-\frac{1}{30}\delta\right)\frac{1}{\varphi^3\alpha^3}w^2+\text{ec};$$

moltiplicando ambi i membri per $(2g)^{\frac{1}{2}}$, e rispettivamente i numeratori e denominatori de' coefficienti delle diverse potenze di w, per $(2g)^{\frac{3}{2}}$, $2g$, $(2g)^{\frac{5}{2}}$, ec: e sostituendo pure per α, $\frac{1}{2}\sqrt{\beta H}$, si rinviene

$$(2gh)^{\frac{1}{2}}=(2gw)^{\frac{1}{2}}-\frac{\delta}{3\varphi\cdot\frac{1}{2}(\beta\cdot 2gH)^{\frac{1}{2}}}\cdot 2gw+$$

$$\left(\frac{1}{36}\delta^2-\frac{1}{8}\delta\right)\frac{1}{\varphi^2.\frac{1}{4}\beta.2gH}(2gw)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{1}{270}\delta^3-\frac{1}{20}\delta^2-\frac{1}{30}\delta\right)\frac{1}{\varphi^3\frac{1}{8}(\beta.2gH)^{\frac{3}{2}}}(2gw)^2:$$

sostituendo per $(2gh)^{\frac{1}{2}}v$, per $(2gw)^{\frac{1}{2}}u$, e per $(\beta.2gH)^{\frac{1}{2}}3(2gH)^{\frac{1}{2}}=$ $3\times 415^m,146$ (§. 130) $=1245^m$ circa, e facendo le riduzioni si perviene ad avere, dividendo la equazione per u,

$$\frac{v}{u}=1-\frac{\delta}{3}\left(\frac{u}{622,5}\right)\frac{1}{\varphi}+\delta\left(\frac{1}{36}\delta-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{u}{622,5}\right)^2\frac{1}{\varphi^2}+$$

$$\delta\left(\frac{1}{270}\delta^2-\frac{1}{20}\delta-\frac{1}{30}\right)\left(\frac{u}{622,5}\right)^3\frac{1}{\varphi^3}+\text{ec}.\ \ldots\ldots\ (22)$$

Sia come nell'esempio di sopra $\delta=13,5$ $u=522^m$, si avranno i seguenti calcoli preparatorii.

$$\frac{u}{622,5}=\frac{522}{622,5}=0,83;\ \left(\frac{u}{622,5}\right)^2=(0,83)^2=0,69;\left(\frac{u}{622,5}\right)^3=$$

$$(0,83)^3=0,57;\ \frac{\delta}{3}=\frac{13,5}{3}=4,5;\ \frac{\delta}{3}\times\frac{u}{622,5}=4,5\times 0,83=3,735;$$

$$\delta\left(\frac{1}{36}\delta-\frac{1}{8}\right)=13,5(0,375-0,125)=13,5\times 0.25=3,375;$$

$$\delta\left(\frac{1}{36}\delta-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{u}{622,5}\right)^2=3,375\times 0,69=2,33;$$

$$\delta\left(\frac{1}{270}\delta^2-\frac{1}{20}\delta-\frac{1}{30}\right)=13,5\left(\frac{1}{270}\times 182-\frac{1}{20}\times 13,5-\frac{1}{30}\right)=$$
$$13,5(0,674-0,675-0,033)=-13,5\times 0,034=-0,459;$$
$$\delta\left(\frac{1}{270}\delta^2-\frac{1}{20}\delta-\frac{1}{30}\right)\left(\frac{u}{622,5}\right)^3=-0,459\times 0,57=-0,2616.$$

Sostituendo questi valori nella formola, si ha

$$\frac{v}{u}=1-3,735\cdot\frac{1}{\varphi}+2,33\cdot\frac{1}{\varphi^2}-0,2616\cdot\frac{1}{\varphi^3}\ .\ .\ (n).$$

La quale può servire nell' addotto esempio tutte le volte che φ non sia un numero grande, per esempio non maggiore di 60. In conseguenza, se φ fosse eguale a 60, il terzo termine darebbe $2,33\cdot\frac{1}{3600}$, e perciò $2,33\cdot\frac{1}{3600}\cdot u=$

$2,33\cdot\frac{522}{3600}=2,33\times\frac{29}{200}$, quantità minore di un piede.

Sia $\varphi=10$, si ha

$$\frac{v}{u}=1-0,3735+0,0233-0,0002616=0,6495.$$
$$v=0,6495\times 522^m=339^m.$$

La perdita di velocità nel detto caso sarà $522^m-339^m=183^m$, allorchè la superficie del focone e del vento sono la decima parte del calibro dell' arma considerata senza vento, ossia la decima parte del cerchio massimo della palla.

La formola (n) è diversa da quella che stabilisce Eulero pel pezzo di cui trattiamo, e ciò deriva da questo, che il valore di β, il quale fa parte di quello di δ, ei lo pone eguale a 4, nel mentre che si è dimostrato essere eguale a 9. Per la qual cosa esso rinviene (Z)

$$\frac{v}{u}=1-3,9506.\frac{1}{\varphi}+2,9685\cdot\frac{1}{\varphi^2}+1,5865\frac{1}{\varphi^3}+\text{ec.}$$

134. Poichè $\delta=\frac{k+\frac{1}{3}n'b}{244.\frac{2}{3}b}=\frac{4430a+\frac{1}{3}n'b}{244.\frac{2}{3}b}$ (§. 131), sarà per un' altra bocca da fuoco $\delta'=\frac{4430a'+\frac{1}{3}n'b'}{244.\frac{2}{3}b'}$, ed affinchè δ di-

(Z) Robins. Nouveaux principes d' artillerie pag. 249.

venga eguale a δ', conviene stabilire la equazione di condizione $\frac{4430a+\frac{2}{3}n'b}{244.\frac{2}{3}b}=\frac{4430a'+\frac{2}{3}n'b'}{244.\frac{2}{3}b'}$; moltiplicando tutta la equazione per $244\cdot\frac{2}{3}$ si ha $\frac{4430a+\frac{2}{3}n'b}{b}=\frac{4430a'+\frac{2}{3}n'b'}{b'}$: da cui $4430\frac{a}{b}+\frac{1}{3}n'=4430\frac{a'}{b'}+\frac{1}{3}n'$; infine $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$. Da ciò si può stabilire che la formola (22. §. 133) risoluta riguardo ai coefficienti delle potenze diverse di $\frac{u}{622,5\varphi}$, per un'arma qualunque, risulteranno i medesimi per tutte le armi assoggettate a questa ultima equazione di condizione. Così nel caso di sopra $\frac{a}{b}=\frac{0,0297}{0,0666}=0,445$ circa, rapporto fra 0,4 e 0,5 circa: in conseguenza la formola (n) è applicabile, senza errore sensibile, a tutte le armi che hanno il rapporto del calibro del mobile alla lunghezza della carica compreso fra 0,4 e 0,5. Per la qual cosa Lombard (A) si serve della formola di Eulero di sopra indicata per calcolare le perdite di velocità de' soli proietti delle bocche da fuoco di campagna, caricate rispettivamente con libbre 4. $2\frac{1}{2}$ e $1\frac{3}{4}$ di polvere. Infatti prendendo i rispondenti rapporti fra dette cariche ed i calibri delle palle, si trovano numeri prossimi a 0,5.

TEORICA IX.

Formole riguardanti la perdita di velocità per l'evasamento delle armi.

135. Nella precedente teorica si è ottenuta la formola (m. §. 133)

$$w=h+\frac{2\delta}{3\varphi\alpha}h^{\frac{3}{2}}+\frac{2\delta^2+\delta}{4\varphi^2\alpha^2}h^2+\frac{6\delta^3+6\delta^2+\delta}{15\varphi^3\alpha^3}h^{\frac{5}{2}}+\text{ec};$$

(A) Lombard. Moto de' proietti §. 176.

nella quale sostituendo per x $\frac{1}{2}\sqrt{\beta H}$, e dividendo ambi i membri per h, viene

$$\frac{w}{h}=1+\frac{2\delta}{3\varphi}\cdot 2\left(\frac{h}{\beta H}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{2\delta^2+\delta}{4\varphi^2}\cdot 4\left(\frac{h}{\beta H}\right)+\frac{6\delta^3+6\delta^2+\delta}{15\varphi^3}\cdot 8\left(\frac{h}{\beta H}\right)^{\frac{3}{2}}+\text{ec},$$

o pure

$$\frac{2gw}{2gh}=1+\frac{2\delta}{3\varphi}\cdot 2\left(\frac{2gh}{\beta.2gH}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{2\delta^2+\delta}{4\varphi^2}\cdot 4\left(\frac{2gh}{\beta.2gH}\right)+$$
$$\frac{6\delta^3+6\delta^2+\delta}{15.\varphi^3}\cdot 8\left(\frac{2gh}{\beta.2gH}\right)^{\frac{3}{2}}+\text{ec};$$

sostituendo per $2gw$ u^2, per $2gh$ v^2, e per $\frac{1}{2}(\beta.2gH)^{\frac{1}{2}}$ $622^{m},5$ (§. 130), si ha infine

$$\frac{u^2}{v^2}=1+\frac{2\delta}{3}\left(\frac{v}{622,5}\right)\frac{1}{\varphi}+\frac{2\delta^2+\delta}{4}\left(\frac{v}{622,5}\right)^2\frac{1}{\varphi^2}+$$
$$\frac{6\delta^3+6\delta^2+\delta}{15}\left(\frac{v}{622,5}\right)^3\frac{1}{\varphi^3}+\text{ec.}\quad,\quad.\quad.\quad(23).$$

Dalla qual formola si rileva la velocità iniziale del proietto, allorchè non ci è nè sfogo di focone nè vento, in funzione della velocità iniziale, allorquando ha luogo la perdita di fluido per queste due aperture: cioè a dire, si conoscerà u quando v sarà data dagli sperimenti.

136. Se nella formola (22. §. 133) il valore di φ diventa φ' con le altre condizioni costanti, il valore di v si cambierà in v', e quindi

$$\frac{v'}{u}=1-\frac{\delta}{3}\left(\frac{u}{622,5}\right)\frac{1}{\varphi'}+\delta\left(\frac{1}{36}\delta-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{u}{622,5}\right)^2\frac{1}{\varphi'^2}+$$
$$\delta\left(\frac{1}{270}\delta^2-\frac{1}{20}\delta-\frac{1}{30}\right)\left(\frac{u}{622,5}\right)^3\frac{1}{\varphi^3}+\text{ec.}\quad.\quad.\quad.\quad(24).$$

Le due formole (23 e 24) ci fanno conoscere le velocità dei proietti allorchè le armi sono evasate.

Infatti sia v la velocità iniziale sperimentale allorchè la superficie del vento e del focone formano la parte φ del calibro dell'arma, prescritto dai regolamenti, e siano le superficie di queste aperture la parte φ' del calibro o superficie dell'anima evasata: rimanendo costanti gli altri dati, la formola (23. §. 135) ci farà conoscere il valore di u, il quale sostituito nella formola (24) ci darà quello di v', velocità del proietto in caso di evasamento.

137. Sia $v=468^m$ (=1442 piedi fran.), $b=0^m,2$ circa (=7 pol. 1 lin, e 2. pun), $q'=6091$ densità della palla di ferro fuso relativamente a quella dell'aria, $a=0^m,124$ circa (=0,36053 piedi) calibro del proietto, $c=0^m,126$ (=4,7 pol. circa) calibro dell'anima: sia l'evasamento della sola anima eguale a $0^m,00339$, $c-a=0^m,002$ (=1. lin circa) eguale al vento della bocca da fuoco, $c'=0^m,0056$ (=$2\frac{1}{2}$ lin). Questi dati sono presi da Lombard pel pezzo da 12 di battaglia.

Con ciò si ha

$$k=\tfrac{2}{3}\cdot 6091a=4061a\,(\S.\,132)=4061\times 0,124=503^m \text{ circa}.$$

$$\varphi=\frac{(0,124)^2}{(0,126)^2-(0,124)^2+(0,0056)^2}=25 \text{ circa}.$$

$$\varphi'=\frac{(0,124)^2}{(0,126+0,00339)^2-(0,124)^2+(0,0056)^2}=11 \text{ circa}.$$

$$\delta=\frac{503+\frac{1}{3}\times 0,2\times 1000}{244\times\frac{2}{3}\times 0,2}=17,1 \text{ circa}$$

$$\frac{2\delta}{3}=\frac{2\times 17,1}{3}=11,4$$

$$\frac{2\delta^2+\delta}{4}=\frac{2(17,1)^2+17,1}{4}=\frac{601,92}{4}=150,48.$$

$$\frac{6\delta^3+6\delta^2+\delta}{15}=\frac{6(17,1)^3+6(17,1)^2+17,1}{15}=2118,19.$$

Sostituendo questi valori nella formola (23. §. 135), si ha

$$\frac{u^2}{v^2}=1+11,4\left(\frac{v}{622,5}\right)\frac{1}{\varphi}+150,48\left(\frac{v}{622,5}\right)^2\frac{1}{\varphi^2}+$$

$$2118,19\left(\frac{v}{622,5}\right)^3\frac{1}{\varphi^3}+\text{ec.}\ \ldots\ldots\ (p).$$

Formola che vale pel solo calibro da 12 francese, qualunque sia la velocità del proietto, e per tutti gli altri assoggettati alla condizione di $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$ (§. 134).

Facendo $v=468^m$, $\varphi=25$, si ottiene

$$\frac{u^2}{468^2}=1+11,4\times 0,75\times 0,04+150,48,\times 0,56\times 0,0016+$$

$$2118,19\times 0,42\times 0,000064+\text{ec.}$$

effettuando le operazioni viene

$$\frac{u^2}{468^2}=1+0,3420+0,1348+0,0569=1,5337\,;$$

$\log u=\log 468+\frac{1}{2}\log 1,5337=2,67025+0,09291=2,76316$, ed $u=580^m$, circa, velocità del proietto allorchè non ci è, nè sfogo di focone, nè vento.

Per la formola (24. §. 136) si ha

$\frac{\delta}{3}=5,7$ circa, $\delta\left(\frac{1}{36}\delta-\frac{1}{8}\right)=4,19$ circa, $\delta\left(\frac{1}{270}\delta^2-\frac{1}{20}\delta-\frac{1}{30}\right)=$ 3,42 circa, e quindi

$$\frac{v'}{u}=1-5,7\left(\frac{u}{622,5}\right)\frac{1}{\varphi'}+4,19\left(\frac{u}{622,5}\right)^2\frac{1}{\varphi'^2}+$$
$$3,42\left(\frac{u}{622,5}\right)^3\frac{1}{\varphi'^3}+\text{ec.}\ \ldots\ldots\ldots\ (q).$$

La qual formola unita alla precedente, fa conoscere la velocità del suddetto proietto da 12, allorchè ha luogo evasamento nell'anima.

Essendo

$$\frac{u}{622,5}=\frac{580}{622,5}=0,93\text{ circa}\,;\left(\frac{u}{622.5}\right)^2=$$
$$0,86\text{ circa}\,;\left(\frac{u}{622,5}\right)^3=0,78\,;$$

$\frac{1}{\varphi'}=\frac{1}{11}=0,1$ circa; $\frac{1}{\varphi'^2}=0,01$; $\frac{1}{\varphi'^3}=0,001$: sostituendo

$$\frac{v'}{580}=1-5,7\times0,93\times0,1+4,19\times0,86\times0,01+$$
$$3,42\times0,78\times0,001+\text{ec}=1-0,6201+0,0360+$$
$$0,0027=0,4186\,;$$

$\log v'=\log 580+\log 0,4186=2,38523$; e

$$v'=242^m\text{ circa.}$$

Vale a dire che la velocità del proietto in disamina con la suddetta carica di libbre 4 della portata di 250^m circa (=125 tese) col provetto, è 580^m allorchè non ci è perdita di fluido. Di 468^m è la velocità iniziale sperimentale quando il vento ed il focone hanno le dimensioni prescritte dai regolamenti, che

sono quelle indicate di sopra; e 242^m è la velocità del proietto nel caso che l'anima sia evasata di $0^m,00339$.

Ne' casi in cui si considera l'evasamento anche del focone, le formole saranno le stesse; ed in quanto ai coefficienti varia il solo valore di φ'.

138. Poichè nell'esempio ultimo abbiamo $\frac{a}{b}=\frac{0,124}{0,\ 2}=0,62$, ne segue che in tutte le armi, in cui si verifica il calibro del proietto diviso per la lunghezza della carica essere eguale a 0,62, le formole del paragrafo antecedente sono atte a valutare le perdite di velocità per effetto degli evasamenti. In caso diverso conviene far uso delle formole generali (23 e 24 §§. 135, 136) risolute collo stesso modo da noi praticato.

Dichiariamo con un metodo semplice tutto quello esposto in questa e nella scorsa teorica, affinchè le applicazioni svariate ne ritraggano grande utilità da far coincidere, con la massima approssimazione, i risultamenti teoretici coi fatti.

Si voglia in prima trovare la velocità iniziale di un proietto in funzione dello sfogo di focone, della superficie del vento, e di altri dati indispensabili.

Sia, $a=$ al diametro del proietto:

$m=$ al vento dell'arma: sarà

$a+m=$ al calibro della stessa:

$d=$ al diametro del focone:

$Q=$ al rapporto della lunghezza dell'anima al calibro del proietto:

$q=$ al rapporto della lunghezza della carica al calibro del proietto:

$u=$ alla velocità iniziale del mobile, supponendo zero il diametro del focone, ed il vento:

$v=$ alla velocità iniziale del proietto col dato vento, e col dato focone.

Supponiamo che il focone sparisca, e venga distribuito in armilla intorno al cerchio dell'arma: allora $\theta(a+m)^2+\theta d^2$ indicherà la sezione fluida normale all'asse della bocca da fuoco.

Sia F la forza del fluido alla bocca del pezzo, quando non

esiste nè vento nè focone: sia F_2 la forza del medesimo fluido quando si dilata in un cilindro maggiore, di base $\theta(a+m)^2+\theta d^2$: e sia F_1 la forza di quella parte di fluido così dilatato che agisce contro il proietto, onde la sezione di questa parte fluida sarà θa^2.

Ora le forze di un fluido sono inversamente proporzionali ai volumi che occupa, o inversamente proporzionali alle basi di questi, quando le altezze sono le stesse, come nel nostro caso, percui

$$F : F_2 :: (a+m)^2 + d^2 : a^2,$$

e perchè (§. 85)

$$F_2 : F_1 :: (a+m)^2 + d^2 : a^2;$$

perciò

$$F : F_1 :: [(a+m)^2 + d^2]^2 : a^4,$$

ma (§. 81) $F : F_1 :: u^2 : v^2$, per cui

$$v = \frac{a^2}{(a+m)^2+d^2} u \ldots\ldots\ (25).$$

Il valore di u è (§. 129)

$$u = 1790 \sqrt{\frac{q}{16+q} \log \frac{Q}{q}}.$$

In secondo supponiamo che la v sia la velocità iniziale sperimentale nell'arma di perfetto servizio, cioè col vento e col focone stabilito dai regolamenti. Nella ipotesi che vi fosse l'evasamento n nell'anima, e l'evasamento r nel focone, la velocità v verrà a menomarsi per cagione di una perdita maggiore di fluido: sia perciò v' la velocità del proietto quando l'arma trovasi evasata.

Seguendo lo stesso ragionamento verrà

$$v' = \frac{a^2}{(a+m+n)^2+(d+r)^2} u \ldots\ldots\ (26).$$

Queste due formole adempiono con la massima approssimazione l'obbietto discorso, e stabilito per mezzo delle altre anzidette (22. §. 133... 23. 24. §§. 135, 136).

TEORICA X.

Cariche per determinare le velocità iniziali, e viceversa, per un' arma assegnata.

139. Le proporzioni del §. 81 ci danno

$$V=v\sqrt{\frac{C}{P}\times\frac{p}{c}}\ldots\ldots\ldots\ldots(27),$$

nella quale ciascuna coppia C,P e c,p si può valutare in qualunque peso, poichè formano un rapporto.

Se per v sostituiscasi $435^m,9$ velocità iniziale inserita nella Tav. XXI (§. 94) appartenente al proietto del peso $p=0^k,4748$ spinto dalla carica $c=0^k,2264$ posta nel pezzo N.° 1.°, della lunghezza di anima di 15 calibri del proietto, si avrà

$$V=435^m,9\sqrt{\frac{C}{P}\times\frac{0,4748}{0,2264}}=435^m,9\times1,45\sqrt{\frac{C}{P}}=632^m.\sqrt{\frac{C}{P}},$$

che sarà la velocità iniziale di un proietto appartenente ad una arma la cui anima sia lunga 15 calibri.

Facendo $C=P$, si ha $V=632^m$, che sarà la velocità iniziale appartenente ai proietti spinti da cariche eguali ai loro pesi.

Sostituendo per $\frac{C}{P}$ $\frac{1}{2}$, si ottiene $V=632^m\sqrt{\frac{1}{2}}=447^m$, che è la velocità iniziale di un proietto allorchè la carica pareggia la metà del peso di esso; così ec.

Similmente sostituendo nella formola (27) successivamente per v $481^m,6$; $545^m,9$ e $591^m,3$, velocità iniziali inserite nella detta tavola con la carica di $0^k,2264$, si ottengono le tre seguenti formole

$$V=481^m,6\times1,45\sqrt{\frac{C}{P}}=698\sqrt{\frac{C}{P}}\text{circa}$$

$$V=545^m,9\times1,45\sqrt{\frac{C}{P}}=791\sqrt{\frac{C}{P}}\text{circa}$$

$$V=591^m,3\times1,45\sqrt{\frac{C}{P}}=857\sqrt{\frac{C}{P}}\text{circa},$$

le quali indicano le velocità iniziali de' proietti in generale, appartenenti ai pezzi le cui anime sono 20, 30 e 40 calibri della palla.

Nelle ultime quattro formole sostituendo successivamente per $\frac{C}{P}$, $1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{3} . \frac{1}{4} \ldots\ldots \frac{1}{32}$, si formerà la

TAVOLA XXXII.

$\frac{C}{P}$	LUNGHEZZA DELL'ANIMA in calibri del proietto				$\frac{C}{P}$	LUNGHEZZA DELL'ANIMA in calibri del proietto			
	15	20	30	40		15	20	30	40
	velocità iniziali					*velocità iniziali*			
1	632m	698m	791m	857m	$\frac{1}{17}$	153m	169m	191m	208m
$\frac{1}{2}$	447	485	559	606	$\frac{1}{18}$	148	164	186	202
$\frac{1}{3}$	365	403	456	495	$\frac{1}{19}$	144	160	181	196
$\frac{1}{4}$	316	349	395	429	$\frac{1}{20}$	141	156	176	191
$\frac{1}{5}$	282	312	353	293	$\frac{1}{21}$	137	152	172	186
$\frac{1}{6}$	263	285	323	350	$\frac{1}{22}$	134	148	168	183
$\frac{1}{7}$	239	264	299	324	$\frac{1}{23}$	131	145	165	179
$\frac{1}{8}$	223	247	279	303	$\frac{1}{24}$	129	142	161	175
$\frac{1}{9}$	210	233	263	286	$\frac{1}{25}$	126	139	157	171
$\frac{1}{10}$	200	220	250	271	$\frac{1}{26}$	123	136	155	168
$\frac{1}{11}$	191	210	238	258	$\frac{1}{27}$	121	134	152	165
$\frac{1}{12}$	182	201	228	247	$\frac{1}{28}$	119	132	149	162
$\frac{1}{13}$	175	193	219	237	$\frac{1}{29}$	117	130	147	159
$\frac{1}{14}$	168	186	211	229	$\frac{1}{30}$	115	127	145	156
$\frac{1}{15}$	163	180	204	221	$\frac{1}{31}$	113	124	143	154
$\frac{1}{16}$	157	174	197	214	$\frac{1}{32}$	111	123	140	151

La prima colonna $\frac{C}{P}$ indica il rapporto del peso della carica al peso del proietto. Le altre indicano le rispondenti velocità iniziali di questo nelle anime lunghe 15, 20, 30 e 40 calibri.

140. Per rinvenire qual carica ci vuole a produrre, in un'arma lunga 30 calibri, una velocità iniziale che non si trovi nella tavola antecedente, per esempio di 390^m, si risolva la formola

$V=791\sqrt{\frac{C}{P}}$; facendo $V=390^m$, si ha $390^m=791^m\sqrt{\frac{C}{P}}$

e $\frac{C}{P}=\left(\frac{390}{791}\right)^2$;

$\log\frac{C}{P}=2(\log 390+\text{com. }\log 791)=2(2,59106+7,10182)=$

$19,38576$; dunque $\frac{C}{P}=0,243$, e $C=0,243\cdot P$, ch'è la carica richiesta in funzione del peso della palla.

Se P fosse di 6^k, sarebbe $C=0,243\times 6^k=1^k,458$: carica necessaria per produrre la velocità iniziale 390^m nel pezzo da 12 francese, la cui palla pesa 6^k, ed ha per lunghezza di anima 30 calibri.

141. Supponiamo che un dato pezzo abbia l'anima lunga 18 calibri, e si voglia rinvenire la velocità del proietto con la carica il terzo del peso di esso; si ha $\frac{C}{P}=\frac{1}{3}$.

Si prenda per pezzo di paragone quello di 20 calibri prossimo a quello di 18, e si osservi che al fratto $\frac{1}{3}$ sotto la colonna 20 corrisponde la velocità iniziale 403^m; poscia si faccia uso di una delle formole inserite nel §. 94, per esempio di $v=\frac{1}{2}V\left(\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt[3]{\frac{n}{m}}\right)$, in cui $V=403^m$, $n=18$, ed $m=20$; perciò

$$v=\frac{1}{2}\cdot 403^m\left(\sqrt{\frac{18}{20}}+\sqrt[3]{\frac{18}{20}}\right)=201^m,5\left(\sqrt{0,9}+\sqrt[3]{0,9}\right)=$$

$201^m,5(0,9487+0,9632)=201^m,5\times 1,9119=385^m$ circa, ve-

locità iniziale richiesta, la quale è compresa fra 403^m e 365^m della tavola, come era facile a prevedersi prima del calcolo.

Si potrebbe anche adoperare con maggior sicurezza la proporzione dello stesso paragrafo, $V:v::\sqrt[4]{L}:\sqrt[4]{l}::\sqrt{m}:\sqrt{n}$.

142. Se vogliasi conoscere qual carica produca la velocità iniziale di 421^m per un dato proietto in un'arma di lunghezza d'anima 18 calibri, bisognerà considerare l'anima lunga 20 calibri, e con ciò la velocità iniziale del proietto dovrà aumentarsi, e sia V. Avremo quindi

$$421^m=\tfrac{1}{2}V\left(\sqrt{0,9}+\sqrt[3]{0,9}\right)=\tfrac{1}{2}V\times 1,9119\,,\quad e\quad V=\frac{842}{1,9119}\,,$$

e poscia

$\log V=\log 842-\log 1,9119=2,64428$, $V=441^m$ circa.

Vale a dire la carica che nel pezzo lungo 18 calibri produce la velocità iniziale di 421^m, nel pezzo di 20 calibri la produce di 441^m.

Nella tavola ultima la velocità 441^m è prossima alla velocità di 403^m, perciò (§. 82)

$$403^2:441^2::\tfrac{1}{3}P:xP,\ \text{ed}$$

$x=0,396$; la carica cercata sarà $0,396P$.

Onde nel pezzo lungo 18 calibri la carica $0,396\,P$ è quella che produce la data velocità iniziale di 421^m.

143. Se fosse data la carica 0,4 del peso del proietto nel pezzo lungo 18 calibri, e si volesse rinvenire la rispondente velocità iniziale, si consideri il pezzo di 20 calibri, e si scorgerà che nella tavola antecedente il numero più vicino a 0,4 è $\frac{1}{3}$ sotto la prima colonna, a cui corrisponde la velocità 403^m: perciò (§. 82)

$$\tfrac{1}{3}:0,4::403^2:V^2=1,2\times 403^2$$

$$V=484^m \text{ circa},$$

ch'è la velocità iniziale di un proietto spinto dalla carica 0,4 del peso di esso, in un pezzo lungo 20 calibri.

Inoltre

$$v = \frac{1}{2} \cdot 484\left(\sqrt{0,9} + \sqrt[3]{0,9}\right) = 242 \times 1,9119 = 463^m \text{ circa.}$$

144. Finora nel risolvere i varii quesiti non si è fatta menzione alcuna nè del vento nè del focone; la qual cosa induce ad osservare, che la tavola XXXII. (§. 139) essendo stata compilata mediante le velocità iniziali inserite nella tavola XXI. (§. 94) per le armi di 15, 20, 30 e 40 calibri, le cui anime hanno il diametro di $0^m,051308$, i proietti quello di $0^m,049784$, ed i foconi quello di $0^m,00508$ (§. 94), essa serve solamente per le bocche da fuoco che hanno il rapporto del diametro dell'anima a quello del proietto :: $0^m,051308 : 0^m,049784$; e il rapporto del diametro del proietto a quello del focone eguale a $0^m,049784 : 0,00508$.

Siano a, c i diametri della palla e dell'anima; dovrà aversi la proporzione

$$c : a :: 0,051308 : 0,049784.$$

Sia m il vento, sarà $c = a + m$; onde $a + m = \frac{0,051308}{0,049784} a$,

ed $m = \frac{1524}{49784} a = 0,03 \cdot a$ circa.

Sia c' il diametro del focone, sarà

$$a : c' :: 0,049784 : 0,00508,$$

$$c' = \frac{5080}{49784} a = 0,102 a.$$

Possiamo adunque stabilire che la tavola (XXXII. §. 139) serve per tutte le bocche da fuoco che hanno il vento 0,03 del diametro del proietto, ed i foconi del diametro di 0,102 del medesimo calibro.

Le armi di cui si è fatto parola di sopra (§§. 141, 142, 143) dovrebbero avere il vento ed il focone che abbiamo fissato, onde gli ottenuti risultamenti potessero ad esse appartenere.

145. Consideriamo il pezzo da 24. Essendo $0^m,14927$ (= 5 pol. 6 lin. 2 pun. fran.) il diametro del proietto, il vento dovrebbe essere $m = 0,03 \times 0^m,14927 = 0^m,0044781$, ed il diametro del focone $c' = 0,102 \times 0^m,14927 = 0^m,01522554$, affinchè fosse applicabile alla tavola (XXXII. §. 139).

Così col terzo del peso della palla (= libbre 8) per carica le velocità che si rinvengono in essa tavola sono 365^m. 403^m. 456^m. 495^m, le quali appartengono rispettivamente ai pezzi da 24, le cui lunghezze di anima sono 15. 20. 30. e 40 calibri: tutti però con vento di $0^m,0044781$; e col diametro del focone di $0^m,01522554$.

Riprendiamo l'esempio del §. 137, aggiungendo solamente la condizione che l'anima del pezzo sia di 20 calibri.

Si prenda nella tavola (XXXII. §. 139) in linea di $\frac{1}{2}$ e sotto la colonna 20, $v = 403^m$, che è la velocità iniziale di un proietto da 12, il cui vento sarebbe $m = 0,03 \times a = 0,03 \times 0^m,124 = 0^m,00372$ (= 0,138 pol. circa); onde il diametro dell'anima dovrà essere $0^m,124 + 0^m,00372 = 0^m,12772$ (= pol. 4,748), e quello del focone $0,102 \times 0^m,124 = 0^m,012648$ (= pol. 0,47).

Nella formola (p §. 137), sarà $v = 403^m$,

$$\varphi = \frac{(0,124)^2}{(0,12772)^2 - (0,124)^2 + (0,012648)^2} = 15 \text{ circa}$$

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{15} = 0,06 \text{ circa}; \frac{1}{\varphi^2} = 0,0036; \frac{1}{\varphi^3} = 0,000216.$$

$$\frac{v}{622,5} = \frac{403}{622,5} = 0,65 \text{ circa}; \left(\frac{v}{622,5}\right)^2 = 0,42; \left(\frac{v}{622,5}\right)^3 = 0,27$$

dunque

$$\frac{u^2}{(403)^2} = 1 + 11,4 \times 0,65 \times 0,06 + 150,48 \times 0,42 \times 0,0036 +$$

$21,81 \times 0,27 \times 0,000216 = 1 + 0,4446 = 0,0379 + 0,0013 = 1,5$ circa; e $\log u = \log 403 + \frac{1}{2} \log 1,5 = 2,60531 + 0,08804 = 2,69335$ $u = 494^m$ circa, che è la velocità del detto proietto, allorchè viene spinto dalla carica il terzo del peso proprio, da un pezzo lungo 20 calibri, senza vento e senza focone. Ma il pezzo in disamina ha il diametro dell'anima di $0^m,126$, quello della

palla di $0^m,124$, e quello del focone di $0^m,002$: perciò nella formola (q. §. 137), sarà (§. 130)

$$\varphi' = \frac{(0,124)^2}{(0,126)^2 - (0,124)^2 + (0,002)^2} = 25 \text{ circa.}$$

$$\frac{1}{\varphi'} = 0,04; \frac{1}{\varphi'^2} = 0,0016; \frac{1}{\varphi'^3} = 0,000064$$

$$\frac{u}{622,5} = \frac{494}{622,5} = 0,8 \text{ circa}; \left(\frac{u}{622,5}\right)^2 = 0,64; \left(\frac{u}{622,5}\right)^3 = 0,51$$

per la qual cosa essa formola diventa

$$\frac{v'}{u} = 1 - 5,7 \times 0,8 \times 0,04 + 4,19 \times 0,64 \times 0,0016 +$$

$$3,42 \times 0,51 \times 0,000064 = 1 - 0,1827 + 0,0043 + 0,0001 =$$

$0,8217$, e $v' = 494 \times 0,8217$: $\log v' = \log 494 + \log \cdot 0,8217 =$

$$2,69373 + 9,91471 = 2,60844 \cdot$$

$$v' = 406^m,$$

che è la velocità iniziale del suddetto proietto, in cui sono dati il vento ed il diametro del focone.

La soluzione di un tal problema può servire di norma per qualunque altro pezzo, che avesse il vento ed il diametro del focone stabilito dai regolamenti. Le formole del §. 138 potrebbero valere con più facilità alla soluzione di detto quesito.

Se il pezzo di cui si parla non avesse 20 calibri di lunghezza di anima per numero assegnato, sulla velocità iniziale 406^m si opererebbe come nel §. 142.

Se in questo pezzo è data la velocità della palla, e si vuol conoscere la carica, si dovrà usare la proporzione del §. 82.

FINE DELLA PARTE TERZA.

Digitized by Google

PARTE QUARTA.

TEORICA I.

Lunghezza delle anime de' pezzi.

146. Si è osservato antecedentemente (§. 139) che una data carica di polvere in funzione del peso del proietto, produce velocità iniziali crescenti con l'aumentarsi della lunghezza dell'anima; la qual cosa deriva da questo, che il mobile riceve continuamente dal fluido elastico nuove spinte, giacchè l'accensione della polvere è successiva talmente, che se nel primo tempo infinitamente piccolo se ne accende una certa quantità, nel secondo tempo se ne accenderà una parte maggiore della prima, nel tempo terzo una porzione maggiore della seconda, e così proseguendo: cioè a dire in tempuscoli eguali le parti accese crescono sempre. Inoltre, il fluido dilatandosi continuamente ed il mobile trovandosi in moto, ne avviene che sarà sempre a contatto con quello fino a tanto che la sua velocità diventa eguale alla velocità de' filetti fluidi; ed in tal sito esso mobile si sottrarrà dalle altre spinte, restando esposto semplicemente alla resistenza dell'aria che trovasi nell'anima: ossia ci dovrà essere nella lunghezza dell'anima un punto distante dal fondo, talmente che la velocità del motore dilatato debba eguagliare quella del mobile, che fino a detto punto gli è stato a contatto ed esposto alla resistenza dell'aria. Al di là di questo punto esso mobile avrà solamente a sostenere la resistenza dell'aria ristretta nell'arma. Il punto di che si parla è quello che fissar dovrebbe la massima lunghezza dell'anima.

Siffatte considerazioni valutate convenevolmente, han dato il mezzo da far conchiudere a D'Arcy, che un pezzo da 24 caricato con 8 libbre di polvere, dovrebbe avere l'anima lunga piedi 343, affinchè la palla acquistasse la massima velocità iniziale possibile.

È da notarsi, che caricate similmente due arme di diverso calibro (§. 90), quella ch'è di calibro maggiore può imprimere al suo proietto una velocità iniziale minore dell'altra, quando anche la lunghezza della prima fosse maggiore di quella della seconda: la qual cosa accade allorchè il rapporto della lunghezza dell'anima al calibro sia maggiore nell'arma più piccola (Tav. XXXII. §. 139). Ciò dimostra che la velocità iniziale del mobile non dipende dalla lunghezza assoluta dell'anima, ma dal rapporto di essa lunghezza al calibro del corrispondente proietto.

Le principali cagioni che han fatto abolire i pezzi eccessivamente lunghi, molto pesanti, e di un eccedente calibro, sono la difficoltà di maneggiarli, e la quasi impossibilità di trasportarli per ogni maniera di sentieri: i quali inconvenienti in niun modo compensano il vantaggio della maggior quantità di moto de' rispondenti proietti. Infatti volendosi, a cagion di esempio, aprire la breccia, è agevole il ravvisare che una palla di un peso doppio di un'altra non produce effetto doppio, non essendo i buchi che si fanno l'uno doppio dell'altro. Di più due palle, avendo ciascuna la metà del peso di un'altra, produrrebbero effetto maggiore della più pesante, ed i due tiri non costerebbero più di quello con la palla del calibro grande. Tutte queste ragioni hanno condannato al disuso il calibro da 48 e da 36 per aprire la breccia, ed hanno fatto adottare in vece quello da 24, che a tutti i casi della guerra degli assedii può accomodarsi.

Al contrario poi i pezzi di grosso calibro sono da preferirsi tanto per l'uso de' legni da guerra, quanto per quello delle batterie di costa, poichè le aperture delle palle ne' fianchi delle navi, non solamente sono più difficili a turarsi, ma producono delle schegge talmente grosse da uccidere, o mettere fuori di combattimento, anche coloro che si trovassero molto discosti dal punto percosso. Perciò i pezzi da 48, da 36, e da 33 sono da anteporsi in tali faccende a quelli da 24. E per battere le navi con la massima efficacia, conviene adoperare gli obici cannoni di grosso calibro.

Inoltre non è sempre necessario che una palla abbia una grande velocità per produrre un desiderato effetto. Per esempio se vogliasi far breccia con un pezzo da 24, il proietto dovrà avere 456^m (=1400 piedi) di velocità iniziale. Sarebbe inutile, ed anche dannoso, se la stessa breccia si volesse incominciare ad aprire con una velocità iniziale maggiore, perciocchè la quantità di moto 24×456, stabilita dagli sperimenti, è quella che basta per conseguire lo scopo.

Ciò premesso, analizzando la tavola XXXII (§. 139), si scorge che un pezzo da 24, per dare alla palla la velocità iniziale di 456^m, dovrebbe avere l'anima lunga 30 calibri, e la carica 4^k di polvere; mentre considerando lo stesso calibro, affine di ottenere la medesima velocità, conviene usare la carica di 6^k nel pezzo che abbia per lunghezza di anima 20 calibri. Ciò dimostra essere più vantaggioso il tirare nel secondo che nel primo caso, giacchè il risparmio di $1 \frac{1}{2}$ in 2^k di polvere nella carica non compensa in menoma parte i molti svantaggi che arrecano dieci calibri di più nell'anima. Tutto dunque consiste in sapere a che uso debba impiegarsi ogni colpo di cannone o di obice. Dalla qual cosa dipende la conoscenza della velocità iniziale che deve darsi alla palla, qual lunghezza deve avere l'arma, e qual debba essere la carica più vantaggiosa da proporzionare alla bocca da fuoco.

147. Ogni arma avendo una carica particolare, che produce la massima velocità iniziale nel proietto (§. 128), si potrà risolvere il seguente quesito:

Dato il peso della carica massima, rinvenire la lunghezza minima di anima, affinchè il proietto abbia la più grande velocità iniziale possibile. Posto ciò, noi sappiamo, che la (18. §. 129) è l'equazione di condizione per rinvenire la lunghezza q della carica del massimo effetto, quando però è data la lunghezza Q dell'anima. Se poi fosse dato q, la stessa formola darà Q che dovrà esprimere la minima lunghezza di anima da darsi alla bocca da fuoco in disamina, affinchè la velocità che si cerca,

sia un massimo. Supponiamo risoluta la formola in parola col dato valore di q, e abbiasi $Q=A$; se facciamo la lunghezza dell'anima maggiore di A, la carica del massimo effetto verrà maggiore del dato q; e se facciamo la lunghezza dell'anima minore di A, la carica del massimo effetto verrà minore del dato q: ciò vuol dire che nell'una, e nell'altra supposizione siamo contro la ipotesi, dunque la citata formola risolve il problema.

Sia per esempio la palla da 12, spinta da 3^k (=6 lib. circa) di polvere; si vuol conoscere qual debba essere la minima lunghezza di anima della bocca da fuoco, affinchè la velocità del proietto risulti un massimo.

Nella formola (19. §. 129) si ha $\omega=3^k$, $p=6^k$; sarà $q=\frac{3^k}{0,19\times 6^k}=\frac{1}{0,38}=2,63$ calibri.

La formola (18. §. 129) dà $\frac{Q}{2,63}=\frac{50,63}{13,37}=3,78$, o pure $\frac{Q}{2,63}=\frac{5063}{1337}$, $Q=2,63\times 3,78=9,941$ calibri; $\log\frac{Q}{q}=\log\frac{9,941}{2,63}=0,5775$: sostituendo questo valore nella formola (17. §. 129) si avrà

$v=1790\sqrt{\frac{263}{1863}\times 0,5775}$, $\log v=\log 1790+\frac{1}{2}(\log 263+\log.0,5775-\log 1863)=3,25285+9,45565=12,70850$, ossia $\log v=2,70850$, e

$$v=510^m \text{ circa.}$$

Essendo $Q=9,941$ calibri, ed il calibro della palla da 12 $0^m,124$ circa; risulta $L=9,941\times 0^m,124=1^m,233$ circa, che è la lunghezza richiesta dell'anima.

I valori $q=2,63$ calibri, $Q=9,941$ calibri, e $v=510^m$ appartengono a tutte le armi caricate con polvere che pesi la metà del proietto.

Digitized by Google

In questo esempio si è omesso di considerare il vento e lo sfogo di focone, poichè le formole di cui ci siamo giovati non riguardano queste due circostanze. Ma volendone tener conto, conviene che la lunghezza dell'arma sia aumentata, affinchè la velocità rinvenuta resti costante.

Sia perciò il vento, ed il diametro del focone quello stabilito dai regolamenti, cioè lo stesso che si è notato nel §. 137. Nel risolvere la formola (q. §. 137), u corrisponde a 510^m: perciò

$$\frac{u}{622,5}=\frac{510}{622,5}=0,81 \text{ circa}; \left(\frac{u}{622,5}\right)^2=0,66, \left(\frac{u}{622,5}\right)^3=0,53.$$

$$\varphi'=25 \text{ (§. 145)}; \text{ e } \frac{1}{\varphi'}=0,04; \frac{1}{\varphi'^2}=0,0016; \frac{1}{\varphi'^3}=0,000064.$$

Sostituendo

$$\frac{v'}{510}=1-5,7\times0,81\times0,04+4,19\times0,66\times0,0016+$$

$3,42\times0,53\times0,000064+$ ec. $=1-0,18468+0,00442+$ $0,00012=0,81986$, $v'=510\times0,81986$, e $v'=418^m$, circa, che è la velocità a cui si riduce l'altra di 510^m, allorchè si considera il vento e lo sfogo del focone; perciò $510^m-418^m=92^m$ sarà la corrispondente perdita di velocità per effetto di queste due aperture.

Premesso ciò, nella formola (18. §. 129) sostituendo per v $510^m+92^m=602^m$, si avrà

$$602=1790\sqrt{\frac{263}{1863}\log.\frac{Q}{2,63}}; \text{ e } \log\frac{Q}{2,63}=\frac{602^2}{1790^2}\times\frac{1863}{263}=0,7901$$

circa; onde $\frac{Q}{2,63}=6,168; Q=6,168\times2,63=16,21184$ calibri.

Questo significa che il pezzo in disamina col vento e lo sfogo di focone, per imprimere al suo proietto la velocità iniziale di 510^m, ha bisogno di una carica che pesi la metà del proietto, e di una lunghezza di anima di 16 calibri circa. Una lunghezza minore diminuirebbe la velocità suddetta; quindi è

che i 92^m di velocità, che si perdono pel vento e pel focone, sono compensati da sette calibri circa, ond'è accresciuta la lunghezza dell'anima.

148. Sia un pezzo da 12, lungo d'anima 21 calibri, cioè $Q=21$: si cerca il peso della carica che dia la massima velocità iniziale al proietto.

Nella formola (18. §. 129) sostituendo per Q 21, viene $q^2+69q=336$: la radice positiva è $q=\frac{-69+\sqrt{6105}}{2}=4,57$; sostituendo questo valore nella formola (19. §. 129), ponendo anche per p 6^k, risulta $\omega=0,19\times4,57\times6=5^k,2097$: che è la carica richiesta.

Per conoscere la corrispondente velocità si risolva la formola (17. §. 129), sostituendo per Q, e q i valori cennati; è $V=1790\sqrt{\frac{4,57}{20,57}\log\cdot\frac{21}{4,57}}$; ma $\log\frac{21}{4,57}=\log 4,59=0,6681$; e $\log V=\log 1790+\frac{1}{2}(\log 457+\log.\ 0,6681-\log 2057)=3,25285+9,58371=2,83656$, e $V=686^m$ circa, che è la velocità massima del proietto, spinto dalla carica di $5^k,2097$ di polvere in un'arma della lunghezza di 21 calibro.

Tenuto conto del vento e dello sfogo di focone, senza che la velocità iniziale 686^m resti menomata, bisognerà convenevolmente aumentare la carica di già rinvenuta.

A tal uopo si sostituisca nella formola (q. §. 137) per $\frac{1}{\varphi'}$, $\frac{1}{\varphi'^2}$, $\frac{1}{\varphi'^3}$, rispettivamente 0,04; 0,0016; 0,000064 (§. 147), giacchè supponiamo il solito vento e focone; e facendo $\frac{u}{622,5}=\frac{686}{622,5}=1,1$ circa; $\left(\frac{u}{622,5}\right)^2=1,21$; $\left(\frac{u}{622,5}\right)^3=1,33$ si avrà $\frac{v'}{686}=1-5,7\times1,1\times0,04+4,19\times1,21\times0,0016+3,42\times1,33\times0,000064+$ ec. $=1-0,25080+0,00751+0,00029=0,757$, $v'=686\times0,757=519^m$ circa. Cioè la velocità mas-

sima 686^m si riduce a 519^m pel fluido che sfugge pel vento, e pel focone; ossia $686^m - 519^m = 167^m$ indica la perdita di velocità per dette cause attenuanti. Quindi aggiungendo a 686^m, 167^m, risulta 853^m, velocità che fa rinvenire la carica corrispondente. Infatti si avrà (§. 82)

$$686^2 : 853^2 :: 5^k,21 : C = 8^k,056 \text{ circa.}$$

Il che vuol dire, che nel dato pezzo, considerando il vento ed il focone, deve adoperarsi la carica di $8^k,056$ in circa di polvere, la quale produce la velocità massima di 686^m; quindi 3^k in circa di polvere compensano la perdita di 167^m di velocità iniziale nel proietto.

149. Si domanda qual lunghezza minima di anima debba avere un pezzo, perchè con una carica di polvere pesante quanto il proietto, produca la massima velocità iniziale.

Nella formola (19. §. 129) si faccia $\omega = p$; sarà $q = 5,26$, cioè la carica deve occupare nell'anima calibri 5,26, ed affinchè produca la massima velocità iniziale si sostituisca questa lunghezza nella formola (18. §. 129), e si avrà $(5,26)^2 + (48 + Q)5,26 = 16Q$, da cui $Q = 27$ calibri circa. Ciò significa che tutti i pezzi caricati con tanta polvere, per quanto è il peso del corrispondente proietto, debbono avere 27 calibri di lunghezza di anima, affinchè si produca la massima velocità iniziale.

Sia il solito pezzo da 12; la sua anima dovrà esser lunga calibri 27, ossia $L = 27 \times 0^m,124 = 3^m,348$. Sostituendo nella formola (17. §. 129) per q e Q rispettivamente 5,26 e 27 si avrà $V = 742^m$ circa per massima velocità iniziale.

Volendo considerare il vento, e lo sfogo di focone, si opererà come si è detto al §. 147.

150. Si cerca in fine qual sia la lunghezza dell'anima di un pezzo, affinchè una data carica produca un'assegnata velocità iniziale.

Sia il suddetto calibro da 12 francese; si vuol conoscere qual lunghezza di anima convien dargli, onde 2^k di polvere producano la velocità iniziale di 457^m, tenendo ragione del vento e del focone.

Sostituendo nella formola (19. §. 129) per x 2^k, e per p 6^k, si avrà $2=0,19\times 6q$, e $q=\frac{1}{0,57}=1,75$ circa. Fatto nella formola (17. §. 129) $V=457^m, q=1,75$ si avrà

$457^m=1790\sqrt{\frac{1,75}{17,75}\log\frac{Q}{1,75}}$; e $\log\frac{Q}{1,75}=\left(\frac{457}{1790}\right)^2\cdot\frac{1775}{175}$; ma $\log\left(\frac{457}{1790}\right)^2\cdot\frac{1775}{175}=9,82032$ circa, il numero è 0,66120, dunque $\log\frac{Q}{1,75}=0,66120$; e $\frac{Q}{1,75}=4,584$; infine $Q=8,022$ calibri circa.

Cioè a tutte le bocche da fuoco caricate con polvere che sia il terzo del peso della palla, e che debbano produrre la velocità iniziale di 457^m, conviene assegnare una lunghezza di anima di 8,022 calibri.

Pel nostro caso dunque sarebbe $L=8,022\times 0^m,124=0^m,995$ circa.

Tenendo poi conto del vento e del focone, bisognerà talmente aumentare questo valore di L, perchè rimanga costante la velocità iniziale di 457^m.

Si pratichi lo stesso metodo del §. 147 facendo uso della formola (p. §. 137), in cui

$$v=457^m, \frac{v}{622,5}=\frac{457}{622,5}=0,74 \text{ circa}, \left(\frac{v}{622,5}\right)^2=$$

$$0,55; \left(\frac{v}{622,5}\right)^3=0,40, \text{ e } \frac{1}{\varphi}=0,04; \frac{1}{\varphi^2}=0,0016; \frac{1}{\varphi^3}=0,000064:$$

quindi

$$\frac{u^2}{457^2}=1+11,4\times 0,74\times 0,04+150,48\times 0,55\times 0,0016+$$
$$2118,9\times 0,40\times 0,000064+\text{ec.}=1+0,33744+0,13242+$$
$$0,05424=1,5241$$
$$\log u=\log 457+\tfrac{1}{2}\log 1,5241=2,75169, \; u=564^m.$$

Vale a dire che bisogna trovare una lunghezza di anima tale, che l'arma senza vento e senza focone, produca con 2^k di polvere una velocità iniziale di 564^m; e considerandone il vento ed il focone, come abbiamo fermato di sopra, detta velocità si riduca a 457^m.

Nella formola (17. §. 129) per V si sostituisca 564^m, per q 1,75 e si rinverrà

$$\log\frac{Q}{1,75}=\left(\frac{564}{1790}\right)^2\cdot\frac{1775}{175}=1,00800,\ \frac{Q}{1,75}=10,19 \text{ e } Q=$$

17,8325 calibri circa.

$L=17,8325\times 0^m,124=2^m,21123$. Cioè il pezzo in disamina col vento e focone dai regolamenti voluti (§. 137), per dare al proietto la velocità iniziale di 457^m con 2^k di polvere, deve avere una lunghezza di anima di 17 in 18 calibri.

Come si sono esposti gli esempii pel pezzo da 12, così per gli altri si eseguirà lo stesso, cambiando convenevolmente i dati. Le formole del §. 138 adempiono con più semplicità agli svariati quesiti.

I problemi risoluti in questa teorica, e nelle altre antecedenti, dipendono da formole stabilite parte con l'analisi e parte cogli sperimenti più accurati di Hutton; e però la loro soluzione sembra molto diretta e conducente allo scopo. E quantunque le suddette quistioni siano state ben anche trattate per diverso metodo da Duchemin (B) con gran discernimento e sapere, tuttavia è da notare, che le formole da lui adoperate, oltre che non sono più semplici delle nostre, sono state trovate con un metodo del tutto empirico.

(B) Duchemin. Mémorial de l'artillerie pag. 59. n.° IV.

TEORICA II.

Effetto del fluido elastico svolto dalla polvere, contro l'interno delle armi da fuoco; ossia scala delle pressioni.

151. Il fluido elastico, che svolge la carica accesa, opera contemporaneamente contro il proietto e contro le pareti ed il fondo dell'arma. Gli effetti prodotti sul primo sono stati dichiarati nelle scorse teoriche; ci faremo ora a trattare di quelli che sull'arma stessa vengono prodotti.

(*Fig. 23*). Supponiamo per poco che l'accensione della polvere sia istantanea, cioè la carica cilindrica $ABHG$ venga ridotta a fluido in un tempo indivisibile, occupando il medesimo volume. Sia $EF=L$, $EL=b$, ed il calibro $AB=c$. Il fluido in tale ipotesi eserciterà il suo sforzo contro del cerchio θAB^2 del fondo; e siccome la sua elasticità dipendente dalla polvere situata come carica, è 2200 volte maggiore di quella dell'aria (§. 126), e la elasticità di questa equilibra il peso di una colonna di acqua alta $10^m,39$ (=32 piedi francesi), così la elasticità del fluido eguaglia il peso di una colonna di acqua alta $10^m,39 \times 2200 = 22858^m$.

Il volume della colonna di base θAB^2 sarà $22858 \,.\, \theta c^2$; ma il peso di un metro cubo di acqua distillata è 1000^k, dunque lo sforzo S del fluido elastico contro del fondo sarà $S=$ Kil. $22858 \times 1000 \times \theta c^2$.

Se il fondo non fosse un cerchio, allora in vece di θc^2 si sostituirebbe la rispondente superficie.

152. La superficie interna del cilindro AH sperimenterà uno sforzo equivalente al peso di una colonna di acqua alta 22858^m, la cui base è la intera superficie convessa, cioè peso = Kil. $22858000 \cdot \pi bc$.

Dalla istantaneità dell'accensione risulta, che il fluido elastico preme egualmente in tutti i versi; cioè a dire che gli sforzi, i quali si considerano sopra eguali superficie prese o

nel fondo o lateralmente sulle pareti dell'anima, si eguaglieranno fra loro. Così le diverse sezioni normali ad EF della superficie interna del cilindro $GHDC$ saranno successivamente premute a misura che il fluido va dilatando con spingere il proietto. Supponiamo che questo sia giunto in N; la forza del fluido dovrà scemare nella ragione inversa de' volumi che occupa. Quindi prolungando la perpendicolare LG in T finchè GT risulti di 22858^m, ch'è l'altezza della colonna premente: la pressione su di una superficie C^2 nel sito G verrà di Kil. 22858000 C^2.

Sia y l'altezza della colonna di acqua ch'equilibra la forza del fluido dilatato in Q su di una superficie C^2; la corrispondente pressione sarà $y \times 1000 \times C^2$. E siccome gli sforzi sono nella ragione inversa de' volumi de'cilindri AH, AS, supponendo costante il grado di calore, così si otterrà,

$$22858000\, C^2 : y \times 1000 \times C^2 :: \text{cil.}^{\circ}\, AS : \text{cil.}^{\circ}\, AH :: AQ : AG,$$

ed $y = \text{metri } 22858 . \frac{AG}{AQ} = 22858 \frac{b}{x}$; e perciò $xy = 22858b$: la quale equazione darà le diverse altezze delle colonne di pressione su tutti i punti della AC. Questa equazione appartiene ad una iperbola parilatera fra gli asintoti presi come assi rettangolari, i quali sono Ax, Ay; e la potenza di tal curva di pressione è $22858b$ metri di superficie: la iperbola è parilatera, perciocchè gli sforzi si esercitano normalmente sulla superficie interna del cilindro, essendo il fluido premente elastico: ciò vuol dire che le pressioni risultano normali alle x, ovvero le ordinate normali alle ascisse.

E poichè la potenza deve pareggiare la metà del quadrato del semiasse, perciò questo sarà eguale a $\sqrt{22858 \times 2b}$. In conseguenza la curva potrà descriversi con moto organico, e sia $V\alpha\Delta$. Si divide l'angolo retto yAx per metà con la retta Ax; il punto α sarà il vertice, e $A\alpha$ il semiasse della curva.

Nel fatto il valore di GT è grandissimo rispetto ad AG, percui il vertice della curva dovrà cadere nel ramo $T\alpha\Delta$.

Allorchè $y = 10^m,39$, si avrà $x = \frac{22858}{10,39} b = 2200b$, che è la distanza tra il fondo dell'anima e il punto ove la colonna di pressione termina di eguagliare lo sforzo dell'aria.

153. Allorquando la combustione si considera istantanea, ed il calore si suppone che varii nella ragione inversa de' dilatamenti del fluido; le altezze delle colonne prementi saranno nella ragione composta della inversa degli spazii, e della diretta degli accaloramenti, i quali sono essi stessi nella inversa ragione de' medesimi spazii; e perciò

$$22858 : z :: (AQ : AG)\,(AQ : AG) :: AQ^2 : AG^2.$$

Operando come sopra, si ha

$$z = 22858 \frac{b^2}{x^2},$$

equazione alla curva di pressione, la quale è diversa dall'antecedente.

Allorchè $x = \infty$, sarà $z = 0$; come pure quando $z = \infty$, risulta $x = 0$, ossia la curva in parola ha per asintoti gli stessi assi Ay, Ax.

Sia $z = 10^m,39$, viene $x = \sqrt{\frac{22858}{10,39}} b^2 = 46,9b$, distanza dal fondo dell'arma ove avviene che lo sforzo del fluido elastico eguagli la pressione atmosferica.

Le due equazioni in x ed y, in x e z danno a divedere, che nelle rispettive ipotesi le scale delle pressioni sono decrescenti dal fondo alla bocca dell'arma, con leggi uniformi.

Supponiamo in esse equazioni le medesime ascisse, verrà $y : z :: 1 : \frac{b}{x}$; ma $\frac{b}{x}$ è una frazione quando le ascisse si prendano maggiori di b; dunque in questa ipotesi viene $y > z$: se si prendesse x minore di b verrebbe $y < z$; se x fosse quanto

b si avrebbe $y = z$. Da ciò si ricava che le curve s' intersegano in T, che la curva della seconda equazione si accosta più della prima all'asse delle x fino a T, e da questo punto in poi avviene il contrario. Adunque costruendo la curva in disamina, essa dovrà prendere l' andamento $hTSXY$.

Tirisi la parallela TK ad Ax, le pressioni su di AG saranno indicate tutte dalla TG; percui le ordinate ai rami TV, Th non esprimono le altezze delle colonne di pressioni, ma bensì le ordinate alle curve $T\Delta$, e TY protratte verso V ed h.

154. Nel caso dell'accensione successiva, Pappacino ragiona nel seguente modo rispetto alla scala di pressione.....

« Si prenda per base la successiva accensione della polvere, » ed il calore variabile; nel punto E la forza del fluido, al » primo istante del suo svolgersi, dovrà vincere solamente la » resistenza che le oppone il proietto. Nell'istante che segue, » benchè sia ignoto il secondo sviluppo in rapporto al primo » tanto sul fluido quanto sul calore, pure si sa che la forza ri- » ceve aumento, e che l'altezza Gz della colonna premente » acquista un vantaggio su di ab (valore dell' altezza di pres- » sione per la prima porzione Ac del fluido che si svolge per » mettere il proietto nello stato prossimo al moto).

« Si supponga inoltre, che nel punto d l' accensione della » carica pervenga al suo termine: in tal punto l'agente ela- » stico eserciterà il massimo sforzo, e la scala delle pressioni » offrirà la massima ordinata.

« Dilatandosi poi il fluido nello spazio residuo, privo essendo » di nuovi aumenti e sulla massa e sul calore, s'indeboliranno » le sue pressioni, perciò le ordinate con la loro serie obbli- » gheranno la curva a prendere il flesso contrario come fo ».

Ammettendo per esatto un tal raziocinio, la conseguenza immediata che ne risulta si è, che nel punto d la pressione del fluido non eguaglia mai l'altra dell'accensione istantanea tanto col calore costante quanto col calore variabile. Infatti l'ordinata dq della iperbola parilatera esprime l' altezza della colonna pre-

mente nel punto *d*; ma il grado di calore in detto punto con l'accensione successiva è minore di quello prodotto dall'accensione istantanea, perciò in questo caso il fluido nel giungere in *d* avrà più forza.

Similmente nel caso dell'accensione istantanea e del calore variabile, l'ordinata *md* sarà anche maggiore di *fd*, poichè nell'accensione successiva ci è dispersione di calore per i meati del metallo; della qual circostanza non si è tenuto conto nella teorica.

Ciò posto, chiaramente si rileva che le ordinate alla curva *bfo* sono minori delle corrispondenti, con le stesse ascisse delle curve $T\alpha\Delta$, TmY: ossia la curva più vicino all'asse delle x, è la *bfo*, la quale è anche asintotica ad Ax, perchè il calore và diminuendo gradatamente al pari della densità del fluido elastico, e le pressioni dovranno pure menomarsi. Perciò ad una distanza dal fondo dell'arma minore di 46,9*b* (§. 153) dovrà accadere che la pressione del fluido si equilibri con quella dell'aria.

Il ragionamento di Pappacino non è conforme ai fatti: giacchè accurati sperimenti han dimostrato che la massima pressione non ha luogo, allorchè si consuma tutta la carica. Dopo il primo istante della combustione il fluido si spande successivamente in crescenti volumi, il calore e gli sforzi diminuiscono, ed una porzione della carica non si accende, com'è manifesto dai granelli di polvere che sono proiettati fuori dell'arma; nè il fluido, che seguita a svolgersi dopo gli altri istanti, ripristina la forza perduta a cagione de' più grandi volumi che va ad occupare: ciò val quanto dire, che i successivi ingrandimenti degli spazii fanno sì che l'agente elastico che trovasi in essi, diviene meno denso, e quindi perde di elasticità, benchè altra quantità di polvere rimanga accesa. Per la qual cosa Eulero conchiude, che il massimo sforzo della polvere ha luogo verso la culatta in tanto tempo, quanto è necessario perchè se ne accenda tale quantità da vincere la resistenza del proietto e de' granelli non accesi. Questo è lo stesso che dire che nel primo momento l'accensione può considerarsi come

istantanea, giacchè nel tempo che precede il moto una porzione della carica è cambiata in fluido, occupando lo stesso spazio. Siffatta riflessione serve di ammaestramento alla teorica. In conseguenza si può dire, che lo sforzo del fluido elastico è più debole nel sito in cui ha più facilità di spandersi, cioè vicino alla palla, ed è maggiore nel sito in cui trova più resistenza, cioè verso la culatta.

Allorchè principia la combustione, prima che il proietto si muova, accendendosi una porzione di polvere che occupar deve lo stesso volume per un tempo infinitamente piccolo, ne risulta, che una maggior resistenza sulla carica ne farà accendere una maggior quantità. E perchè nello sparo di un' arma la forza di resistenza da vincersi aumenta con l' accrescersi la carica, perciò le curve di pressione non potranno avere il medesimo cominciamento, e si approssimeranno o discosteranno dall' asse delle ascisse a misura che le quantità e le qualità di polvere diminuiscono o crescono.

155. Si è antecedentemente ottenuto (a §. 109)

$\frac{dv}{dt}=\frac{1000\cdot gm\varphi l\cdot \theta a^2}{p.}\cdot\frac{1}{x}$: dopo le considerazioni di sopra (§§. 120, 125, 126) risulta

$$\frac{dv}{dt}=\frac{1000\cdot gm\varphi b\cdot \theta a^2}{p+\frac{1}{3}\omega}\cdot\frac{1}{x}\text{; ma (§. 109)}$$

$$\frac{F'g}{p}=\frac{dv}{dt}\text{, quindi}$$

$$F'=1000\cdot m\varphi\cdot \theta a^2\frac{b}{x}\frac{p}{p+\frac{1}{3}\omega}$$

ch' è l' effetto del motore contro la palla, o pure lo sforzo contro la superficie θa^2 esistente alla distanza x dal fondo dell' arma.

Il fluido elastico operando con lo stesso vigore in tutti i versi, ne avviene, che se fosse chiuso ermeticamente in un re-

cipiente di resistenza indefinita, resterebbe in equilibrio, cioè premerebbe in tutte le direzioni con la stessa intensità. Se una delle pareti cedesse, come accade nello sparo delle armi da fuoco, l'azione F produrrebbe il moto del proietto quando anche fra questo e l'agente si trovasse un corpo intermedio qualunque. In conseguenza la efficacia del motore sul mobile pareggiar deve lo sforzo sulle pareti interne dell'arma, operando su di una superficie eguale al cerchio massimo di esso mobile. In altri termini, la forza del fluido ridotta in peso, alla distanza x dal fondo, gravitando su di un metro quadrato di superficie preso nelle pareti dell'anima, sarà rappresentata da

$$F' = 1000^{k}\, m\varphi . \frac{b}{x} . \frac{p}{p+\frac{1}{2}\omega} ;$$

sostituendo per φ $10^{m},39$, e per m 2200, risulterà

$$F' = 1000.^{k}22858.^{m}\frac{b}{x} . \frac{p}{p+\frac{1}{2}\omega} .$$

Essendo questa espressione un peso su di un metro di superficie, e 1000^{k} la gravità specifica, $2285^{m} . \frac{b}{x} . \frac{p}{p+\frac{1}{2}\omega}$ rappresenterà l'altezza della colonna premente, che posta eguale ad u, dà

$$u = 22858^{m} . \frac{b}{x} . \frac{p}{p+\frac{1}{2}\omega} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

equazione alla curva di pressione ricavata dalla natura del moto del proietto percorrendo l'anima dell'arma. Facil cosa è conoscere ch'essa appartiene ad una iperbola parilatera della potenza di metri superficiali $22858.b . \frac{p}{p+\frac{1}{2}\omega}$, e perciò del semiasse $\sqrt{22858.2b . \frac{p}{p+\frac{1}{2}\omega}}$. Facendo $x = b$ si avrà

$$u = \text{met. } 22858 . \frac{p}{p+\frac{1}{2}\omega} ,$$

prendendo Gg eguale a questo valore, ossia facendo $p+\frac{1}{2}\omega : p :: TG$

al quarto termine Gg: il punto g apparterrà alla curva di pressione, la quale potrà descriversi con moto organico.

Paragonando l'equazione (1) con quella del §. 152, si ottiene

$$y : u :: 1 : \frac{p}{p+\frac{1}{3}\omega}$$

ed

$$u = y \cdot \frac{p}{p+\frac{1}{3}\omega} \cdot$$

Cioè le ordinate della curva $T\alpha\Delta$ moltiplicate per $\frac{p}{p+\frac{1}{3}\omega}$ ci fanno conoscere quelle dell'altra tgn.

Da ciò si fa manifesto, che la curva di cui si parla si approssima più all'asse Ax dell'altra $T\Delta$; e dovrà segare altresì la TY in un punto. In fatti l'equazione della TY essendo (§. 153)

$$z = 22858 \frac{b^2}{x^2},$$

la quale combinata con la (1), supponendo $z = u$ dà

$$x = Aq = \frac{b(p+\frac{1}{3}\omega)}{p} :$$

quest'ascissa appartiene al punto di segamento; l'ordinata sarà

$$lq = 22858 \cdot \frac{p^2}{(p+\frac{1}{3}\omega)^2} \cdot$$

Da quanto in questo paragrafo si è dichiarato conchiudesi, che siccome il ragionamento di Pappacino è solamente specioso, così conforme ai fatti è quello di Eulero (§. 154).

Sostituendo nella formola (1) per u $10^m,39$ sarà

$$x = 2200b \cdot \frac{p}{p+\frac{1}{3}\omega} :$$

ch'è la distanza da A, al punto in cui la forza del fluido elastico e la pressione atmosferica si equilibrano. Le distanze simili; pel caso della legge delle due altre accensioni essendo $2200b, b\sqrt{2200}$ (§§. 152. 153), tutte e tre saranno proporzionali ai numeri

$$1 : 0,0213 : \frac{p}{p+\frac{1}{3}\omega}$$

per la stessa carica.

Facendo nella formola (1) $x=0$ viene $u=\infty$, ciò dimostra che l'asse Ay è asintoto della curva, ed il valore di F nel punto A diviene infinito. La qual cosa nel fatto è un assurdo; ma siccome nel primo momento l'accensione devesi considerare come istantanea (§. 154), così nel valore di F la teorica dovrà ricevere tale modificazione da essere

$$F=\text{kil. } 22858000\,;$$

e perciò l'altezza della pressione al punto A sarà di metri 22858.

156. Analizziamo ciò che interviene nel tempo che la parte della carica è cambiata in fluido, allorchè mette nello stato prossimo al moto il proietto. Sia Ac la polvere che cambiasi in fluido, occupando lo stesso volume per un tempo indivisibile; si prolunghi ca in t: per la lunghezza Aa la curva di pressione sarà la retta kt. Da a in poi ha luogo la teorica, ossia la curva tgn è applicabile ai fatti. Da questa considerazione si può stabilire, che la curva di pressione è una iperbola parilatera fra gli asintoti Ax, Ay della equazione (1. §. 155), e che il solo arco tgn è quello da usarsi nelle applicazioni.

Per rinvenire il punto t, ossia il valore di Aa, si ponga mente che l'equazione della retta kT parallela ad Ax è $y=22858^{m}$, la quale coesistendo con la equazione della curva darà il punto d'incontro; dunque $22858=22858\cdot\frac{b}{x}\cdot\frac{p}{p+\frac{1}{2}\omega}$.

Il valore di x si esprima con Δ per distinzione, e sarà

$$\Delta=b\cdot\frac{p}{p+\frac{1}{2}\omega}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(2).$$

Formola la quale mostrerà quanto di polvere si accende prima che il fluido cominci a dilatarsi, ossia prima che il proietto prenda lo stato prossimo al moto.

Il Δ è la massima ascissa che deve sostituirsi nella equazione (1. §. 155), con ciò il ramo iperbolico di pressione comincia da t, e finisce in n alla bocca dell'arma.

Il Δ diminuisce al decrescere del peso ω della carica; cosic-

chè se il valore di AG diminuisse, la curva avrebbe un semiasse minore di As, e perciò i suoi rami si accosterebbero maggiormente ad Ay Ax, e quindi le pressioni, o le ordinate a questa novella iperbola, dovrebbero cominciare in conseguenza da un punto compreso fra k e t. Questa verità risulta anche dalla formola: in fatti (§. 128) $\omega = \gamma b \cdot \theta a^2$ dalla quale $b = \frac{\omega}{\gamma \cdot \theta a^2}$, e perciò $\Delta = \frac{\omega}{\gamma \cdot \theta a^2} \cdot \frac{p}{p + \frac{1}{2}\omega} = \frac{1}{\gamma \cdot \theta a^2} \cdot \frac{p}{\frac{p}{\omega} + \frac{1}{2}}$ valore che diminuisce al diminuire di ω, e viceversa.

Facendo eseguire al mistilineo $AktnC$ una rivoluzione intorno l'asse EF, si verrà a generare un solido, detto di pressione, composto da un cilindro e da una iperboloide. Qualunque piano, che passa per EF, cagionerà una sezione perfettamente eguale al detto mistilineo.

157. (*Fig.* 24). Per fare un'applicazione di questa teorica, sia $AP = 3^m,25$ la lunghezza dell'anima di un pezzo da 12 libbre, caricato con $1^k,8$ di polvere, cioè $b = 0^m,124 \times q = 0^m,124 \times 1,57 = 0^m,19468$ (§. 150: form. 19. §. 129), non tenendo conto, nè dello sfogo di focone, nè del vento.

L'equazione (1. § 155) diventa,

$$u = \text{met}.22858 \cdot \frac{0^m,19468}{x} \cdot \frac{10}{11} = \text{met}.22858 \cdot \frac{0,1769}{x}.$$

Il semiasse della curva di pressione diviene (§. 155)

$$\sqrt{22858 \times 0,1769 \times 2};$$

il corrispondente logaritmo è

$$\tfrac{1}{2}(\log 22858 + \log 2 + \log.0,1769) =$$

$\frac{1}{2}(4,35906 + 0,30103 + 9,24773) = 1,95391$; il cui numero è $89^m,93$: con questo semiasse potrà descriversi la iperbola parilatera no.

La formola (2. §. 156) ha dato

$$\Delta = 0^m,19468 \cdot \frac{10}{11} = 0^m,1769,$$

ch'è la lunghezza della carica la quale si accende prima che

cominci il moto della palla, ossia quella quantità di polvere che si cambia in fluido, occupando il medesimo volume per un istante.

Si tagli $Aa = 0^m,1769$, si elevi la perpendicolare $an = 22858^m$, il ramo nao sarà la curva di pressione, appartenente all'arma in parola.

Sostituendo per x $AP = 3^m,25$ si avrà $u = 22858 \cdot \frac{0,1769}{3,25} =$ 1244^m circa: ch'è l'altezza della curva di pressione all'estremo P.

Sia $x = b = 0^m,19468$ verrà $u = 22858 . \frac{10}{11} = 20780^m$, ch'è l'ordinata BH al termine della carica.

Il valore di F' essendo (§. 155)

$$F' = 22858^m . 1000^k . \frac{b}{x} . \frac{p}{p + \frac{1}{3}\omega} = 1000^k . u;$$

si conchiude, che le ordinate alla curva moltiplicate per 1000 danno il peso in kilogrammi, equivalente allo sforzo del fluido, su di un metro di superficie.

Poichè l'accensione della polvere è progressiva, noi nel dare fine alla teorica stabilita portiamo opinione, che il grado di calore potrebbe esser nel fatto costante per un certo volume, perchè nel dilatarsi il fluido elastico si rende meno intenso il calore, il quale è supplito da quello che si svolge dagli strati successivi di polvere i quali si accendono gradatamente, dopo che il proietto cominci a muoversi.

TEORICA III.

Tenacità de' metalli.

158 (*Fig.* 25). Per conoscere la tenacità, o forza di coesione con la quale son legate fra loro le molecole che compongono un metallo, si fa uso di una semplicissima macchina rappresentata dalla figura.

Si modelli a tale oggetto un parallelepipedo rettangolo, o un cilindro del metallo da sperimentarsi, e si situi come AB. Poscia si aggravi la tara MN successivamente coi pesi m,n,o ec, fino a che la spranga AB si rompa. Si replichi più volte siffatto sperimento su pezzi perfettamente eguali al primo, e si noti ogni volta la superficie di rottura ed il peso che l'abbia prodotta; ed in tal modo si perviene ad assegnare con la massima approssimazione il medio peso, e la media superficie di rottura. È facile poi il dedurre da tali sperimenti, che la tenacità del metallo per quella superficie, pareggia il peso rinvenuto. Si avverte però, che nel fare il saggio si deve usare una macchina, le cui sbarre R,R siano vicinissime fra loro, affinchè il metallo AB si possa rompere senza prima piegarsi. Bisogna ancora astenersi dall'imporre alla sbarra grossi pesi che cagionino la rottura istantanea; perciocchè essendo maggiori della coesione del metallo, come di qualunque altro corpo sottoposto ad esame, non potrebbesi venire a conoscenza, nè della tenacità del metallo, nè del peso che vale a sostenere. È poi natural cosa, che crescendo la grossezza della spranga, deve crescere anche il peso che produce la sezione di rottura.

Ciò posto, sarà una verità geometrica, che le tenacità de'corpi, o pesi che cagionano le rotture, sono nella ragione diretta delle sezioni normali alla larghezza.

Siano A^2, A'^2 le sezioni che si sono avute in due spranghe mediante i pesi P, P', ne risulterà

$$P : P' :: A^2 : A'^2, \text{ e } P = P' \cdot \frac{A^2}{A'^2}.$$

Cioè il peso che pareggia la forza di coesione del metallo per la superficie A^2, è eguale al peso che produce la rottura per la sezione A'^2, moltiplicato pel rapporto delle due superficie. Di manierachè conosciuto il peso P' e la rispondente sezione A'^2, si potrà conoscere tutt'altro peso che cagioni la data sezione A^2.

È vero che il rinvenire con esattezza la tenacità di un metallo sia

cosa difficilissima, perchè la omogeneità delle fibre non è egualmente distribuita; ma noi per render chiara la teorica riferiremo gli sperimenti inseriti nell'*Aide-Mémoire d'artillerie del 1836 pag. 471, 472*, mediante i quali si hanno risultamenti prossimi molto al vero.

Il ferro malleato, perchè dia la superficie di rottura di un millimetro quadrato, ha bisogno di un peso di 40 kilogrammi.

Il bronzo de' cannoni ha dato una sezione di $0^m,001$ quadrato di superficie sotto la carica di 21 kilogrammi.

Gli sperimenti per questo ultimo metallo si sono eseguiti non solo su spranghe rettangolari, ma anche su cilindri del diametro di $0^m,014$ fino o $0^m,020$.

Per la tenacità di altre materie si possono consultare o Morin (C), o pure Poncelet (D).

Pei detti metalli la formola antecedente dà

$$T=40^k\left(\frac{A}{0,001}\right)^2 \text{pel ferro malleato},$$

$$T=21^k\left(\frac{A}{0,001}\right)^2 \text{pel bronzo.}$$

Da ciò si deduce che il ferro malleato è più tenace del bronzo nella ragione di 40 : 21.

TEORICA IV.

Spessezza di metallo delle bocche da fuoco.

159. Se il metallo di cui si compone una bocca da fuoco non avesse la necessaria spessezza, lo sforzo del fluido elastico vincerebbe la forza di coesione delle particelle che lo compongono, e quindi l'arma resterebbe screpolata. Da ciò risulta che il

(C) Morin. Aide-Mémoire de Mécanique Pratique pag. 222.
(D) Poncelet. Mécanique Industrielle §. 194.

metallo resiste per la unione più o meno forte, con cui son legate fra loro le sue molecole, cioè a dire resiste in virtù della sua tenacità; onde conosciuta questa, si verrà a determinare la spessezza di metallo che dee darsi ad un pezzo qualunque. A tale uopo faremo uso di una formola generale per quindi sostituirvi i dati offerti dagli sperimenti, affine di rendere profittevoli le applicazioni delle teoriche.

(*Fig. 26*). S'intenda alla distanza x dal fondo dell'anima, condotto un piano normale all'asse dell'arma; la sezione *CFD* indicherà il cerchio dell'anima, *BZECFD* l'armilla metallica, la cui proiezione orizzontale viene espressa dalla retta *GH*. Si conduca alla distanza $x+dx$ un altro piano anche normale all'asse, questo cagionerà un'altra armilla metallica la cui proiezione è la retta *LO* parallela a *HG*. Si faccia per l'asse dell'arma passare un piano parallelo al piano di proiezione orizzontale; con ciò il metallo compreso fra le armille *GH*, *LO* verrà segato in due rettangoletti *GM*, *HN* le cui proiezioni verticali sono le rette *BC*, *DE*.

Con siffatta costruzione si è nell'arma segato un cilindro metallico scavato dell'altezza infinitesima dx, e delle circonferenze di base, *BΔEZ* esterna, e *CFDα* interna.

Il motore elastico opera egualmente su tutte le parti interne della superficie cilindrica *CFDα* sforzandosi di allargarla, cioè tende a staccare la parte metallica inferiore *BΔECFD* dall'altra superiore *BZFCαD*. Il fluido che opera contro la superficie interna *CFD* avrà una risultante, la quale sforzerà secondo *FΔ* nel punto medio di detta superficie: di modo che se la parte *BΔECFD* non fosse unita con sufficiente forza di tenacità al resto del metallo, mediante i rettangoli *BC DE*, rimarrebbe staccata secondo la direzione *AF*. E siccome la coesione è la stessa per tutti i punti, così essa potrà considerarsi come l'effetto di due forze verticali che sollecitano la porzione *BΔECFD* dall'una e l'altra parte contro il metallo contiguo, applicate ai punti medii x ed y de' rettangoli *BC DE*. I rettangoli eguali *BC DE*

sono di vera grandezza indicati da GM HN, i punti medii sono P Q, onde congiunta la PQ, saranno RS TU le spessezze eguali di metallo; il punto f indicherà la proiezione del punto di applicazione della risultante fluida contro la mezza superficie interna CFD.

Ora si hanno tre forze parallele applicate ai punti P, Q, f; le due prime, ossia le forze di tenacità, operano in un verso contrario all'altra, percui volendo stabilire l'equilibrio fra la resistenza del metallo e la forza del fluido conviene, che la somma delle prime due forze sia eguale alla terza.

Sia $AC=\frac{1}{2}c$ il raggio dell'anima; $RS=TU=s$ la spessezza del metallo; $IM=KN=dx$ l'altezza de' rettangoli MG, NH; le cui superficie vengono indicate da $2sdx$; sia t la tenacità del metallo sull'unità di superficie, sia f la forza del fluido nel sito della sezione, anche sull'unità di superficie; la superficie interna CFD del mezzo cilindro è $\frac{1}{2}\pi cdx$. In conseguenza le due forze di coesioni pei due rettangoli GM, HN saranno $2stdx$, e $\frac{1}{2}\pi cdxf$ sarà lo sforzo del fluido sulla superficie di detto mezzo cilindro: l'equilibrio in parola verrà stabilito mediante la equazione

$$2stdx=\frac{1}{2}\pi cdxf, \text{ dalla quale}$$

$$s=0,785c\frac{f}{t}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

Eulero con diverso metodo perviene alla stessa formola (E).

Per tutti i punti della lunghezza Δ dal fondo sulle pareti si ha (§. 155) $f=22858000^k$; e perciò

$$s=0,785.c\frac{22858000}{t}\ldots\ldots\ldots(3).$$

Pei rimanenti punti posti alla distanza variabile x essendo (§. 157) $f'=22858000\frac{b}{x}\cdot\frac{p}{p+\frac{1}{2}\omega}$, sarà

$$s'=0,785.c\cdot\frac{22858000}{t}\cdot\frac{b}{x}\cdot\frac{p}{p+\frac{1}{2}\omega}\ldots\ldots(4).$$

(E). Robins. Nouveaux principes d'artillerie pag. 166.

(*Fig.* 27). Questa ultima equazione dimostra, che la spessezza di metallo al di là di Δ forma una iperbola parilatera fra gli asintoti, del semiasse $\sqrt{0,785 . c \frac{22858000}{t} \cdot 2b \cdot \frac{p}{p+\frac{1}{3}\omega}}$ (§. 155).

Si descriva una tal curva, e sia *TER*, la quale esprimerà la linea del metallo. Si costruisca pure la curva $n\alpha o$ della equazione (1. §. 155), ossia la curva di pressione. Sia *AG* un'ascissa di comune, sarà

$$GL = 22858 \cdot \frac{b}{x} \cdot \frac{p}{p+\frac{1}{3}\omega},$$

in conseguenza

$$UG = 0,785c \cdot \frac{1000}{t} \cdot GL;$$

e generalmente

$$s' = 0,785c \cdot \frac{1000}{t} \cdot u.$$

Vale a dire che le spessezze di metallo sono conseguenza della scala delle pressioni.

160. Per far uso delle due formole (3, 4. §. 159), prendiamo a considerare i pezzi di bronzo in cui (§. 158) $t = 21^k \cdot \frac{A^2}{(0,001)^2}$, A^2 deve rappresentare un metro di superficie, perchè f che fa parte delle due formole è lo sforzo del fluido su di un metro di superficie (§. 155); ossia $t = \frac{21^k}{(0,001)^2}$: sostituendo questo valore nella formola (3. §. 159) si ha

$$s = 0,785c \cdot \frac{22858000(0,001)^2}{21} = 0,785c \cdot \frac{22,858}{21};$$

$$\log \cdot \frac{s}{c} = \log 0,785 + \log 22,858 - \log 21 = 9,89487 +$$
$$1,35908 - 1,32222 = 9,93173$$
$$s = 0,854 . c. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

che è la spessezza di metallo alla culatta per tutta la lunghezza

Δ, affine di stabilire l'equilibrio fra la spessezza del bronzo e lo sforzo del fluido motore.

Negli esempii spesso occorre di far uso del rapporto $\frac{f}{i}$; perciò $\log\frac{f}{i} = \log\cdot\frac{22,858}{21} = 1,35908 - 1,32222 = 0,03686$, ed $\frac{f}{i} = 1,088 = 1,09$ circa.

Nella formola ultima il c si può valutare in qualunque misura. Intanto la formola (4. §. 159) dopo l'esposto diviene

$$s' = 0,854c \cdot \frac{b}{x} \cdot \frac{p}{p+\frac{1}{2}\omega} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6),$$

che indica la spessezza di metallo, pel noto equilibrio, ad un punto qualunque dell'anima al di là della distanza Δ dal fondo.

Per un pezzo da 12^k (= 24 lib.) caricato con 6^k di polvere, che è la massima quantità che suole usarsi per far breccia, si ha (§. 156)

$$\Delta = b \cdot \frac{12}{12+\frac{1}{2}6} = \frac{6}{7}b\,;$$

ma $b = 0^m,3643$ (=pol 13. lin 6 (F)), dunque

$$\Delta = 0^m,3122,$$

cioè per la lunghezza di $0^m,3122$ dal fondo, la spessezza di metallo è costante, ossia per la formola (5) sarà

$s = 0,854 \times 0^m,15264$ (=pol. 5 lin. 7pun. 8) $= 0^m,13$ circa.

La formola (6) dà

$$s' = 0^m,13 \times \frac{0,3643}{x} \times \frac{6}{7} = 0^m,13 \times \frac{0,3122}{x},$$

$$s' = \frac{0^m,040586}{x}.$$

Sia $x = 1^m$ si otterrà

$$s' = 0^m,040586.$$

(F) Lombard. Tavole del tiro.

Il valore di x si dovrà sempre assegnare maggiore di Δ, ossia maggiore di $0^m,13$ nel nostro caso.

È $x=2^m,725$ circa (=pie 8. pol 4. lin 8.) la lunghezza dell'anima del pezzo da 24 di Gribeauval; si avrà $s'=\frac{0^m,040586}{2^m,725}$.

Bisogna osservare, che il numeratore indica una misura di superficie, ed il denominatore una misura di lunghezza, percui il valore di s' non sarà un rapporto, ma bensì un numero esprimente lunghezza: perciò eseguendo la divisione si ha $s'=0^m,0148$.

161. Le formole (3. 4. §. 159) fanno conoscere *che per le arme dello stesso calibro caricate similmente, ma di metallo diverso, le spessezze sono nella ragione inversa delle tenacità*. Quindi è, che per stabilire l'equilibrio in un'arma di ferro fuso, converrà dividere i valori di s ed s' delle formole (5. 6. §. 160) pel rapporto della tenacità del ferro a quella del bronzo.

162. (*Fig.* 27.) Nel paragrafo 160 si è detto, che la spessezza di metallo di un pezzo è funzione della sua carica, come quella del pezzo da 24 ne ha fornito un esempio. Sia perciò un'arma NP, le cui spessezze di metallo pel suddetto equilibrio siano indicate dalle ordinate del mistilineo $MEUR$. L'arco iperbolico EUR ha per semiasse

$$\sqrt{0,785c\cdot\frac{22858000}{t}\cdot 2b\cdot\frac{p}{p+\frac{1}{3}\omega}},$$

il quale essendo funzione di b ed ω, aumenterà col crescere della carica (§. 156). Allorchè questa sia la massima, detto semiasse assumerà il massimo valore, il quale a misura che aumenta, il ramo iperbolico EUR si accosterà sempreppiù alla corda ER. Per l'ascissa AP, in cui sono ristrette le lunghezze delle anime delle bocche da fuoco in uso, è sempre permesso, senza errore sensibile, considerare l'arco EUR come confuso con la corda ER. Prendendo dunque per linea del metallo la MER, ne sarà maggiormente assicurata la spessezza ad oggetto di avere il ripetuto equilibrio; cioè a dire, che vi sarà più sicurezza nelle

applicazioni ai fatti, quando si voglia considerare la *MER*, anzicchè la *MEUR* come linea del metallo.

Da ciò che si è quì fermato risulta, che per usare le bocche da fuoco., la spessezza di metallo nelle pareti dev' essere maggiore di quella che dà le formole precedenti, i cui risultamenti sono da risguardarsi come i limiti minori, ai quali non si debbano giammai ridurre le costruzioni nell' assegnare le convenienti spessezze. E siccome nelle fusioni il metallo riesce difformamente denso, e di una lega non perfetta, così le spessezze delle armi debbansi aumentare talmente, che sotto le cariche massime, e sotto i forti accaloramenti non diano sospetto di screpolature.

Supponiamo che *ER* sia il limite della linea metallica per l' equilibrio: si conduca la *QIN* parallela ad *ER*, ed esprima *QN* la vera linea del metallo, che assicuri l' arma in compenso delle dette cagioni non valutate nelle formole. Se l' arma si volesse costruire come un cono tronco generato dal trapezio *AQNP*, non considerando per poco gli orecchioni, che facesse la sua rivoluzione intorno la superficie del cilindro dell' anima, essa rimarrebbe aumentata inutilmente del metallo generato dal triangolo *KQI*, e si renderebbe altresì più pesante con arrecare nello sparo una sicurezza al di là della necessaria; ond' è che per vera linea metallica debbasi considerare la *KIN*, in cui *KI* sia parallela alla *ME*.

Da siffatto ragionamento si vede la necessità di stabilire, quasi sempre, il rinforzo in culatta, come appunto insegnano i precetti sanzionati dal Gribeauval per le bocche da fuoco del suo sistema di artiglieria.

Il formare i pezzi di due parti a cono-tronco, e di un'altra parte quasi cilindrica, diciamo quasi, giacchè la *KI* prende una piccola inclinazione verso *I* per alcune altre circostanze subordinate alla maniera di mirare; oltre degli enunciati vantaggi presenta la indispensabil facilità alla tornitura, la quale non si potrebbe quasi eseguire, se volessimo attenerci rigoro-

samente ai precetti della teorica, cioè usando per linee metalliche gli archi iperbolici.

Gli effetti del vento e del focone si sono omessi nelle formole, per la ragione che siffatta omissione torna utile alla sicurezza della bocca da fuoco: ponendo mente altresì che ci sono alcuni casi, come nel riceversi le armi, ne' quali si tira in maniera da assoggettare il metallo quasi al massimo sforzo, adoperando proietti con impercettibili venti e cariche sforzate. È vero per altro, che considerato il vento, le formole darebbero risultamenti minori degl'indicati, ma il metallo sarebbe più tormentato dal proietto che percorre l'anima coi rimbalzi.

È da notare, che alla estremità della bocca deve anche fortificarsi l'arma con una spessezza di metallo molto più grande di quella che la teorica stabilisce. Infatti le particelle del metallo verso quel sito sopportano tanto le percosse del mobile nel superare l'anima formandosi l'angolo di partenza, quanto la pressione e la forza del calorico della fiamma nell'uscire dall'arma, non che la reazione dell'aria spostata dal settore di esplosione. Tutte queste cagioni, che affievoliscono la tenacità del metallo, han condotto a costruire la bocca de' pezzi in forma di tromba, subordinandone il punto colminante all'angolo di mira naturale, che si deve assegnare per avere determinati punti in bianco naturali.

163. (*Fig.* 28). Per determinare la spessezza di metallo nella culatta, terremo il metodo seguente.

Sia AR l'anima dell'arma, ed AE la porzione della carica massima la quale si accende nel tempo che impiega il proietto a prendere lo stato prossimo al moto (§. 154); SF indichi la direzione dell'asse, ed S il punto medio dell'arco ASB descritto col raggio $CS = \frac{1}{2}\Delta$ (§. 156). Si menino le rette CAL, CBM, ed esprimano $AL = BM$ le spessezze di metallo: col centro C, ed intervallo $CL = CM$ si segni l'arco LOM. Il mistilineo $SALO$ girando intorno l'asse OC genererà la culatta della bocca da fuoco: in conseguenza il fluido elastico agendo sul fondo

descritto dall' arco AS tende a staccare quella dalla rimanente parte del metallo, il quale n' è congiunto mediante la superficie cono-tronca descritta dalla retta AL.

Immaginiamo che per l'asse CO passi un piano LCM, questo segnerà l' arco ASB nella culatta, e le due rette AL, BM nel metallo: e se tiriamo due altri piani paralleli ed in parte opposta al primo, equidistanti da questo per la retta infinitissima $\frac{1}{2}dz$, sul fondo si verrà a segnare una parte di zona elementare che può, senza sensibile errore, considerarsi come una porzione di superficie cilindrica retta indicata da $dz \times$arco ASB; e nel metallo si verranno a praticare, sensibilmente, due rettangoli delle basi BM, AL e della stessa altezza dz, e quindi le superficie rispettive saranno $dz \times BM$, $dz \times AL$, questi rettangoli sono eguali fra loro.

Il fluido elastico sforza contro la superficie $dz \times$arco ASB per staccare il metallo $ALMB$ dal metallo circostante unito per mezzo dei due rettangoli $dz \times AL$, $dz \times BM$, o vero il metallo $ALMB$ resiste per la forza di tenacità appartenente a detti rettangoli: in conseguenza si conducano dai punti medii di AL, BM le perpendicolari GI, HI che indicano le direzioni delle risultanti delle forze di tenacità appartenenti alle superficie di quelli rettangoli, quali risultanti operano da I in G, e da I in H, ed hanno esse stesse un' unica risultante che opererà da I in C. Indicando con IG la prima forza di tenacità, e con IH la seconda, sarà $2IV$ la risultante unica.

La risultante de' filetti fluidi, che operano contro la superficie $dz \cdot$arco ASB, è diretta da C in S, ed avrà per intensità $dz \cdot$arco $ASB \cdot f = 2dz \cdot$arco $AS \cdot f$.

Facendo l' incognita $AL = BM = s$, sarà $IG = IH = sdz \cdot t$, $IV = IG \cos GIV = sdz \cdot t \operatorname{sen} ACT$, e $2IV = 2sdz \cdot t \operatorname{sen} ACT$. Per l' equilibrio tra il fluido e la tenacità del metallo dovrà verificarsi l' equazione di condizione

$$dz \cdot \text{arco}\, AS \cdot f = sdz \cdot t \operatorname{sen} ACT, \text{ ovvero}$$
$$\text{arco}\, AS \cdot f = st \operatorname{sen} ACT:$$

ma sen $ACT = \frac{c}{\Delta}$ nel cerchio di raggio uno, e quindi si ha la

proporzione $1 : AC :: \text{ar}\left(\text{sen} = \frac{c}{\Delta}\right) : \text{arco}\, AS$,

ossia

$$1 : \tfrac{1}{2}\Delta :: \text{ar}\left(\text{sen} = \frac{c}{\Delta}\right) : \text{arco } AS = \tfrac{1}{2}\Delta\, \text{ar}\left(\text{sen} = \frac{c}{\Delta}\right) :$$

con ciò l'ultima equazione diventa

$$\tfrac{1}{2}\Delta\, \text{ar}\left(\text{sen} = \frac{c}{\Delta}\right) f = st.\frac{c}{\Delta} : \text{ dalla quale}$$

$$s = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\Delta^2}{c}\, \text{ar}\left(\text{sen} = \frac{c}{\Delta}\right) \frac{f}{t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7).$$

Pei pezzi in bronzo essendo (§. 160) $\frac{f}{t} = 1{,}088$, risulta

$$s = 0{,}544 \cdot \frac{\Delta^2}{c} \cdot \text{ar}\left(\text{sen} = \frac{c}{\Delta}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8).$$

Applichiamo questa formola al pezzo da 24 di bronzo caricato con 6^k (= 12 lib.) di polvere; si avrà $\Delta = 0^m{,}3122$ (§. 160)

$$c = 0^m{,}15264, \text{ e } \frac{c}{\Delta} = \frac{0{,}15264}{0{,}3122}; \text{ perciò}$$

$$\log \cdot \frac{c}{\Delta} = \log \frac{1526{,}4}{3122} = 9{,}68925,$$

e quindi arco $\left(\text{sen} = \frac{c}{\Delta}\right) = 29^\circ.\ 16'$ circa. La sviluppata di un tal arco viene $\frac{29^\circ \cdot 16'}{360^\circ} \times 2\pi = \frac{29^\circ \cdot 16'}{360^\circ} \times 6{,}282$, essendo uno il raggio delle tavole; riducendo $\frac{29^\circ \cdot 16'}{360^\circ} = \frac{1756}{21600}$, prendendo i logaritmi si ha $\log \frac{1756}{21600} \times 6{,}282 = 9{,}70817$; ciò posto

$$\log \cdot s = \log 0{,}544 + \log \frac{0{,}3122^2}{0{,}15264} + \log \cdot \text{ar}\left(\text{sen} = \frac{1526{,}4}{3122}\right) =$$

$9{,}73560 + 9{,}80518 + 9{,}70817 = 9{,}24892$, ed $s = 0^m{,}1774$ cir-

ca (= pol. 6,5 circa); ed è la spessezza del metallo al fondo per mantenere l'equilibrio cennato.

I vantaggi dello attondare il fondo delle anime de' pezzi, come praticano gl' inglesi, sono quelli del potersi pulire bene senza lasciare residuo di stracci accesi prodotti dai cartocci, i cui tristi effetti si appalesano spesso a danno de' primi inservienti, e di avere maggior prontezza nell' accensione della carica.

Gribeauval per evitare de' sinistri nel caricare i pezzi, ha stabilito piano il fondo delle anime, e negli angoli A e B ha praticato un attondimento.

Se nell' esempio stabilito consideriamo che il fondo dell' anima sia un piano, l'arco ASB verrà supplito dalla retta AB eguale al calibro; allora $TO = OS + ST = OS + SC - CT = 0^m,1774 + 0,1561 - 0,1561 . \cos 29^\circ . 16' = 0^m,3335 - 0,1561 \times 0,8723 = 0^m,1973$ (= pol. 7,3 fran.).

Le costruzioni de' cannoni di Gribeauval in generale coincidono coi nostri risultamenti ricavati con le antecedenti formole. Infatti costantemente si trova pel pezzo da 24 un pollice circa, o $0^m,027$ di più nelle spessezze di metallo, paragonate a quelle delle formole medesime. Ciò doveva avvenire per le ragioni dette di sopra (§. 162). Per gli altri pezzi, il dippiù di spessezza d' aggiungersi a quelle che dà la teorica, si trova $0^m,027$ circa, diviso pel rapporto del calibro della palla da 24 a quello della palla del calibro del pezzo dato. Per esempio $0^m,027$ diviso per $\frac{7}{6}$, ch'è, presso a poco, il rapporto fra il diametro della palla da 24 a quello dell'altra da 16, dà $0^m,027 \times \frac{6}{7} = 0^m,023$ circa. Questo è lo stesso che dire, che per assegnare al pezzo da 16, caricato similmente a quello da 24 cioè con 3^k di polvere, le spessezze di metallo, bisogna valutarle prima con le formole stabilite, e poi al risultamento aggiungere costantemente $0^m,023$.

In quanto ai pezzi di assedio, che spesso si caricano con polvere metà del peso della palla, le culatte si trovano costruite, presso a poco, nel seguente modo, come indicheremo pel pezzo da 24 libbre; le quali costruzioni sono guidate dalle suddette formole.

(*Fig. 29.*) Sia *ACST* l'anima del pezzo da 24; nella direzione dell'asse si prende $BG = 0^m,21092$ (= 7 pol. 9 lin. 6 pun. fran); il calcolo dà $0^m,19689$ (= 7 pol, 21 circa) onde si è aumentata la spessezza di $0^m,01403$ (= pol. 0,5). Dal punto *F*, in cui *FB* è presso a poco eguale al calibro del proietto, si trova condotta la *FH* perpendicolare a *BG*. Indi fatto centro in *A* ed intervallo un poco meno di *BG*, si trova segnato il punto *H*; l'arco *HQ* dovrebbe esprimere la linea del metallo. Facendo al modo stesso dall'altra parte, l'arco *OR* segnerà pure la linea metallica; l'arco de' tre punti *Q*, *R* e *G*, e gli archi *HQ*, *OR*, ossia la linea *HQGRO* dovrebbe essere, presso a poco, la curva metallica. Per applicare il bottone, la cui esistenza è indispensabile per la tornitura delle armi, per le manovre di forza ec., si è condotta la tangente *PGM* all'arco *RGQ*, si sono prolungate le *AQ* e *CR* in *M* ed in *P*, uniti punti *H*,*M* ed *O*,*P*, si è considerata la linea *HMPO* come se fosse quella del metallo. Si è prolungata la retta *CA* in *D*, prendendo *AD* eguale al calibro del proietto; la *HD* si è stabilita come linea del metallo. Girando poscia intorno a *GB* il poligono *BDHMG*, si genera la culatta senza bottone, e la base del collo di questo è indicata dal cerchio del diametro *PM*. La retta *FG* è quanto la metà circa del calibro del proietto.

Senza allargarci in altri minuti particolari possiamo asserire, che la nostra teorica è conforme del tutto ai principii stabiliti da Gribeauval per le spessezze di metallo de' pezzi, quindi essa sarà proficua nelle applicazioni, quante volte i dati che n'emergono, siano modificati alla stessa maniera di quella tenuta di sopra pel calibro da 24, poichè da tutti gli uomini di guerra si conosce, che i pezzi del sistema di sì grande uomo hanno lunghissimo tempo resistito a tutti gli sforzi degli spari più violenti, e sonosi resi inutili non perchè le spessezze di metallo siano state riconosciute inefficaci per l'oggetto, ma bensì per gl' inevitabili evasamenti a cui van soggette le ani-

me ed i foconi delle armi. Le quali circostanze han sempre luogo in più o meno tempo, qualunque esser possano le dimensioni che si danno alle bocche da fuoco.

I pezzi da battaglia adoperandosi con la carica, il terzo del peso della palla, le spessezze teoriche di metallo alla culatta sono subordinate al valore di Δ nel caso di $\omega = \frac{1}{3} p$ (§. 161).

164. Per considerare i pezzi in ferro fuso il valore di s, formola (8. §. 163), converrebbe moltiplicarlo pel rapporto della tenacità del ferro a quello del bronzo.

Nelle applicazioni, per assicurare l'arma conviene moltiplicare il soprappiù di metallo che si concede ai pezzi in bronzo, pel detto rapporto, e così costruire la bocca da fuoco, come si è detto nello scorso paragrafo. Per esempio: il dippiù di metallo pel pezzo da 24 in bronzo è circa $0^m,027$ per tutte le spessezze ai varii siti: quindi quella di un pezzo di ferro deve essere indicata dalle formole corrispondenti, i cui risultamenti vanno accresciuti da $0^m,027$ moltiplicati pel ripetuto rapporto delle tenacità.

Generalmente per un pezzo qualunque in ferro la spessezza di metallo si deve valutare con le formole suddette accomodate al ferro, e poscia i risultamenti si debbono aumentare del soprappiù di metallo, che si accorda ai pezzi di bronzo, moltiplicato per la quantità costante del rapporto delle tenacità.

165. Da quanto abbiamo dichiarato si possono stabilire i teoremi seguenti:

1.° *Le spessezze di metallo di due pezzi, intorno al primo rinforzo, sono proporzionali ai diametri de' proietti: supponendo i venti nella ragione de' calibri delle armi, come può rilevarsi dalla formola* (3. §. 159).

2.° *Per uno stesso calibro, le spessezze de' metalli, intorno al primo rinforzo, sono nella ragione inversa delle tenacità de' metalli di cui le bocche da fuoco sono formate, come apparisce dalla formola* (4. §. 159).

3.° *Pei pezzi dello stesso metallo, caricati similmente, e a*

distanze eguali dai rispettivi fondi, le spessezze sono come i calibri, o delle anime o de' proietti, purchè i venti siano nella ragione di essi calibri, rilevandosi ciò dalla formola (4. §. 159).

4.° *Per le armi dello stesso calibro, a distanze eguali dai fondi, le spessezze sono nella ragione inversa della tenacità de' metalli, come si dimostra mediante la formola* (4. §. 159).

5.° *Le spessezze di metallo alla culatta di due pezzi, fino alla distanza verso il bottone eguale al calibro del proietto per i pezzi in bronzo, e fino alla distanza del calibro del proietto moltiplicato pel rapporto delle tenacità pei pezzi in ferro, sono nella ragione de' calibri, come si osserva dai paragrafi 163 e 164.*

6.° *I rinforzi* FG *alla culatta per i pezzi in generale, sono anche essi come i calibri, giusta gli stessi paragrafi.*

7.° *In conseguenza le spessezze totali sono nella ragione de' calibri.*

Tutte queste proporzioni hanno luogo non solo per l'equilibrio del metallo e del fluido, ma altresì per le dimensioni aumentate affine di assicurare le bocche da fuoco nello sparo: giacchè tale aumento è proporzionale non solo alla tenacità de' metalli, ma ben anche al calibro de' proietti.

Si può in generale conchiudere ch'essendosi sperimentata un'arma qualunque, e se ne voglia costruire un'altra di diverso calibro e diverso metallo, i principii stabiliti ci condurranno infallibilmente allo scopo. Infatti per lo stesso metallo, tutte le spessezze ai luoghi simili sono nel rapporto del calibro; per diverso metallo, questi dati vengono, come si è osservato, modificati dalla corrispondente tenacità.

Quantunque il vento stabilito da Gribeauval per le bocche da fuoco del suo sistema non sia porporzionale ai diametri de' proietti, pur tuttavia, prendendo come dati di partenza la spessezza di quelle armi, nelle applicazioni si può fare di meno della detta proporzione pel vento; poichè l'eccedenza risulta tale nelle spessezze de' metalli, che anche nelle scariche più violenti abbia conveniente sicurezza un'arma nuova da costruirsi.

TEORICA V.

Effetto della quantità di moto verticale del proietto sull'orlo della bocca dell'arma, allorchè si forma l'angolo massimo di partezza.

166. (*Fig. 30*). Sia AQ l'anima di una bocca da fuoco, il cui asse venga indicato dalla PD. Si è detto che il massimo angolo di partenza (§. 105) col quale può uscire un proietto BCH dall'arma è AGH, prodotto da tale situazione che il diametro BH si confonda con quello AH della bocca. In conseguenza tirandosi la tangente ACG al cerchio massimo, ed il raggio OC, ne risulta l'angolo COA eguale all'altro $AGH=\alpha$; perciò

$$\tan\alpha=\frac{2CA}{2CO}=\frac{2\sqrt{HA\times AB}}{a};$$

ed esprimendo con m il vento AB, si ha

$$\tan\alpha=\frac{2\sqrt{m(a+m)}}{a};\text{ e quindi}$$

$$GH=\frac{AH}{\tan\alpha}=\frac{a+m}{\tan\alpha}.$$

Sia $a=0^m,14927$ (= 5 pol. 6 lin. 2 punti.), $m=0^m,00339$ (= $1\frac{1}{2}$ lin.), come è nel pezzo di Gribeauval del calibro da 24 in bronzo. Sostituendo

$$\tan\alpha=\frac{2\sqrt{0,00339\times0,15266}}{0,14927};$$

$\log.\tan\alpha=\log 2+\log\sqrt{0,00339\times0,15266}-\log 0,14927=0,30103+8,35702-9,17406$, e $\log.\tan\alpha=9,48399$.

Inoltre $\log GH=\log.0,15266-9,48339=9,18384-9,48339=9,69985$, e $GH=0^m,501$ (= 18 pol. 10 lin. circa).

167. Giunto il proietto a percuotere il punto H nella detta po-

sizione, il suo centro O si troverà al disotto del punto D per la distanza $DO = \frac{1}{3} AB$; come pure ne' rimbalzi antecedenti il centro O si è dovuto trovare costantemente discosto dall'asse PD per le distanze eguali fra loro ed alla OD, percuotendo alternativamente la parete superiore ed inferiore dell'anima. Da ciò deriva, che nell'urto immediatamente prima di quello in H, ossia nel penultimo, il mobile ha dovuto percuotere la parete superiore; quindi condotta GL perpendicolare a PD, ed unendo il punto O con E, la retta OEI sarà la direzione del centro del mobile allorquando va ad urtare in H l'orlo della bocca; ossia la IO sarà la direzione parallela alla forza che opera in H. Infatti, considerando gli angoli massimi di partenza aver luogo intorno alla circonferenza del diametro AH; la direzione di ciascuna forza che sbalza il proietto da una parete alla opposta, dovrà, per la simmetria della figura e per l'eguaglianza di tutti gli angoli massimi di partenza, intersegare la LG, quindi è che nel caso della figura la direzione della corrispondente forza dovrà segare la LG, e siccome essa forza è applicata al centro del proietto, così questo centro, nel moto, dovrà passare per LG, ma passa per PD, onde passerà pel punto di concorso E, ma trovasi in O, percui OEI è la direzione della forza che spinge il mobile dalla parete superiore MA alla inferiore QH. Si compia il rettangolo FD, ed esprima EO la intensità di tale forza, la quale ha per componenti DO ed OF. La prima indicherà la quantità di moto normale della palla, e la seconda la quantità di moto con la quale essa è spinta fuori dell'arma con la velocità iniziale ch'esprimiamo con v. La v indica la velocità iniziale media degli sperimenti, cioè quella che risulta dal moto del proietto, allorquando l'angolo di partenza si considera eguale a zero, perciocchè vi sono i negativi ed i positivi, cioè quelli di elevazione e quelli di depressione, vale a dire si considera il caso quando il moto iniziale si fa secondo l'asse dell'arma (§. 39).

Sia M la massa della palla, la forza Mv sarà indicata da FO. Chiamando N un peso sperimentale equivalente all'effetto

della forza normale OD con la quale la palla percuote il punto H, si avrà

$$FO : OD :: Mv : \frac{OD}{FO} \cdot Mv \text{ ; e perciò}$$

$$N = \frac{OD}{GH} \cdot Mv \text{ ; in simboli}$$

$$N = \frac{\frac{1}{2}m \cdot \tan\alpha}{a+m} \cdot Mv.$$

Sostituendo per $\tan\alpha$ il suo valore (§. 166), si ha infine

$$N = Mv \cdot \frac{m}{a} \sqrt{\frac{m}{a+m}}.$$

Questo peso cresce crescendo v, rimanendo costante M, a ed m. *Ciò val quanto dire che l'effetto della quantità di moto verticale all'orlo della bocca dell'arma, quando si forma l'angolo massimo di partenza, cresce con la velocità iniziale del proietto.*

Pel pezzo da 24 suddetto si ha

$a = 0^m,14927$, $m = 0^m,00339$, e $a + m = 0^m,15266$, ed

$$N' = M'v' \cdot \frac{0,00339}{0,14927} \sqrt{\frac{0,00339}{0,15266}} \text{, e perciò}$$

log. 0,00339	7,53020
log. $\sqrt{0,00339}$	8,76510
com. log. 0,14927	0,82603
com. log. $\sqrt{0,15266}$	0,40808
	7,52941 il n.° è
	0,003383

dunque $N' = 0,003383 . M'v'$.

Per un'altro pezzo qualunque

$$N : N' :: Mv \frac{m}{a} \sqrt{\frac{m}{a+m}} : 0,003383 . M'v' \text{, e}$$

$$N = \frac{N'}{0,006766} \cdot \frac{M}{M'} \cdot \frac{v}{v'} \cdot \frac{2m}{a} \sqrt{\frac{m}{a+m}}.$$

Chiamando p, p' i pesi de' proietti, si avrà $\frac{M}{M'} = \frac{p}{p'}$; e nel nostro caso $\frac{p}{p'} = \frac{p}{12^k}$, quindi

$$N = \frac{N'}{0,006766 \times 12} \cdot p \cdot \frac{v}{v'} \cdot \frac{2m}{a} \sqrt{\frac{m}{a+m}}:$$

riducendo si ha infine

$$N = \frac{N'}{0,08119} \cdot p \cdot \frac{v}{v'} \cdot \frac{2m}{a} \sqrt{\frac{m}{a+m}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9),$$

per l'effetto della forza normale ridotta in peso, nell'anzidetta posizione del proietto per un'arma qualunque.

Poichè si è supposto l'effetto di una quantità di moto eguale ad un peso, questa formola sarà applicabile ai fatti, tutte le volte che il valore di N' sia stabilito dagli sperimenti, giacchè colla sola teorica ne riesce quasi impossibile la ricerca, dovendosi determinare l'effetto prodotto dall'urto della palla di ferro col bronzo.

TEORICA VI.

Situazione degli orecchioni, e de' manichetti.

168. Per assicurare un'arma sul proprio affusto si è munita lateralmente di due cilindri eguali, i cui assi sono per dritto. Questi cilindri, detti *orecchioni*, danno il mezzo da poter far fuoco con le diverse inclinazioni.

(*Fig. 31*). Sia *ABEF* una bocca da fuoco qualunque senza orecchioni, la quale s'intenda generata dalle figure *cqKAE*Σ, *KdMNTH*.... che si rivolgono intorno l'asse *HI*, percui il centro di gravità del rispondente solido sarà in questo asse, e sia *G*. Supposto *HI* orizzontale, si conduca la verticale *Gg*. Immaginiamo l'asse degli orecchioni allogato nel piano che passa per *Gg* normale a *HI*, e che venga dinotato da α in

proiezione verticale. Se la rotazione dell'arma si eseguisse intorno al detto asse avverrebbe, che nello sparo i rimbalzi del mobile nel percorrere l'anima da G in I tenderebbero a deprimere la bocca da fuoco, il che farebbe andar fallati i tiri. Così malagevole riescirebbe la posizione degli orecchioni. Con maggior ragione il loro asse non potrà trovarsi in un piano verticale parallelo a quello per Gg che si tirasse da un punto compreso fra G e H. Se ciò accadesse, aggiungerebbesi ancora l'altro inconveniente, che nello stabilire la punteria, l'arma prima dello sparo resterebbe abbattuta verso la volata.

Da questo ragionamento procede, che l'asse degli orecchioni deve trovarsi in un piano parallelo a quello per Gg tirato da un punto della GI, tanto distante da G da accordare la preponderanza di culatta tanto col facile maneggio della vite di punteria, quanto con l'effetto della forza normale della palla che percuote l'estremo della bocca: la intensità di tale forza si è espressa con la formola ultima.

169. Per conoscere qual sia il centro di gravità di un'arma data, si può tenere il metodo seguente, a fine di non incorrere in equazioni complicate di difficili soluzioni. Mediante il disegno, le tavole di costruzione, e le regole della geometria solida, si calcolano i volumi de' corpi che compongono la bocca da fuoco: cioè della sfera $HOTY = v$ generata dal semicerchio HOY.

Del cono-tronco $= v'$, generato dal trapezio $NUXM$.

Del solido $= v''$ nato dal mistillineo $YTNU$.

Del cilindro $= v'''$ fatto dalla rivoluzione del rettangolo $MXKd$.

Poscia dalla somma de' due solidi descritti dal trapezio $AKZP$, e dal mistilineo $ZPEI$, si tolga il cilindro dell'anima, e si avrà il volume $= v^{iv}$ del solido scavato, formato dalla rivoluzione della figura $cqKAPE\Sigma$; e così proseguendo.

Giova osservare, che tutti i corpi non contemplati nella *Geometria Solida* si valutano con approssimazione.

Siano $R, V, \omega, L, \gamma, \delta$ ec., i centri di gravità de'cennati solidi,

ricavati dalle regole della Meccanica, le cui distanze da H siano m, m', m'', m'''..... A tali punti si possono considerare le forze verticali rispettivamente eguali, o proporzionali ai suddetti volumi, o ai corrispondenti pesi. Di tutte queste forze parallele sia G il centro; esso sarà, com'è chiaro, il centro di gravità dell'arma senza orecchioni. Per la teorica dei momenti si ha, chiamando g la distanza HG,

$$g = \frac{mv + m'v' + m''v'' + m'''v'''...}{v + v' + v'' + v'''...}$$

170. Avutosi in tal guisa il centro di gravità, bisogna trovare il punto S, pel quale passar debba il piano verticale dell'asse degli orecchioni con la condizione, che nello sparo lo sforzo della palla contro l'estremo inferiore della bocca non disturbi l'equilibrio dell'arma intorno al detto asse, rimanendo quale essa lo avea prima di far fuoco. Si conduca Hy normale a HI: sia P il peso dell'arma senza orecchioni, ed N un peso eguale all'effetto della quantità di moto del proietto nella posizione di sopra (§. 166), applicato nel punto I.

Si ponga, $HS = x$, $HI = L$. Intorno al punto S ci dovrà essere equilibrio delle forze P ed N, applicate rispettivamente ai punti G ed I; sia R la risultante di queste due forze, avremo per la teorica de' momenti

$$R = P + N$$

$$R \times HS = P \times HG + N \times HI \text{; e quindi}$$

$$x = \frac{Pg + NL}{P + N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Il punto S si deve considerare come il centro di gravità dell'arma aggravata del nuovo peso N posto in I. E siccome il piano che passa per S parallelo a Gg e normale ad HI, divide per metà gli orecchioni, così il punto S darà lo stabilito equilibrio anche pel pezzo avente gli orecchioni. Dunque il centro di gravità dell'arma coll'aggiunta del peso di tali orecchioni, dovrà esser diverso da G, cioè esso sarà compreso fra i piani

per Gg e Ss. Se l'asse degli orecchioni intersega quello dell'anima, il nuovo centro di gravità sarà fra G ed S, come, per esempio, in M. Se detto asse fosse al disotto dell'altro dell'anima, il nuovo centro di gravità sarebbe nella verticale Mm.

Sia generalmente s il centro dell'asse degli orecchioni, si conduca la Gs: in questa, com'è chiaro, dovrà essere il centro di gravità dell'arma aggravata dal peso q degli orecchioni. Sia m un tal centro di gravità; si abbassi la mM perpendicolare ad HI, e siano X, Y le coordinate del punto m, cioè $HM = X$, $Mm = Y$. Per la proprietà de' momenti si ha

$$R' = P + q$$
$$R' \times HM = P \times HG + q \times HS$$
$$R' \times Mm = P \times \text{zero} + q \times Ss.$$

Sostituendo alle rette i simboli, facendo $Ss = y$, risulta

$$X = \frac{Pg + qx}{P + q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

$$Y = \frac{qy}{P + q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Allorchè $y = 0$, risulta $Y = 0$, ed il centro di gravità dell'arma è il punto M alla distanza X da H. Questo è il caso, in cui l'asse degli orecchioni intersega quello del pezzo.

Le ultime due formole dimostrano, che il centro di gravità dell'arma varia al variare della situazione degli orecchioni.

171. Dovendosi per molte occorrenze le bocche da fuoco generalmente sospendere pei *manichetti*, conviene che il peso totale rimanga diviso per metà dal piano della Mm normale alla HI. Quindi è, che prolungata la Mm in φ, il detto piano dovrà segare in parti eguali i manichetti, e perciò il punto φ sarà il centro di essi, cioè a dire delle rispondenti quattro basi.

I manichetti si collocano divergenti fra loro in relazione alla convessità dell'arma, onde ottengano maggiore coesione con la massa metallica, e possano dare altresì un libero campo alle visuali che si dirigono verso un oggetto da bersagliare.

172. Nella formola (10. §. 170) il valore di x dipende da quello di N, e perciò se questo peso fosse dato per un determinato pezzo, si conoscerebbe il valore della X della formola (11. §. 170).

La sperienza di moltissimi anni ha fatto manifesto, che il pezzo da 24 in bronzo del sistema di Gribeauval giammai si è abbattuto verso la volata, quantunque si sia adoperato con grandi angoli di dipressione e con le più violenti cariche, maggiori di quelle che producono la velocità iniziale stimata più di 520^m ($=1600$ piedi). Questa è appunto quella che si richiede pei primi tiri ad aprire la breccia nelle opere di fortificazione permanente. Il pezzo di cui si parla è costruito in modo che la preponderanza nella culatta è di un trentesimo del peso totale dell'arma, cioè a dire, che situando all'estremo della bocca un peso eguale a detto trentesimo, l'arma resta in equilibrio stabile intorno gli orecchioni. Perciò sostituendo nella formola (10. §. 170) per N il valore di $\frac{1}{30}$ di 2755^k circa ($=5628$ lib.), ch'è il peso del pezzo da 24 di Gribeauval, ossia $N=92^k$ in circa ($=188$ lib.), e per q 50^k circa ($=130$ lib.) ch'è il peso degli orecchioni, si perverrà a conoscere la distanza HS, e quindi la situazione degli orecchioni di tutti i pezzi da 24 in bronzo di qualunque sistema essi siano.

Per fare di questa teorica un'applicazione al nostro pezzo da 24 in bronzo, avremo $P=2667^k$ ($=5448$ lib.), $q=50^k$, onde $N=\frac{1}{30}(P+p)=91^k$ circa, $L=3^m,531$ ($=$piedi 10,87), $g=1^m,536$ ($=$piedi 4,72); la formola (10. §. 170) dà

$$x=\frac{2667^k\times1^m,536+91^k\times3^m,531}{2667^k+91^k}=\frac{2667\times1,536}{2758}+\frac{91\times3,531}{2758};\text{ e}$$

$$\log.\frac{2667\times1,536}{2758}=3,42602+0,18639-3,44059=0,17182,$$

il numero è $1^m,49$ circa;

$$\log.\frac{91\times3,531}{2758}=1,95904+0,54790-3,44059=9,06635,\text{ il}$$

numero è $0^m,1165$, onde $x=1^m,49+0^m,1165=1^m,6065$.

Nelle nostre costruzioni la distanza dall' orlo del bottone al centro degli orecchioni è $1^m,597$ (=piedi 4,916); dunque la differenza è $1^m,6065 - 1^m,5970 = 0^m,0085$, quantità di cui è da far poco conto in confronto della lunghezza totale del pezzo.

Facendo nella formola (11. §. 170.) $P = 2667^k$, $g = 1^m,536$, $q = 50^k$, ed $x = 1^m,6065$, si avrà

$$X = \frac{2667^k \times 1^m,536 + 50^k \times 1^m,6065}{2667^k + 50^k} = \frac{2667 \times 1,536}{2717} + \frac{50 \times 1,6065}{2717},$$

quindi

$$\log \frac{2667 \times 1,536}{2717} = 3,42602 + 0,18639 - 3,43409 = 0,17832, \text{ il}$$

numero è $1^m,51$.

$$\log \cdot \frac{50 \times 1,6065}{2717} = 1,69897 + 0,20588 - 3,43409 = 8,47076, \text{ il}$$

numero è $0^m,0296$ circa, ed $X = 1^m,51 + 0^m,0296 = 1^m,5396$.

Prendendo dunque $MH = 1^m,5396$, tirata $M\varphi$ normale ad HI, il punto φ sarà il centro de' manichetti; ossia il piano che passa per M normale all'asse, dividerà l'arma in due parti le quali staranno in equilibrio.

Nelle costruzioni della nostra Fonderia il valore di X essendo di $1^m,556$ (piedi 4,78), la differenza in più è $1^m,556 - 1^m,5395 = 0^m,0165$.

173. Le due formole (9. 10. §§. 167. 170) mostrano qual debba essere la situazione degli orecchioni per un pezzo qualunque. Nella prima, dopo ciò che si è fermato per la preponderanza di culatta pel pezzo di bronzo da 24 risulta, $N' = 92^k$. Per la qual cosa

$$N = \frac{92}{0,08119} p \cdot \frac{v}{v'} \cdot \frac{2m}{a} \sqrt{\frac{m}{a+m}}, \text{ o}$$

$$N = 1133 p \cdot \frac{v}{v'} \cdot \frac{2m}{a} \sqrt{\frac{m}{a+m}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Digitized by Google

Pel nostro pezzo da 16 si ha
$P = 1936^k$ (= libbre 3955), $q = 47^k$ (= libbre 97 circa), $g = 1^m,353$ (= piedi 4,166), $L = 3^m,083$ (= piedi 9,49), $a = 0^m,13$ circa (pol. 4,80), $m = 0^m,00339$ (= 1 $\frac{1}{2}$ linea), e $p = 8^k$ circa (= 16 libbre). Con questi dati la formola (13) diventa

$$N = 1133 \times 8 \times \frac{0,00678}{0,13} \sqrt{\frac{0,00339}{0,13339}}.$$

Si supponga $v = v'$, ponendo mente al teorema che *le cariche parti simili de' pesi de' proietti, danno velocità iniziali eguali* (§. 90) : dunque
$\log. N = \log. 1133 + \log. 8 + \log. 0,00678 + \frac{1}{2} \log. 0,00339 - (\log. 0,13 + \frac{1}{2} \log. 0,1339) = 3,05423 + 0,90309 + 7,83123 + 8,76510 - (9,11394 + 9,56258) = 20,55365 - 18,67625 = 1,87740$, ed

$$N = 75^k \text{ circa.}$$

Con tal valore si ha dalla formola (10. §. 167)

$$x = \frac{1936^k \times 1^m,353 + 75^k \times 3^m,083}{1936^k + 75^k} = \frac{1936 \times 1,353}{2011} + \frac{75 \times 3,083}{2011};$$

$\log \frac{1936 \times 1,353}{2011} = 3,28691 + 0,13130 - 3,30341 = 0,11480$ il numero è $1^m,3$: e $\log \frac{75 \times 3,083}{2011} = 1,87506 + 0,48897 - 3,30341 = 9,06062$ il numero è $0^m,115$ circa; ed $x = 1^m,3 + 0^m,115 = 1^m,415$.

Siffatta distanza nel nostro pezzo da 16 è $1^m,403$ (= piedi 4,32), la differenza è di $0^m,012$ in meno.

La formola (11. §. 170) dà

$$X = \frac{1936^k \times 1^m,353 + 47^k \times 1^m,415}{1936^k + 47^k} = \frac{1936 \times 1,353}{1983} + \frac{47 \times 1,415}{1983};$$

$\log. \frac{1936 \times 1,353}{1983} = 3,28691 + 0,13130 - 3,29732 = 0,12082$, il numero è $1^m,32$ circa

$\log. \frac{47 \times 1,415}{1983} = 1,67210 + 0,15076 - 3,29732 = 8,52554$, il numero è $0^m,033$, ed $X = 1^m,32 + 0^m$, o $33 = 1^m,353$.

Le norme che seguonsi nelle nostre costruzioni, determinano la distanza X a $1^m,361$ (= piedi 4,19).

Dagli esempii risoluti si rileva, che le costruzioni de' nostri pezzi di bronzo da 24 e da 16 meritano qualche lieve modificazione, e segnatamente nella situazione de' manichetti. E se i risultamenti teoretici non coincidono esattamente con le nostre costruzioni, la ragione si è, che i pezzi da noi adottati sono quelli di Gribeauval modificati ne' rinforzi solamente, senza che le altre parti si fossero rimosse.

Se si tratta poi del pezzo da 12, il cui vento sia $0^m,00266$, supposto che la velocità del proietto sia quanto quella della palla da 24, si ottiene $m = 0,00266$, $a = 0^m,1188$ (pol. 4,399): la formola (13) dà

$$N = 1133 \times 6^k \times \frac{0,00532}{0,1188} \sqrt{\frac{0,00266}{0,12146}}, \text{ e}$$

$$\log. N = \log. 1133 + \log. 6 + \log. 0,00532 + \tfrac{1}{2} \log. 0,00266 - (\log. 0,1188 + \tfrac{1}{2} \log. 0,12146) = 3,05423 + 0,77815 + 7,72591 + 8,71244 - (9,07482 + 9,54229) = 1,65362, \text{ ed}$$

$$N = 45^k \text{ circa.}$$

Questo valore di N posto nella formola (10. §. 170) coi dati del pezzo da 12, fa rinvenire il valore di ϖ, il quale sostituito nella formola (11. §. 170) dà a conoscere quello di X.

174. Se vogliasi trovare il centro di gravità di un pezzo intero con i corrispondenti orecchioni, si fa uso della formola (12. §. 170) nella quale dev' esser dato il valore di y. Sia il pezzo da 16: nelle nostre costruzioni si ha $y = 0^m,065$, cioè l' asse degli orecchioni è mezzo calibro della palla al disotto di quello dell' anima; dunque

$$Y = \frac{47^k \times 0^m,065}{1936^k + 47^k} = \frac{74 \times 0,065}{1983}:$$

$$\log Y = \log. 47 + \log. 0,065 - \log. 1983 = 7,18769, \text{ ed}$$

$$Y = 0^m,00154.$$

Quindi le coordinate al centro di gravità del pezzo di cui si parla sono $Y = 0^m,00154$, $X = 1^m,353$, prendendo per asse delle ascisse quello del pezzo, e per origine delle coordinate l' estremo del bottone.

175. È da notarsi che la formola (10. §. 170) riguarda lo stato di equilibrio, in essa è il valore di N stabilito sul dato sperimentale del pezzo da 24 in quanto alla preponderanza di culatta; onde nel fare uso di detta formola, il valore di N è maggiore di quello ch' è necessario pel detto equilibrio intorno agli orecchioni. Ed è appuuto in tal modo che deve valutarsi la distanza ϖ, per esser sicuri negli spari, anche più violenti, dell'appoggio della culatta sulla vite di punteria, e per esser sicuri altresì, che nelle varie depressioni delle armi non vi fosse abbattimento nel partire il proietto dal sito della carica.

Gl' inglesi senza por mente alla regola da noi stabilita per la preponderanza di culatta, ne' pezzi di battaglia uniscono, mediante un congegnamento a bilico, la vite di punteria al bottone per allontanare convenevolmente il centro degli orecchioni dalla bocca, e far sì che il centro di gravità della intera macchina si approssimi maggiormente alla volata, onde facile riesca agli artiglieri lo unire o staccare il pezzo dal suo avantreno, e rendere, quanto più sia possibile, la vite medesima libera dagli sforzi dell' arma.

176. Si è detto antecedentemente, che l' asse degli orecchioni deve trovarsi in un piano che passi per Ss normale alla HI. Facendo ora per yHI estendere un piano, questo intersegherà il primo in Ss. Se consideriamo essere s il centro dell'asse degli orecchioni, questo in proiezione verrà espresso dal punto s, il quale sarà determinato allorchè si conoscano le coordinate HS, Ss. L'ascissa HS è cognita per la formola (10.§. 170), e l'ordinata Ss per la formola (12. §. 170) espressa per y, la quale è stata stabilita con considerazioni dipendenti dall'uso delle armi. Per rispetto ai grossi calibri, si è avuto in mira di renderli maggiormente preponderanti in culatta nelle diverse inclinazioni, di guarentire gli

affusti dalle offese nemiche, allorchè tirano in cannoniera o a barbetta, di allontanare dai piani di queste il settore di esplosione, e far sì che una parte dello sforzo del fluido si esercitasse sulla vite di punteria e non totalmente sugli orecchioni ec. ec. Vero è che crescendo la *Ss* crescono gli esposti vantaggi; ma bisogna aver presente, che il piegamento dell' arma intorno gli orecchioni cresce in ragion diretta di detta distanza per la poca coesione del metallo in tale sito; per la qual cosa si è stabilito, nel 1765 in Francia, la distanza *Ss* a mezzo calibro della palla pei pezzi di assedio e di difesa: questo pone di accordo i suddetti vantaggi con la durata delle armi, come la sperienza ha dimostrato, munendo però gli orecchioni de' corrispondenti rinforzi, i quali frenano stabilmente la bocca da fuoco sul proprio affusto. Nei cannoni di Gribeauval il rinforzo degli orecchioni è unito ad una intera fascia metallica, la quale da taluni è stata soppressa guidati da ragionamenti alquanto inconcepibili.

Si comprende benissimo, che scostandosi l' asse degli orecchioni da quello dell' arma, la coesione metallica viene a soffrire di più. Infatti considerando gli orecchioni divisi in infiniti elementi paralleli all' asse corrispondente, essi si possono nello sparo prendere come tante leve che operano, i cui punti di appoggio sono nel sito dei sotto-orecchioni, e che esercitano il loro sforzo nella curva di unione de' detti orrecchioni col pezzo; a misura che dette leve elementari crescono in lunghezza, come accade allorchè l' asse degli orecchioni trovasi sottoposto a quello del pezzo, lo sforzo dovrà aumentare del pari, e quindi maggiormente la coesione metallica verrà a soffrire nel sito ove gli orecchioni sono al pezzo uniti. La tenacità del metallo soffrirà una seconda attenuazione dalla maggiore obbliquità che prendono le piccole leve rispetto alle curve di congiungimento, alle quali sono applicati gli orecchioni. Inoltre la risultante del motore elastico, operando lungo l' asse dell' arma e propriamente nel fondo, avviene che scostandosi l' asse

degli orecchioni da quello della bocca da fuoco, il centro di gravità di questa maggiormente si allontanerà dall'asse dell'anima, perciò tale risultante produrrebbe la rotazione, se non vi fosse la vite di punteria che ne distrugge il moto a danno dell'affusto. Gli orecchioni trovandosi congiunti al metallo molto accalorato, sotto gli spari tendono all'incurvamento.

Se l'asse degli orecchioni incontrasse quello del pezzo, non ci sarebbe rotazione, perchè la risultante fluida opererebbe direttamente nel centro di gravità del pezzo; perciò la parte di alterazione prodotta dal moto rotatorio, non avrebbe qui luogo, e perciò l'affusto soffrirebbe meno sforzo.

Ai pezzi da battaglia, che quasi mai tirano in cannoniere, non debbono accomodarsi le riferite considerazioni; e perciò nella suddetta epoca la distanza *Ss* fu fissata ad un dodicesimo del calibro della palla, o poco meno.

Da tutto ciò che per noi si è dichiarato, apparisce, che la formola (12. §. 170) può utilmente applicarsi per conoscere il centro di gravità di un'arma qualunque, quando per altro il valore *Ss* fosse stabilito.

TEORICA VII.

Camere, e Foconi.

177. Quei vani che in fondo delle anime delle bocche da fuoco si costruiscono, ed hanno i loro orificii di un diametro minore del calibro diconsi *camere*, nelle quali si pone la carica di polvere.

(*Fig* 32). Sia *PM* l'anima di una bocca da fuoco, *FLE* una camera qualunque, e *GLH* la carica della quale si vuol far uso nel tiro. Supponiamo sulle prime, che l'accensione della polvere fosse istantanea, cioè a dire che fosse la intera carica ridotta in fluido, occupando lo stesso volume.

Il proietto dal sito *QP* giunga in *NM*: esprime *A* il volume della camera, *B* quello della data carica, e *C* l'altro dell'anima, *F* lo sforzo primitivo del fluido allorchè è in *GLH*, e sia altresì *f* lo sforzo di esso fluido allorchè va ad occupare lo spazio *ELFPNMQ*. Per la natura de' fluidi elastici si avrà, seguendo la legge di Mariotte,

$$A + C : B :: F : f = \frac{B}{A+C} F.$$

Tenendo conto ben anche dei gradi di calore, supponendoli nella ragione inversa de' volumi, si avrà

$$f = \frac{B^2}{(A+C)^2} F.$$

Il valore di *f* dimostra con evidenza, che la figura della camera non influisce nella forza di una data carica, purchè il volume di questa e l'orificio si mantenga costante: Eulero discorre nel modo seguente:

« Se non ci fossero altre ragioni per cambiare la forma or-
» dinaria delle anime de' cannoni, si potrebbe, seguendo i
» principii di Robins, conservare con tutta sicurezza sempre la
» medesima, e rigettare senz'altra discussione tutti i progetti
» attenenti a simili cambiamenti ».

178. Tra le camere da scegliersi per le bocche da fuoco, conviene in generale evitare quelle che intimamente abbiano angoli rientranti o salienti, o convergenze verso la loro apertura, diversamente il motore elastico non operando direttamente sul mobile, la spinta sarebbe menomata, ed una pronta degradazione nell'arma si cagionerebbe. Tale avvertenza è indipendente della maniera con la quale si accende la polvere. Ma poichè l'accensione è successiva, ne risulta, che la impulsione del motore sarà più forte, più durevole, e perciò più rapido il moto del mobile, allorquando nel primo istante se ne accende la massima quantità possibile. Ora la figura della camera contribuisce a far sì che abbia effetto que-

Digitized by Google

sta condizione, come si può meglio osservare, supponendo posta la polvere in un cilindro lungo e stretto, la quale opera in modo che l'accensione, che da un estremo si propaga all'altro, impiega maggior tempo di quello che se la camera fosse più corta e di egual volume. Ciò val quanto dire in questo caso il proietto riceve dalla stessa quantità di polvere una velocità maggiore. Si scorge dunque, che la infiammazione della carica sarà tanto più rapida quanto maggiormente saranno ravvicinati fra loro i granelli di polvere. Quindi se una carica si volesse fare accendere nel minimo tempo possibile, converrebbe risolvere un problema di massimo e minimo, ossia si dovrebbe rinvenire fra tutti i solidi dello stesso volume quello della minima superficie. Siffatto corpo, come si sa d'altronde, è la sfera. Ma l'effetto di un fluido contro un ostacolo da respingere cresce a misura, che questo presenta all'urto maggior superficie; dunque la immediata conseguenza si è, che l'agente elastico eserciterà il massimo sforzo contro il proietto, e quindi gli comunicherà la massima velocità, quando la superficie della camera è un minimo, ed il suo orificio un massimo.

Le figure divergenti delle camere verso le aperture sono anche da proscriversi, ma nel solo caso in cui pretendesi un aumento nella velocità iniziale del globo: poichè tali camere non ravvicinando sufficientemente col loro volume i granelli di polvere, manca loro la condizione di poter racchiudere una data carica nella minima superficie, mentre hanno solamente l'altra che possa il mobile presentare al fluido una gran parte della sua convessità, esposta però ad una serie decrescente di sforzi.

Il suddetto ragionamento intorno alle cagioni dell'accensione, della durata delle armi, e della celerità del proietto, ne determina in generale ad attenerci alle camere cilindriche, alle porzioni sferiche, ed alle miste cilindrico-sferiche.

179. Sia pertanto q^3 il volume di una data carica, si vuol

trovare una camera cilindrica che contenga la data quantità di polvere, e che in pari tempo ne ravvicini al massimo i granelli fra loro; cioè, si vuole trovare quel cilindro, che rimanendo costante il volume, abbia la minima superficie.

Sia x il raggio della base, y la sua altezza, la solidità sarà

$$\pi x^2 y = q^3.$$

Sia z la superficie totale, si avrà

$$z = 2\pi xy + 2\pi x^2;$$

eliminando la y viene

$$z = \frac{2q^3}{x} + 2\pi x^2;$$

prendendo il coefficiente differenziale, ed eguagliato a zero, per la regola de' massimi e minimi, si ha

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{2q^3}{x^2} + 4\pi x = 0; \text{ da cui}$$

$$x = \frac{q}{\sqrt[3]{2\pi}}; \text{ e perciò}$$

$$2x = q\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}};$$

in conseguenza, sostituendo nella prima equazione in q^3, per x il suo valore, risulta

$$y = q\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}; \text{ e perciò } 2x = y.$$

Cioè, il cilindro in disamina deve avere il diametro della base eguale all'altezza, vale a dire dev'essere un cilindro cubo della data capacità.

Sia il peso di una carica 1^k; si vuol rinvenire il rispondente cilindro da servire come camera. Un decimetro cubo di

polvere pesa kil. 0,84 circa (G); ma i pesi sono come i volumi, dunque

$$\text{kil. } 0{,}84 : \text{kil. } 1 :: 1 \text{ dec. cubo} : q^3, \text{ e}$$

$$q^3 = \frac{1}{0{,}84} = \frac{100}{84},$$

$\log. q = \frac{1}{3}(\log. 100 - \log. 84) = 0{,}02524$; e $q = 1^{dec}, 06$: onde

$2x = \frac{2 \times 1{,}06}{\sqrt[3]{2 \times 3{,}141}} = \frac{2{,}12}{\sqrt[3]{6{,}282}}$; e $\log 2x = \log 2{,}12, - \frac{1}{3} \log 6{,}282 =$

$0{,}32634 - 0{,}26603 = 0{,}06031$, e $2x = y = 1^{dec}, 149 = 0^m, 1149$, che sono le dimensioni da dare alla detta carica.

180. Si è detto che la camera sferica è suscettiva della più celere accensione; quindi prendendo per camera un segmento maggiore della metà, incorriamo nelle parti rientranti. Se facciamo uso della mezza sfera per una data capacità q^3, si avrà per corrispondente solidità, chiamando x il raggio.

$$\frac{2}{3}\pi x^3 = q^3, \text{ e } x = q\sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}, \text{ e}$$

$$2x = q\sqrt[3]{\frac{12}{\pi}} = q\sqrt[3]{\frac{4}{1{,}047}}.$$

Se la carica è di 1^k; viene $q = 1^{dec}, 06$ (§. 179); onde

$$2x = 1{,}06\sqrt[3]{\frac{4}{1{,}074}}, \text{ e}$$

$\log. 2x = \log. 1{,}06 + \frac{1}{3}(\log. 4 - \log. 1{,}047) = 0{,}21934$, $2x = 1^{dec}, 657 = 0^m, 1657$ (= pol. 6 circa).

Questo esempio, ed altri della stessa specie, fanno conoscere, che le camere semisferiche sono capaci di poca quantità di polvere, benchè il diametro sia grande, e perciò nel volerne far uso non si hanno proporzionatamente gli altri vantaggi compa-

(G) Aide-Memoire 1836 pag. 102.

tibili con le portate delle armi, e con la costruzione delle rispondenti bocce da fuoco, le quali avrebbero alla culatta un diametro molto grande.

181. Da ciò che si è detto rilevasi, che le camere compatibili con le cose dichiarate, debbano esser formate di mezze sfere sormontate da cilindri dello stesso diametro.

Sia q^3 il volume di una carica, x il raggio della mezza sfera e del corrispondente cilindro dell'altezza y. La superficie della mezza sfera risulta $2\pi x^2$, e la laterale del cilindro viene $2\pi xy$; percui quella del solido misto sarà $2\pi x^2 + 2\pi xy$, aggiungendovi πx^2 ch'è la superficie dell'apertura, si ha $z = 3\pi x^2 + 2\pi xy$ per la superficie del detto solido; il cui volume è indicato da

$$\pi x^2 y + \tfrac{2}{3}\pi x^3 = q^3 \text{ ; dalla quale}$$

$$y = \frac{q^3}{\pi x^2} - \tfrac{2}{3}x \text{ , e } 2\pi xy = \frac{2q^3}{x} - \tfrac{4}{3}\pi x^2 :$$

sostituendo questo valore in z, si ottiene

$$z = 3\pi x^2 + \frac{2q^3}{x} - \tfrac{4}{3}\pi x^2 = \tfrac{5}{3}\pi x^2 + \frac{2q^3}{x} \text{ ; e}$$

$$\frac{dz}{dx} = \tfrac{10}{3}\pi x - \frac{2q^3}{x^2} = 0 \text{ , da cui}$$

$$x = q\sqrt[3]{\frac{3}{5\pi}} \text{, e perciò } y = \frac{q^3}{\pi q^2 \sqrt[3]{\frac{9}{25\pi^2}}} - \tfrac{2}{3}q\sqrt[3]{\frac{3}{5\pi}} :$$

riducendo si ha in fine

$$y = q\left(\sqrt[3]{\frac{25}{9\pi}} - \tfrac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{5\pi}}\right).$$

Essendo il valore di y differente da quello di $2x$, se ne conchiude che il cilindro, il quale sormontar deve la mezza sfera, non è un cilindro cubo.

182. Anticamente le camere si usavano in tutte le bocche da fuoco di artiglieria per ottenere lunghissime portate. Il Valliér le statuì persino ne' cannoni di grosso calibro. Ma il Gribeauval le proscrisse generalmente dai pezzi lunghi, adducendo per

ragione avergli la grande sperienza di guerra mostrato, che arrecando moltissimo tormento alle armi, erano cagione che queste dopo pochi tiri ne avevano detrimento per la forte compressione che ne riceve il metallo, attesa la sua duttilità. Al che aggiungeva la difficoltà dello introdurre le cariche, e di pulire accuratamente le camere stesse. Dai quali incomodi sono spesse fiate derivati tristi effetti a danno degli artiglieri nell'atto d'introdurre il cartoccio. Queste ed altre ragioni lo indussero altresì a stabilire qual lunghezza debba avere l'anima negli obici, perchè si possa introdurre il cartoccio nella camera con la mano senza aiuto del calcatore.

Noi per altro facciamo osservare, che dovendo essere generalmente le camere di un diametro minore di quello delle anime, allorchè si dovessero praticare in fondo alle armi lunghe, converrebbe che il loro volume fosse capace di una non grande quantità di polvere: chè altrimenti esse dovrebbero allungarsi, e quindi s'incorrerebbe nell'inconveniente di portare l'accensione ad un sito molto discosto dal primo punto acceso. In tal modo verrebbesi a perdere in tempo ciocchè vuolsi guadagnare in velocità; giacchè il proietto potrebbe trovarsi fuori dell'arma priachè la polvere fosse totalmente accesa. Osservasi altresì, che le cariche ordinarie ne' cannoni senza camere si approssimano al cilindro cubo (§. 179), e che quelle le quali da tal figura si discostano per eccesso fino ad un certo limite, con le reiterate spinte apprestano aumento alla forza di proiezione. Quindi il risparmio di carica, che si ha dal fare la camera nei cannoni, non compensa in verun modo gli altri svantaggi che ne provengono.

Le camere però sono indispensabili per le armi corte, e per quelle che spingono proietti vuoti, come granate, bombe ec.

Non è a credersi che si ottengano con siffatte armi, lunghe portate, con l'aumentare la carica, e toglierne le camere; poichè la velocità de' corrispondenti proietti, anzicchè crescere andrebbe a sminuirsi (§. 95). Per la brevità dell'arma il mobile si troverebbe

di già nello spazio, la carica seguiterebbe ad accendersi, ed una porzione resterebbe proiettata senza prender foco.

Perciò non potendosi niente guadagnare nè sulla prontezza dell'accensione, nè sulla forza di proiezione, è di mestieri restringere la polvere in un vano, il cui diametro sia più piccolo di quello dell'anima, ed il proietto otturando esattamente la camera riceve intere le prime spinte dal fluido elastico, percui la sua velocità sarà con tal mezzo aumentata.

183. Riguardandosi le camere sotto il punto di vista della durata delle armi e della indispensabile condizione della giustezza del tiro, è oltremodo utile quella immaginata da Gomer per i mortari. Essa consiste in un cono-tronco con la base maggiore verso la bocca, la minore verso il fondo dell'arma, e terminata da una calotta sferica per accelerare l'accensione nel primo istante. Nello sparo la colonna fluida tormenta obbliquamente il metallo, e perciò con minore intensità. I filetti fluidi così decomposti non rendono tanto efficaci le spinte dirette contro il mobile, il quale presenta gran parte della sua superficie all'urto del fluido, perciocchè non sono esse generalmente parlando, nè dirette al centro del proietto, nè parallele all'asse dell'arma, o per meglio dire se la carica fosse in camera cilindrica il proietto riceverebbe maggiore spinta, ed i filetti fluidi non incontrando piani inclinati, la loro efficacia non sarebbe affievolita dagli angoli della incidenza, eguali a quelli della riflessione, i quali hanno luogo nelle pareti della suddetta camera alla Gomer. Si ottiene pure moltissima esattezza nel tiro, poichè il combaciamento della bomba con la camera facendo colà svanire il vento, risulta l'asse del mobile in prolungamento dell'asse del mortaro, la qual cosa produce la spinta del fluido elastico quasi centrale.

Questi vantaggi compensano in parte le condizioni richieste antecedentemente (§. 178). E diciamo in parte; poichè nelle Scuole de'nostri *Poligoni* si è costantemente osservato, che con la stessa carica e sotto costanti angoli di elevazione, i mor-

tari a camera conica han dato portate minori di quelle dei mortari a camera cilindrica. Lo stesso è stato anche altrove osservato (K). La quale differenza nelle portate da questo procede: che per rispetto alla velocità iniziale delle bombe, la camera cilindrica vantaggia d'assai la camera a cono-tronco, attese le cagioni esposte di sopra.

La camera detta a *pera* è formata da un cono-tronco rovesciato con la base minore verso la bocca dell'arma, e la maggiore verso il fondo, che unita ad una mezza sfera dello stesso diametro termina con una piccola ricamera in forma di cilindro retto rotondato, dal quale parte il canaletto del focone. Cosiffatta camera si adoperava presso di noi pei pezzi da montagna del calibro da quattro. Questi si caricavano verticalmente con polvere sciolta, cioè a dire senza essere introdotta nella camera col cartoccio, e davano molto lunghi i tiri, i quali si eseguivano con palle inzocchettate col cuoio imbottito di crino, per togliere qualunque vento.

Sarebbero utilissimi pei mortari gli sperimenti comparativi della camera a pera con le altre di diversa figura. Intanto si fa notare, che la prima, per la obbliquità convergente verso l'orificio, ritarda il movimento de'granelli non accesi, e perciò nella totalità la combustione riesce quasi compiuta: il che in parte influisce nell'aumento della velocità iniziale del proietto; a ciò si aggiunge la rapida accensione, poichè la fiamma della parte accesa ne comprende una porzione minore, cioè a dire l'accensione dal grande procede al piccolo.

Il Comitato di artiglieria in Francia ha accolto nel suo sistema l'obice cannone, munito di camera, nella quale va riposta la polvere serrata nel suo cartoccio: tale camera è un cilindro, il quale si accorda talmente con l'anima da potersi facilmente spingere la carica col calcatore solamente, quantunque lunga sia la bocca da fuoco.

La camera alla Paixhans, stabilita per gli obici cannoni da

(K) Aide-Mémoire 1836 pag. 320 319.

scagliare con tiro rettilineo le bombe, è formata da un cilindro retto, il quale si unisce con l'anima della bocca da fuoco mediante un intermedio cono-tronco, il quale facendo da piano inclinato non solo facilita l'introduzione del cartoccio nella camera, ma di più ha l'inapprezzabile vantaggio di fare combaciare il proietto centralmente nell'anima, e togliere in quel sito il vento. A questo modo si evita al primo istante dell'accensione gran perdita del fluido elastico, e la spinta è quasi diretta al centro del mobile.

Potrebbesi per i mortari adottare ancora una camera formata da una semisfera sormontata da un solido generato da un arco cicloidale; e gli sperimenti potrebbero, forse, mostrare col fatto essere vera la nostra opinione, la quale si fonda sul dato, che la curva della minima discesa è la cicloide, e che perciò la fiamma si potrebbe propagare con velocità maggiore di quella, che nelle altre camere ha luogo: poscia si potrebbe fare un accordo conico tra la camera e l'anima, affinchè si ottenessero per questo mezzo anche i vantaggi del mortaro alla Gomer.

184. Si è creduto sempre dagli artiglieri che il sito del focone influisca sulla forza di proiezione. Questo concorda con le opinioni di Eulero, di Belidoro, e di Gomer, i quali insegnano doversi appiccare il fuoco al centro della carica per avere più prontezza nell'accensione. Gli sperimenti però di Texier di Norbec eseguiti con alcuni mortari, han dimostrato che quelli col focone al fondo dell'anima davano maggiori portate. Hutton, benchè in piccolo, ha fatto conoscere che in qualunque punto sia il focone, la velocità iniziale del proietto rimane la stessa; la medesima sentenza ne porta Rumfort (§. 98).

Texier per altro si esprime ne'seguenti termini de' mortari parlando:

« Resta a sapere se i medesimi effetti avrebbero luogo nei » grandi mortari, e ne'cannoni: poichè le pruove han pre- » sentato fenomeni tanto straordinarii, che io confesso di con- » cepire appena gli effetti della polvere ».

È da osservarsi intanto, che una bomba del peso B, situata nel mortaro inclinato per un angolo α, opporrà tanto peso contro il fluido elastico che si svolge dalla carica, per quanto l'esprime il prodotto B sen α. In conseguenza se la bomba fosse quella da 12, e l'angolo α fosse di 60°, il peso premente risulterebbe di 82^k.sen $60° = 71^k$; 82^k indica il peso medio del mobile compreso la polvere ivi contenuta. Per l'angolo $\alpha = 30°$ il peso premente diventerà $82^k \times \frac{1}{2} = 41^k$.

Similmente pel mortaro da 10, e da 8 si avrebbe con le medesime inclinazioni, rispettivamente

$52^k \times$ sen $60° = 45^k$ circa : 52^k sen $30° = 52^k \times \frac{1}{2} = 26^k$

$21^k \times$ sen $60° = 18^k$ circa : 21^k sen $30° = 21^k \times \frac{1}{2} = 10^k \frac{1}{2}$

per i pesi prementi.

Ciò posto, per i mortari a camera cilindrica, le cariche più grandi che si usano nelle occorrenze, avendo un piccolo rapporto col peso della bomba, fanno sì che la loro infiammazione quasi tutta si esegue prima che essa bomba cominci il moto, poichè non oppone al fluido la sola resistenza, come accade presso a poco pei cannoni (§. 154), ma anche una parte del peso, che varia, come si è osservato, cogli angoli di proiezione. In conseguenza si può stabilire, che ne'mortari in disamina, sia che il focone si situi al fondo, o nel mezzo, o in principio della carica, la velocità iniziale del mobile e la portata non ricevono cambiamenti.

In quanto ai mortari alla Gomer è da notarsi, che le cariche massime, le quali si usano pei tiri, sono maggiori di quelle adoperate per le camere cilindriche: perciò l'indicato rapporto della carica al peso del proietto avrà un certo aumento, e quindi al suindicato ragionamento potrebbe farsi qualche obbiezione. Ma i moltissimi e svariati sperimenti, eseguiti coi detti mortari, in Torino nel 1807 e 1808, a Boulogne-sur-mer nel 1808, a Douvai nel 1822 e 1823, ed a Strasbourg nel 1822 e 1824, hanno condotto il dotto Duchemin a discorrerla in questi termini (I).

(I) Mémorial de l'artillerie pag. 210 n° IV.

« Gli sperimenti non hanno affatto verificato il vantaggio che
» sperava il cavalier Gomer, quando nella Memoria scritta per
» sostenere il suo nuovo mortaro diceva....Conviene comunicare,
» per mezzo di una canna o canale qualunque di 8 in 9 pollici
» di lunghezza, il fuoco al centro dell'asse del volume della ca-
» rica, affine di accendere nel medesimo istante tanto la polvere
» che si trova in fondo alla camera, quanto quella che si trova
» alla superficie di essa; purchè però la bomba riceva la impul-
» sione assoluta che può fornire la polvere ».

Dall'esposto fin quì è da conchiudere, che in tutti i mortari di qualunque sistema, la situazione del focone è indifferente. Però nel 1824 è stato stabilito in Francia, che il centro interno del foro del focone sia di sei linee distante dal fondo della camera, affinchè il foco degli *stoppini* si comunicasse con la massima celerità, anche nelle più piccole cariche che si sogliono usare. Questa pratica è stata una conseguenza degli sperimenti fatti a Vincennes nel 1821, con i quali si è avuto modo di osservare, che gli stoppini ne' mortari da 12, da 10 e da 8 alla Gomer, introdotti ne' foconi terminanti al centro delle camere, caricate rispettivamente con $0^k,5$ $0^k,31$ e $0^k,155$ di polvere, davano un lungo fuoco prima che accadessero le accensioni intere di dette cariche, le quali prendevano le altezze di $0^m,043$, di $0^m,042$ e di $0^m,023$. Si noti intanto che i mortari in generale si caricano con differenti quantità di polvere, percui un focone fisso non si può trovare che al centro di una sola carica assegnata dapprima di peso costante. Non vogliamo trasandare di avvertire essersi stabilito, che i mortari si forano sei linee al disopra del fondo delle camere per avere il modo da poter tutto situare il grano del focone perpendicolarmente nelle pareti esterne di esse camere.

Il grano del focone si usa generalmente quasi in tutte le armi da fuoco, ma si forma solamente di rame; poichè dalla Chimica apprendiamo, che un tal metallo semplice resiste moltissimo tempo alla forza corrusiva degli acidi. Il renderlo poi indipendente dalla

fusione delle armi, offre il gran vantaggio di poterlo facilmente cambiare con poca spesa, allorquando si trova evasato, senza che la bocca da fuoco sia reputata non più idonea al servizio.

185. In quanto agli effetti della posizione del focone, nei cannoni e negli obici, non si sono eseguiti sperimenti precisi, come pei mortari. Si è fatto però osservare in generale (§. 99), che per analogia gli sperimenti da Hutton eseguiti con piccoli calibri, conducevano alla conseguenza, che anche pei grossi calibri è indifferente portare il fuoco ad un punto o ad un altro della carica. Nondimeno gli sperimenti eseguiti con canne di schioppo e di pistole in Parigi nel 1817, ai quali presedè d'Anthoüard, diedero a conoscere fra le altre cose, che situando il focone distante dal fondo dell'anima per $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{6}$ del calibro, si ottenevano i massimi effetti, alloraquando la carica di polvere era il terzo del peso del proietto. Da tali fatti Duchemin conchiude così..... che tutte le cagioni, le » quali influiscono nello svolgersi del fluido elastico delle ca- » riche di polvere, operano in guise sottoposte alle stesse » leggi per tutti i cannoni ».

» Per effetto di questa simiglianza, nella maniera di ope- » rare di ciascuna di quelle cagioni; simiglianza che gli au- » tori più celebri, i quali hanno scritto di artiglieria come » Robins, Eulero, d'Arcy, d'Antoni, aveano già preveduta » ed ammessa: si è con molto fondamento conchiuso per in- » duzione dal piccolo al grande, e quindi sonosi estesi ai can- » noni di grosso calibro i risultamenti ottenuti negli sperimenti » fatti con canne di armi da fuoco portatili ».

Per quello che concerne i pezzi di Gribeauval, secondo le tavole di costruzione, si rileva che l'asse del focone incontra quello del pezzo ad una distanza dal fondo dell'anima di $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{6}$ circa del calibro dell'arma. Siffatta lunghezza si accorda con quella di sopra accennata.

Giusta la norma degli sperimenti fatti in Parigi, la detta distanza fa sì che nelle piccole cariche, le quali si usano nel tiro a rimbalzo,

ugualmente che nelle grandi, le polveri prontamente si accendono, e in maniera diretta dal fuoco degli stoppini.

186. Affine di procedere alla conservazione delle armi, bisogna allogare il focone vicino al fondo dell'anima presso a poco, come si è detto, ma in positura obbliqua verso la bocca; poichè la fiamma svolgendo sempre verticalmente la sua forza, questa per siffatta situazione del focone verrà ritardata e deviata, e quindi la esuberanza del fluido elastico si dovrà imbattere contro del mobile a pro della velocità iniziale del proietto.

Gli sperimenti nel 1830 praticati a Douvai, a Toulouse e a Strasbourg con tre pezzi da 16, tre da 24, ed altrettanti da 24, caricati con polvere di peso eguale al terzo di quello della palla, e muniti rispettivamente con foconi adattati nel prolungamento degli assi, inclinati a questi per 30°, ed eseguiti alla maniera ordinaria, ebbero concordemente dimostrato che in quest'ultima positura si ottengono recessi più corti, portate costanti, giustezza maggiore nei tiri, ed un minor guasto nell'interno delle anime.

Quali che possano essere le cagioni che dichiarano gli sperimenti suddetti, ed altri in altro luogo analizzati, certo si è che rimane sempre maggiormente confermato, che in quasi tutte le dimensioni stabilite da Gribeauval nelle diverse costruzioni del suo sistema di artiglieria, si appalesa ad ogni punto la impronta del genio. Questo detto di Allix (K) confortato dai riferiti fatti congiunti ad altri infiniti della stessa natura, debbono ingenerare una ragionevole circospezione, allorchè si tratta di rimuovere o di mutare alcuna cosa dalle macchine di artiglieria da così chiaro e valente maestro stabilite e congegnate con principii geometrici e sperimentali, a noi rimasti fino al presente alquanto sconosciuti.

FINE DELLA QUARTA PARTE

(K) Nuovo sistema di artiglieria.

Digitized by Google

PARTE QUINTA.

TEORICA I.

Balistica nel mezzo resistente, considerando costante la densità dell' aria.

187. Sia una sfera spinta nell' aria con un angolo qualunque di proiezione. È evidente ch' essa non descriverà una parabola (§. 1), ma bensì un' altra curva che verremo analizzando, ponendo che il mobile abbia

1.° Il centro di gravità nel centro di figura.

2.° Sia perfettamente liscio.

Dalle quali due condizioni consegue, che se il mobile concepisse il solo moto di rotazione intorno ad un suo asse, non troverebbe alcuna resistenza per parte dell' aria. E se oltre a tal moto avesse anche quello di traslazione, la resistenza sarebbe la stessa come se la rotazione non si effettuasse.

Sia a il diametro della sfera, D la sua densità riferita all' aria, V la velocità iniziale, α l' angolo di proiezione, v la velocità residua alla fine del tempo t, dopo percorso l' arco s della curva.

Essendo $\varphi = \frac{v^2}{c}$ (§. 60) la forza acceleratrice del moto, possiamo supporre che nel valore di $c = \frac{4aD}{3k} k$ sia costante come per esempio, si è stabilito per le velocità da 400 a 1800 piedi $k = 0,9$ (§. 61) senza sensibile errore.

Se il moto avesse luogo in un sito, ove la densità dell' aria fosse espressa da un numero che facesse essere D' la densità

del proietto, sarebbe $c' = \frac{4aD'}{3k}$; e quindi

$$D : D' :: c : c' = \frac{D'}{D} c ;$$

e la forza φ diventerebbe $\varphi = \frac{v^2}{c'}$.

Poniamo ora che l'aria sia in tutti i luoghi densa egualmente, cioè nella teorica immaginiamo che l'aria non si vada rarefacendo. La quale ipotesi ben si può ammettere, (quantunque siasi già col fatto osservato il contrario nel §. 76, vale a dire che l'aria è evanescente), perciocchè si è dimostrato che ad una certa altezza l'aria non cambia sensibilmente di densità (§. 76), e che trattandosi di proietti i quali, come le bombe, descrivono curve molto elevate, la decrescenza atmosferica non ha forza alcuna da far fallare il colpo; giacchè i bersagli su cui si tira in siffatta guisa, sono molto grandi, e poco importa se la caduta del mobile sia piuttosto in uno che in un altro punto. Pur nulladimeno nelle seguenti teoriche considereremo il caso della decrescenza nella densità atmosferica.

Supponiamo che il proietto abbia descritta la traettoria, e ds ne sia un elemento, che faccia coi tre assi coordinati z, y, x rispettivamente gli angoli D, B, A; sarà

$$\cos D = \frac{dz}{ds}, \cos B = \frac{dy}{ds}, \text{ e } \cos A = \frac{dx}{ds}.$$

Per conseguenza le componenti delle forze ritardatrici del moto saranno

$$-\varphi \cdot \frac{dx}{ds}, \; -\varphi \cdot \frac{dy}{ds}, \text{ e } -\varphi \cdot \frac{dz}{ds} - g,$$

secondo le parallele agli assi coordinati; ma dalla Dinamica si ha

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \; \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \text{ e } \frac{d^2z}{dt^2} = Z;$$

in cui X, Y e Z esprimono le somme delle componenti di tutte le forze che agiscono su di un corpo, prese secondo le parallele agli assi; onde

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\varphi\frac{dx}{ds},\ \frac{d^2y}{dt^2}=-\varphi\frac{dy}{ds},\ \frac{d^2z}{dt^2}=-g-\varphi\frac{dz}{dt}.$$

Dividendo la prima per la seconda, si ha

$$\frac{d^2x}{d^2y}=\frac{dx}{dy},\ \text{e}\ \frac{d^2x}{dx}=\frac{d^2y}{dy}\ ;\ \text{integrando}$$

$\log.dx=\log.dy+\log.C=\log.Cdy$; e $dx=Cdy$; integrando un'altra volta, $x=Cy+C'$. La C' va a zero, perchè facendo $x=0$ risulta $y=0$, e perciò $x=Cy$, ch'è l'equazione alla proiezione della traettoria nel piano orizzontale. E siccome essa esprime una retta che parte dall'origine delle ordinate, così la linea descritta dal mobile passa per tale origine e dev'essere a semplice curvatura; perciò si può far uso di un sol piano nelle ricerche balistiche, e propriamente di quello della curva in disamina, rapportata a due assi rettangolari, uno orizzontale che parta dall'origine del moto, e l'altro verticale. Con ciò le tre suddette equazioni si riducono alle due

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\varphi\frac{dx}{ds},\ \frac{d^2y}{dt^2}=-g-\varphi\frac{dy}{ds};\ \text{ma}\ \varphi=\frac{v^2}{c}=\frac{1}{c}\cdot\frac{ds^2}{dt^2},\ \text{dunque}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{1}{c}\cdot\frac{ds^2}{dt^2}\cdot\frac{dx}{ds}=-\frac{1}{c}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}\ \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-g-\frac{1}{c}\cdot\frac{ds^2}{dt^2}\cdot\frac{dy}{ds}=-g-\frac{1}{c}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}\ \ldots\ldots\ (2);$$

dalla (1) viene

$$\frac{d^2x}{dt}=-\frac{1}{c}\cdot ds\cdot\frac{dx}{dt},\ \frac{\frac{d^2x}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{1}{c}ds:\ \text{integrando}$$

$$\log.\text{ip}\frac{dx}{dt}=-\frac{s}{c}+\log.\text{ip}\,C.$$

Sia e la base de' logaritmi iperbolici: avremo

$$\log.\text{ip}\frac{dx}{dt}=-\frac{s}{c}\log.\text{ip}\,e+\log.\text{ip}\,C=\log.\text{ip}\,Ce^{-\frac{s}{c}};$$

$e\frac{dx}{dt}=Ce^{-\frac{s}{c}}$; allorquando $s=0$ si ha $e^{-\frac{s}{c}}=1$, e $\frac{dx}{dt}=C$.

La costante dunque in questo caso indica la componente della velocità iniziale presa secondo la parallela all'asse delle x, e quindi $C=V\cos\alpha$: perciò l'integrale diventa

$$\frac{dx}{dt}=V\cos\alpha\cdot e^{-\frac{s}{c}}\ldots\frac{dx^2}{dt^2}=V^2\cos^2\alpha.e^{-\frac{2s}{c}}\ldots(3):$$

equazione che in seguito è atta ad eliminare il tempo: essa esprime tutte le circostanze del moto.

Sia $p=\frac{dy}{dx}$ cioè la tangente dell'angolo che l'elemento variabile della curva fa con l'asse delle ascisse; quindi $dy=pdx$. Differenziando, e dividendo per dt^2 si ha

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}+p\cdot\frac{d^2x}{dt^2};$$

sostituendovi i valori di $\frac{d^2x}{dt^2}$, e $\frac{d^2y}{dt^2}$ presi dalla (1) e (2), e facendo le riduzioni, si ottiene

$$\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}=-g\ldots\ldots\ldots(4).$$

Questa equazione divisa membro a membro con la (3), dà

$$\frac{dp}{dx}=-\frac{g}{V^2\cos^2\alpha}e^{\frac{2s}{c}}\ldots\ldots(5),$$

che indica l'equazione alla traiettoria, nella quale sono tre variabili x, s e p. Per ridurla a contenerne due, si operi come segue.

Digitized by Google

Essendo $ds = dx\sqrt{1+p^2}$, la quale moltiplicata per l'antecedente dà

$$dp\sqrt{1+p^2} = -\frac{g}{V^2\cos^2\alpha}e^{\frac{2s}{c}}ds\text{, e}$$

$$\int dp\sqrt{1+p^2} = -\frac{g}{V^2\cos^2\alpha}\int e^{\frac{2s}{c}}ds.$$

Per eseguire le integrazioni si comincia col metodo per parti dal primo membro; dunque

$$\int dp\sqrt{1+p^2} = p\sqrt{1+p^2} - \int\frac{p^2dp}{\sqrt{1+p^2}}\text{; ma}$$

$$\int dp\sqrt{1+p^2} = \int\frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+p^2}}\cdot dp\sqrt{1+p^2} = \int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} + \int\frac{p^2dp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Sommando queste due equazioni si ha dividendo per due,

$$\int dp\sqrt{1+p^2} = \tfrac{1}{2}p\sqrt{1+p^2} + \tfrac{1}{2}\int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}\text{; e poichè}$$

$$\int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int\frac{p+\sqrt{1+p^2}}{p+\sqrt{1+p^2}}\cdot\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int\frac{\frac{pdp}{\sqrt{1+p^2}} + dp}{p+\sqrt{1+p^2}} =$$

$$\log.\text{ip}(p+\sqrt{1+p^2}),$$

per essere il numeratore un esatto differenziale del denominatore. In conseguenza

$$\int dp\sqrt{1+p^2} = \tfrac{1}{2}p\sqrt{1+p^2} + \tfrac{1}{2}\log.\text{ip}(p+\sqrt{1+p^2}).$$

Pel secondo membro si osserva che $\int e^{\frac{2s}{c}}ds = \frac{c}{2}e^{\frac{2s}{c}}$; e

$$\tfrac{1}{2}p\sqrt{1+p^2} + \tfrac{1}{2}\log.\text{ip}(p+\sqrt{1+p^2}) = \tfrac{1}{2}C - \frac{gc}{2V^2\cos^2\alpha}e^{\frac{2s}{c}}:$$

all'origine delle coordinate si ha $s=0$, e $p=\tan\alpha$, adunque

$$C = \tan\alpha\sqrt{1+\tan^2\alpha} + \log.\text{ip}(\tan\alpha+\sqrt{1+\tan^2\alpha}) + \frac{gc}{V^2\cos^2\alpha};$$

e facendo per comodità del calcolo

$$P = p\sqrt{1+p^2} + \log.\text{ip}(p+\sqrt{1+p^2})\,;$$ si otterrà

$$P = C - \frac{gc}{V^2\cos^2\alpha}\, e^{\frac{2s}{c}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)\,;$$

fra questa e la (5) si elimini $e^{\frac{2s}{c}}$, si otterrà $P = C + c\frac{dp}{dx}$, e

$$dx = -\frac{cdp}{C-P} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)\,;$$

ma $dy = pdx$, dunque

$$dy = -\frac{cpdp}{C-P} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Se queste due ultime equazioni si potessero integrare si avrebbe x in funzione di p, ed y anche in funzione di p, il quale eliminato darebbe l'equazione finita della traiettoria fra x ed y: ma siccome l'analisi non si presta a ciò, così in seguito daremo l'equazione della curva balistica, secondo una ipotesi coerente alla natura del quesito. Dalla equazione (4) si ha $dt^2 = -\frac{dp.dx}{g}$. Sostituendo per dx il suo valore viene

$$dt = -\frac{dp}{\sqrt{(C-P)\frac{g}{c}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Usiamo il segno meno, perchè pel ramo ascendente la tangente p diminuisce, ed il tempo cresce.

Essendo $v = \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt}\sqrt{1+p^2}$, sostituendo i valori di dt, e di dx si ricava

$$v = \sqrt{\frac{cg(1+p^2)}{C-P}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

L'equazione (6) dà $e^{\frac{2s}{c}} = \frac{V^2\cos^2\alpha}{gc}(C-P)$; e

$$\frac{2s}{c}\log.\text{ip}.e = \log.\text{ip}\frac{V^2\cos^2\alpha}{gc}(C-P)\text{; dunque}$$

$$s = 2,30258\frac{c}{2}\log\frac{V^2\cos^2\alpha}{gc}(C-P) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Alla sommità della curva è $p=0$, e chiamando u la velocità del corpo in tal punto, risulta dalla (10)

$$u = \sqrt{\frac{cg}{C}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

perciocchè il valore di P viene zero quando p è zero. Paragonando il valore di v con quello di u si ritrae, *che la minima di tutte le velocità del ramo ascendente è al vertice della curva.*

188. Nelle formole antecedenti il C dev'essere sempre maggiore di P: se fosse $C=P$ sarebbe $v=\infty$, se $C<P$ v diventerebbe immaginaria.

Dalle quali cose conseguita che nel ramo ascendente p devesi prendere minore di $\tan\alpha$, come pure apparisce manifestamente dalla equazione (6. §. 187).

L'equazioni (7. e 8. §. 187) se si potessero integrare, si eliminerebbe la p, e rimarrebbe un'equazione fra x, ed y, quella cioè della traiettoria; ma nemmeno con l'analisi si conosce il modo di pervenire a dette integrazioni con termini finiti: quindi la traiettoria nel mezzo resistente non può descriversi che per assegnazione di punti.

(*Fig. 33*). Supponiamo disegnata la traiettoria ABC, la quale s'intenda divisa in tanti piccolissimi archi o lati, che prolungati formano degli angoli con l'asse xx'. Tali angoli per maggior semplicità siano presi in progressione aritmetica da α fino a zero: con ciò si potranno calcolare i valori successivi di s, e poscia stabilire quelli di x ed y.

L'arco AD sarà di cognita lunghezza, se nella formola (11. §. 187) per p si sostituisca la tangente dell'angolo DFx, ben inteso però che la DF sia tangente alla curva. Similmente

sarà cognito l'arco AE, emergente dall'angolo EGx, la cui tangente va sostituita nella stessa formola in vece di p: percui si conoscerà la differenza DE de' detti archi, la quale si accosta tanto più alla retta quanto minore è il divario degli angoli DFx, ed EGx. Sia piccolissima una tale differenza, l'arco DE si potrà, senza sensibile errore, considerare come una retta piccolissima, e quindi

$$DN = DE \cos EDN = DE \cos DFx = Dx$$
$$NE = DE \operatorname{sen} EDN = DE \operatorname{sen} DFx = Dy\,;$$

questi valori si sono chiamati generalmente Dx, e Dy; e cogli stessi simboli esprimeremo tutti gli altri presi della stessa maniera.

Chiamando ε l'angolo variabile DFx, l'angolo minore EGx supporremo che ne differisca per 1°, onde $DFx = \varepsilon$ e $EGx = \varepsilon - 1$. Sostituendo nella (11. §. 187) per p $\tan \varepsilon$ si otterrà il valore dell'arco AD che dinotiamo con s_ε: sostituendo poi per p $\tan(\varepsilon - 1)$ si avrà l'arco maggiore AE che esprimiamo con $s_{\varepsilon-1}$ percui $DE = s_{\varepsilon-1} - s_\varepsilon$, ed indicando questo con Ds, verrà

$$Ds = s_{\varepsilon-1} - s_\varepsilon \ldots Dx = Ds \cdot \cos \varepsilon \ldots Dy = Ds \,.\, \operatorname{sen} \varepsilon.$$

Sia l'angolo di proiezione $\alpha = 40°$, e sia AV il primo elemento della curva, onde $\varepsilon = 40°$, e $\varepsilon - 1 = 39°$ con ciò $s_{\varepsilon-1} = s_{39}$, ed $s_\varepsilon = s_{40}$, valori che si hanno facendo in (11. §. 187) $p = \tan 39°$, e $p = \tan 40°$. Ora nella detta formola quando si fa $p = \tan 40° = \tan \alpha$ risulta l'arco eguale a zero, perciò il primo elemento della curva sarà $Ds = s_{39}$: in conseguenza

$$Dx = Ds \cdot \cos 40°, \text{ e } Dy = Ds \cdot \operatorname{sen} 40°.$$

Si tagli $AI = Ds \cdot \cos 40°$, e la perpendicolare $IV = Ds \cdot \operatorname{sen} 40°$: la congiungente AV indicherà il primo elemento della curva.

Per trovare il secondo elemento VD, si faccia $p = \tan.39°$, e $p = \tan.38°$: la formola medesima darà s_{39} ed s_{38} quindi

$$Ds = s_{38} - s_{39},\ Dx = Ds \cdot \cos 39° \text{ e } Dy = Ds \cdot \operatorname{sen} 39°.$$

Si elevi VZ normale ad IV ed eguale a questo valore di Dx, si tiri ZD perpendicolare a VZ ed eguale al valore di Dy; D sarà un punto della curva, e la VD il secondo elemento.

Proseguendo nella stessa guisa si otterranno gli altri elementi DE, EB ec., della traiettoria, la quale rimarrà descritta per assegnazione di punti. Si noti intanto che al vertice B della curva è $\varepsilon - 1 = 0$, onde con $p = \tan 0^\circ = 0$ la (11. §. 187) dà il valore della AB, con $p = \tan . 1^\circ$ dà AE, quindi l'ultimo elemento EB sarà indicato da $Ds = s_0 - s_1$ determinato con $Dx = Ds \cos \cdot 0^\circ = Ds$, e con $Dy = Ds \cdot \text{sen} \cdot 0^\circ = 0$.

La somma di AI, VZ, DN.... forma l'ascissa al vertice B, e la somma di VI, DZ, NE... ne costituisce l'ordinata.

Alla sommità della curva essendo $p = 0$ ne segue, che pel ramo discendente gli archetti, i quali si prolungano fino all'asse delle ascisse formeranno angoli, le cui tangenti debbonsi prendere negativamente: perchè i primi angoli da α° diminuiscono gradatamente fino a diventar zero, perciò dopo questo limite dovranno essere di segno contrario ai medesimi. In conseguenza nel valore di P si deve prendere p negativamente, e la espressione diventa $-P = -p\sqrt{1+p^2} + \log . \text{ip}(-p+\sqrt{1+p^2})$; ma $(-p+\sqrt{1+p^2})(p+\sqrt{1+p^2}) = 1$, prendendo i logaritmi si ha $\log . \text{ip}(-p+\sqrt{1+p^2}) + \log . \text{ip}(p+\sqrt{1+p^2}) = 0$; e perciò $\log . \text{ip}(-p+\sqrt{1+p^2}) = -\log \text{ip}(p+\sqrt{1+p^2})$; e quindi $-p\sqrt{1+p^2} + \log . \text{ip}(-p+\sqrt{1+p^2}) = -p\sqrt{1+p^2} - \log . \text{ip}(p+\sqrt{1+p^2})$

Ciò dimostra che nelle formole di sopra esposte, nelle quali trovasi P, si debbono cambiare i segni al primo termine del valore di questo, e al solo logaritmo, volendo considerare un punto del ramo discendente; o pure cambiare $-P$ in $+P$. Con siffatta avvertenza le formole del §. 187 ci danno

$$dx = \frac{cdp}{C+P} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7 \text{ bis.})$$

$$dy = -\frac{cpdp}{C+P} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8. \text{ bis.})$$

$$dt = + \frac{dp}{\sqrt{\left(C+P\right)^{\frac{g}{c}}}} \quad \ldots\ldots \quad (9. \text{ bis.})$$

$$v=\sqrt{\frac{cg(1+p^2)}{C+P}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10.\ \text{bis.})$$

$$s=2{,}30258\frac{c}{2}\log\cdot\frac{V^2\cos^2\alpha}{gc}(C+P) \quad . \; (11.\ \text{bis.}).$$

Volendo descrivere il ramo discendente della curva, sia QK l'elemento che faccia l'angolo ε coll'asse delle x: sarà l'arco $ABQ=s_\varepsilon$ il quale si ottiene mettendo nell'ultima formola per $p\tan\varepsilon$, e $ABP=s_{\varepsilon-1}$ che si ottiene sostituendo nella stessa formola per $p\tan(\varepsilon-1)$: per le quali cose viene, $QK=Ds=s_\varepsilon-s_{\varepsilon-1}$, a questa vanno unite le due di sopra ch'esprimono i valori di Dx, e di Dy.

Volendo il primo elemento BP del ramo discendente in (11. bis.) si faccia $p=\tan 1^\circ$, e sia $ABP=s_1$, ma si ha $AB=s_0$, onde $BP=Ds=s_1-s_0$, $BO=Dy=Ds.\text{sen}\,1^\circ$, e $OP=Dx=Ds.\cos 1.^\circ$ Collo stesso procedimento si ha $PQ=Ds=s_2-s_1$, $PR=Dy=Ds\cdot\text{sen}\,2^\circ$, e $RQ=Dx=Ds\cdot\cos 2^\circ$, e così seguitando ec: ma $PS=BM-BO$, $QT=PS-PR$; onde $QT=BM-BO-PR$. Col medesimo metodo si valutano le altre ordinate ed ascisse. Quando l'ordinata massima BM, pareggi $BO+PR+QV+$ ec, risulta l'ultima ordinata eguale a zero, o pure i valori delle Dy prese insieme eguali a BM, come avviene fino in C, punto d'incontro della curva con l'asse delle ascisse. L'angolo che ha dato l'ultima ordinata eguale a zero, è quello appunto fatto nella caduta, cioè l'angolo che l'ultimo elemento della linea balistica fa con la orizzontale Ax. La tangente di detto angolo posta nella formola (10. bis.) darà la velocità di caduta.

La somma delle OP, RQ, VK ec. unite alle altre del ramo ascendente darà il valore dell'ampiezza AC.

189. Volendo descrivere la curva per assegnazioni di punti, si deve valutare l'espressione P derivante dai diversi valori che prende p, tangente dell'angolo variabile che l'elemento della curva fa con l'asse delle x, il quale angolo si è indicato con ε.

Ad oggetto di facilitare le applicazioni trascriviamo una tavola analoga riportata da Persy (*K*).

TAVOLA XXXIII.

Valori di P, *supponendo l' angolo* ε *da uno fino a 75 gradi.*

GRADI.	P	GRADI.	P	GRADI.	P	GRADI.	P
1	0,0349118	21	0,7861846	41	1,9376796	61	5,073552
2	0, 068556	22	0,8295274	42	2,0207800	62	5,395036
3	0,1048636	23	0,8737948	43	2,1078938	63	5,749808
4	0,1399674	24	0,9190580	44	2,1993680	64	6,149002
5	0,1752002	25	0,9653888	45	2,2955868	65	6,580791
6	0,2105948	26	1,0128648	46	2,3969792	66	7,070640
7	0,2461852	27	1,0615690	47	2,5040232	67	7,621668
8	0,2820044	28	1,1115904	48	2,6172506	68	8,245098
9	0,3180884	29	1,1630240	49	2,7372606	69	9,954882
10	0,3544730	30	1,2159726	50	2,8647228	70	9,768500
11	0,3911952	31	1,2705464	51	3,0003940	71	10,708150
12	0,4282928	32	1,3268650	52	3,1451314	72	11,802322
13	0,4658060	33	1,3850574	53	3,2999038	73	13,088036
14	0,5037754	34	1,4452622	54	3,4658378	74	14,614441
15	0,5422436	35	1,5076322	55	3,6441340	75	16,447129
16	0,5812554	36	1,5723312	56	3,8363024	76	
17	0,6208576	37	1,6395398	57	4,0439876	77	
18	0,6610990	38	1,7094532	58	4,2691192	78	
19	0,7020306	39	1,7822878	59	4,5139382		
20	0,7437074	40	1,8582760	60	4,7810592		

(K) Cours de Balistique §. 43.

La 1ª, 3ª, 5ª ec. colonna indicano gli angoli che gli elementi della traiettoria fanno con l'asse delle x: la 2ª, 4ª, 6ª ec. i valori rispondenti di P; che si ottengono col sostituire per p le tangenti di detti angoli.

Siccome nel valore di C vi è la tangente dell'angolo di proiezione, disposta nella stessa guisa che trovasi p nel valore di P, così questa tavola torna anche utile per apprezzare il valore della costante suddetta.

Esempio. Sia $a=0^m,2707$, diametro della bomba da dieci, $V=200^m$, $\alpha=40°$, sarà $\log\frac{4aD}{3}=3,16290$ (§. 62. Tav. XV).

Essendo $c=\frac{4aD}{3k}$ (§. 60) in cui $k=0,9$; sarà $c=\frac{4aD}{3\times0,9}$; e quindi $\log c=3,16290+\text{com.log.}0,9=3,16290+0,04576=3,20866$, e $c=1616^m$ circa.

$\log.V^2(=200)^2$	4,60206
$\log.\cos^2\alpha(=\cos^2 40°)$	9,76850
com.log.c	6,79134
com.log.$g(=9^m,809)$	9,00838
$\log\frac{V^2\cos^2\alpha}{gc}$	0,17028

quindi $\log\frac{gc}{V^2\cos^2\alpha}$. . . . . 9,82972, il numero è eguale a . . . . . 0,6757.

Essendo

$C=\tan.40°\sqrt{1+\tan^2 40°}+\log.\text{ip}(\tan.40°+\sqrt{1+\tan^2 40})+0,6757$

ma le prime due parti del secondo membro sono eguali a 1,8583 (Tav. XXXIII); dunque $C=1,8583+0,6757=2,5340$.

In P per p si sostituisca $\tan.\varepsilon$, fatto $\varepsilon=39°$ si ha

$p=\tan.39°$; e quindi $P=\tan.39°\sqrt{1+\tan^2 39°}+\log.\text{ip}(\tan.39°+\sqrt{1+\tan^2 39°})=1,7823$; e $C-P=0,7517$;

e $\log.(C-P)=9,87604$, onde la formola (11. §. 187) dà

$$s=2,30258\times\frac{c}{2}\log\frac{V^2\cos^2\alpha}{cg}(C-P)=2,30258\times$$

$$\frac{c}{2}(0,17028+9,87604)=2,30258\times\frac{c}{2}\times0,04632, \text{ e}$$

log. 2,30258	0,36229
log. c	3,20866
com. log. 2	9,69897
log. 0,04632	8,66577
log. s	1,93569

$s=86^m$ circa.

Per avere con più esattezza la descrizione della traiettoria, si considera la metà di quest'arco, ossia 43^m, a fine di rinvenire (§. 188) $Dx=43^m\cos.40^\circ=33^m$, e $Dy=43^m\,\text{sen}.40^\circ=28^m$.

Facendo nel valore di P, $p=\tan.38^\circ$, per la detta tavola viene $P=1,7095$; dunque $C-P=2,5340-1,7095=0,8245$, e $\log(C-P)=9,91619$, il quale unito al logaritmo costante di $\frac{V^2\cos^2 40}{gc}$, emerge 0,08647, ed $s'=2,30258\times\frac{c}{2}\times0,08647=160^m$; percui $s'-s=74^m$, la metà è 37^m; dunque $Dx=37^m.\cos.39^\circ=29^m$, $Dy=37^m\,\text{sen}.39^\circ=23^m$.

Lo stesso metodo si può proseguire fino alla sommità della curva, ove $p=0$.

Tutti i valori di Dx sommati daranno l'ampiezza del ramo ascendente, e quelli di Dy indicheranno l'altezza della gettata.

Pel ramo discendente poi si fa un calcolo simile a questo, usando la formola

$$s=2,30258\times\frac{c}{2}\log.\frac{V^2\cos^2.40^\circ}{gc}(C+P),$$

nella quale il P si valuta successivamente facendo p eguale a $\tan 1^\circ$, $\tan 2^\circ$, $\tan 3^\circ$.... ec. fino a trovare l'incontro della curva con l'asse delle ascisse (§. 188).

Per conoscere le diverse velocità nello stesso esempio, si risolva la formola (10. §. 187), la quale dà

$$v=\sqrt{\frac{cg.\sec^2.39^\circ}{C-P}}=\frac{1}{\cos.39^\circ}\sqrt{\frac{gc}{C-P}};$$

percui

$\log.c$	3,20866
$\log.g(=9^m,809)$.	0,99162
$\log\ cg$	4,20028
com. $\log.(C-P)(=0,7517)$ . . .	0,12396
$\log.\frac{gc}{C-P}$	4,32424
	=
$\log\sqrt{\frac{gc}{C-P}}$	2,16212
com. $\log.\cos.39^\circ$.	0,10950
$\log.v$	2,27162

$v=186^m$ circa.

In quanto a $p=\tan 38^\circ$ risulta il calcolo seguente

$\log.gc$	4,20028
com. $\log.(C-P)(=0,8245)$ . . .	0,08381
$\log\frac{gc}{C-P}$	4,28409
	=
$\log\sqrt{\frac{gc}{C-P}}$.	2,14204
com. $\log.\cos.38^\circ$.	0,10347
$\log.v'$	2,24551

$v'=176^m$;

onde la velocità media sarà $\frac{v+v'}{2}=\frac{186+176}{2}=181^m$. Tal'è la

velocità media del proietto allorchè si trova nell' arco determinato dai punti di contatto delle due tangenti alla curva, che fanno con l' asse della ϖ gli angoli di 39 e 38 gradi.

Dall' arco zero a quello in cui la tangente s' inclina per 39°, la velocità media sarà

$$\frac{V+v}{2}=\frac{200^m+186^m}{2}=193^m.$$

Il rispondente tempo verrà indicato dallo spazio diviso per la celerità, ossia

$$t=\frac{86}{193}, \text{ e}$$

log. 86.	1,93450
com. log. 193	7,71444
log. t	9,64894

$$t=0'',445.$$

Cioè a dire, l' arco dall' origine delle coordinate al punto, ove la tangente alla curva fa l' angolo di 39° con l' asse orizzontale, si può considerare come percorso dal mobile con moto equabile con la velocità di 193 metri a secondo, nel tempo di 0'',445.

Similmente l' arco $s'-s=74^m$ compreso tra le tangenti consecutive suddette, può considerarsi descritto dal proietto equabilmente con la velocità di 181^m, ed il tempo corrispondente verrà $t'=\frac{74}{181}=0'',408$ circa; dunque $t+t'=0'',445+0'',408=$ 0'',853, tempo che impiega il proietto a percorrere l' arco incominciando dall' origine del moto al punto della curva, la cui tangente fa 38° con l' asse orizzontale, e così seguitando. Abbiamo trovato il tempo cogl' infinitamente piccoli; perchè la formola (9. §. 187) non può integrarsi con termini finiti.

Per rinvenire la velocità al vertice della linea balistica, si risolva la formola (12. §. 187) la quale dà il seguente calcolo

$$\begin{array}{lr} \log.c \ldots\ldots\ldots\ldots & 3{,}20866 \\ \log(=9{,}809) \ldots\ldots\ldots & 0{,}99162 \\ \text{com.}\log C(=2{,}534) \ldots\ldots & 9{,}59619 \\ \hline \log.\frac{cg}{C} \ldots\ldots\ldots\ldots & 3{,}79647 \\ \log\sqrt{\frac{cg}{C}} \ldots\ldots\ldots\ldots & 1{,}89823 \end{array}$$

$$u = 79^{m} \text{ circa.}$$

L'esempio suddetto può servire di esemplare per tutti gli altri che nelle applicazioni si usano. Un tale metodo appartiene ad Eulero.

190. Poichè $\varphi = -\frac{v^2}{c}$, facendo $c =$ all'infinito, risulta $\varphi = 0$, cioè la forza ritardatrice eguale a zero; la qual cosa accade appunto nel vôto. Da ciò deriva, che se nelle formole (7. 8. §. 187) si fa $c = \infty$, esse si convertiranno in quelle trovate quando trattammo della balistica nel vôto. Infatti la (7. §. 187) dà

$$dx = -c \cdot \frac{dp}{\tan\alpha.\sqrt{1+\tan^2\alpha} + \log.\text{ip}(\tan\alpha + \sqrt{1+\tan^2\alpha}) + \frac{cg}{V^2\cos^2\alpha} - P} =$$

$$-c\frac{dp}{Q + \frac{cg}{V^2\cos^2\alpha} - P};$$

si sono fatti i primi due termini del denominatore eguale Q, onde

$$dx = -\frac{cV^2.\cos^2\alpha.dp}{cg + V^2\cos^2\alpha(Q-P)} = -\frac{V^2\cos^2\alpha.dp}{g + \frac{V^2\cos^2\alpha}{c}(Q-P)};$$

facendo $c = \infty$ viene $\frac{V^2\cos^2\alpha}{c} = 0$, $dx = -\frac{V^2\cos^2\alpha.dp}{g}$, e

$dp = -\frac{gdx}{V^2\cos^2\alpha}$; integrando

$p = -\frac{gx}{V^2\cos^2\alpha}$: la costante diventa $\tan\alpha$, perchè quando

$x = 0$ $p = \tan\alpha$; l' integrale perciò viene

$p = \frac{dy}{dx} = \tan\alpha - \frac{gx}{V^2\cos^2\alpha}$: integrando dopo aver moltiplicato per dx,

$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2V^2\cos^2\alpha}$, ch' è la stessa formola (1. §. 1).

Alla medesima si perviene se risolviamo la (8. §. 187).

191 Volendo considerare i punti della traiettoria al disotto dell' asse delle x, conviene nelle formole (7 bis. 8 bis. §. 188) cambiare $+y$ in $-y$, o vero dy in $-dy$, con ciò si ottiene

$$dx = \frac{cdp}{C+P}, \quad dy = \frac{cpdp}{C+P}$$

Supponiamo che una tangente alla curva faccia con l' asse delle x un angolo prossimo a 90°, sarà p un numero grandissimo, perciò nel valore di $P = p\sqrt{1+p^2} + \log\cdot\text{ip}(p+\sqrt{1+p^2})$ (§. 187) l'unità è trascurabile rispetto p^2, e viene $P = p^2 + \log.\text{ip}\,2p$, o pure $P = p^2 + \log.\text{ip}\,2 + \log.\text{ip}\,p$, quì del pari $\log.\text{ip}\,2$, e $\log.\text{ip}\,p$ sono trascurabili rispetto p^2, infine resta $P = p^2$, onde

$$dx = \frac{cdp}{C+p^2}, \quad dy = \frac{cpdp}{C+p^2}.$$

Nella ipotesi poi che la tangente alla curva faccia un angolo sempre crescente da differir poco da 90°, la C sarà anche trascurabile rispetto p^2, e quindi

$$dx = \frac{cdp}{p^2}, \quad dy = \frac{cdp}{p}.$$

Queste due formole daranno le coordinate ad un punto del ramo discendente, il quale stà al disotto dell'asse delle x nella

ipotesi di ε da differir pochissimo dall'angolo retto. Integrando, queste equazioni danno

$$x = -\frac{c}{p} + C', y = c \log.\text{ip}.p + C''.$$

Allorchè $x = 0$, ed $y = 0$, viene $p = \tan \alpha$; quindi

$C' = \frac{c}{\tan \alpha}$, $C'' = -c \log.\text{ip}.\tan \alpha$; e gl'integrali particolari saranno

$$x = c\left(\frac{1}{\tan \alpha} - \frac{1}{p}\right), \; y = c \log.\text{ip} \frac{p}{\tan \alpha}.$$

Allorchè si fa $p = \infty$, ossia $\varepsilon = 90°$, risulta per x un valore che esprimiamo con X, e per y un valore infinito, onde

$X = \frac{c}{\tan \alpha}$, $y = \infty$.

Queste due equazioni dimostrano che, *il ramo discendente della curva ha un asintoto verticale, che taglia l'asse delle ascisse ad una distanza finita dall'origine delle coordinate.*

192. L'equazione (10 bis. §. 188) per un punto del ramo discendente dà

$$v' = \sqrt{\frac{gc(1+p^2)}{C+P}}.$$

La presente formola è paragonabile alla (10. §. 187), allorquando si considerano due punti, l'uno nel ramo ascendente e l'altro nel discendente, tali che le rispettive tangenti facciano angoli eguali con l'asse delle x. Dal quale paragone emerge sempre v maggiore v'.

Paragonando il valore di u della formola (12. §. 187), con quello di v', si fa lo stesso che paragonare $\frac{1}{C}$ con $\frac{1+p^2}{C+P}$, o $C+P$ con $C+Cp^2$, o infine P con Cp^2. Da ciò risulta, che se $P = Cp^2$, sarà pure $u = v'$; se $P > Cp^2$, viene $u > v'$; se $P < Cp^2$, è ancora $u < v'$.

Onde nel ramo discendente ci può essere una velocità che sia eguale, maggiore, o minore di quella al vertice; la quale è la minima del ramo ascendente (§. 187): quindi conseguita *che la minima di tutte le velocità si trova nel ramo discendente.*

193. Dal calcolo sublime si ha

$$r = -\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}}$$

pel raggio di curvatura di una linea qualunque. Supposto dx essere costante ne procede

$$r = -\frac{dx(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{dp}.$$

E sostituendo per dx il suo valore $\frac{-cdp}{C-P}$ (§. 187), viene

$$R = +\frac{c(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{C-P}$$

pel raggio d'oscolo di un punto del ramo ascendente, e

$$R' = +\frac{c(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{C+P}$$

per un punto del ramo discendente.

Allorquando nei due rami si prendono due punti, l'uno nel saliente, e l'altro nel discendente, le cui tangenti formino angoli eguali con l'asse orizzontale, risulta $R > R'$; quindi i rami sono ineguali, ed il discendente è più curvo dell'ascendente al disopra del piano orizzontale tirato dal punto di partenza del mobile. Da questa verità è facile conchiudere, che prendendo ne' suddetti rami due punti, le cui tangenti facciano angoli eguali con l'asse delle x, le ordinate a detti punti sono disuguali, e la maggiore è quella appartenente al punto preso nel ramo discendente. Ciò vale lo stesso che dire, conducendo una

orizzontale che interseghi i rami della traiettoria, e menate le tangenti pe' punti d'intersezione, gli angoli che queste fanno col solito asse, sono disuguali, e il maggiore è quello appartenente alla tangente del ramo discendente. *Quindi risulta l'angolo di caduta maggiore di quello di proiezione.*

194. Nel valore di R facendo $p = \tan\alpha$, si avrà

$$R'' = + \frac{c(1+\tan^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\frac{cg}{V^2\cos^2\alpha}} = + \frac{(1+\tan^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\frac{g}{V^2\cos^2\alpha}}$$

pel raggio di curvatura all'origine della traiettoria.

Inoltre dall'equazione (1. §. 1)

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2V^2\cos^2\alpha}, \text{ si ha}$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan\alpha - \frac{gx}{V^2\cos^2\alpha}, \text{ e } \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = -\frac{g}{V^2\cos^2\alpha}.$$

Sostituendo ora questi valori in quello di r, si ottiene

$$r' = + \frac{\left[1+\left(\tan\alpha - \frac{gx}{V^2\cos^2\alpha}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{g}{V^2\cos^2\alpha}}$$

pel raggio di curvatura della parabola. E facendo $x = 0$ si ha

$$r'' = + \frac{(1+\tan^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\frac{g}{V^2\cos^2\alpha}}$$

Per conseguenza $R'' = r''$. *Il che indica la parabola essere osculatrice alla linea balistica nell'origine delle coordinate, allorchè esse curve sono descritte con la stessa velocità, e col medesimo angolo di proiezione. Dunque queste due linee s'intersegano nella detta origine.*

Facendo nel valore di R $p=o$, da cui risulta $P=o$, ne viene $R'''=\frac{c}{C}$; ma $u^2=\frac{cg}{C}$ (§. 187); sarà $R'''=\frac{u^2}{g}=\frac{2gh}{g}=2h$.

Da ciò si conchiude, *che il raggio di curvatura alla sommità della traiettoria pareggia la doppia altezza dovuta alla velocità, che rimane al mobile in tale punto.*

Altre verità si potrebbero dimostrare, ma poichè di niuna utilità forse tornerebbero per le applicazioni ai fatti, perciò ci rimarremo dal farlo.

TEORICA II.

Equazione della traiettoria, considerando costante la densità dell' aria.

195. (*Fig. 34*). Sia ADL la curva descritta da un proietto con l' angolo α di proiezione, e con la velocità iniziale V. Si prenda l' arco infinitesimo $AO=ds$, e si conduca l' ordinata NOM, risulta $AM=AO\cos NAM$, o $dx=ds.\cos\alpha$, e $ds=\frac{dx}{\cos\alpha}$: un elemento qualunque della curva che faccia l' angolo ε con l' asse delle x sarà $ds=\frac{dx}{\cos.\varepsilon}$: intanto Borda, e poscia Persy, suppongono costantemente $ds=\frac{dx}{\cos\alpha}$, o vero $s=\frac{x}{\cos\alpha}$; cosicchè $AD=\frac{AF}{\cos HAF}$: ma è pure $AH=\frac{AF}{\cos.HAF}$, perciò $AD=AH$; ciò vuol dire che la detta ipotesi si riduce a considerare la sviluppata dell' arco, preso dalla origine, eguale alla lunghezza della corrispondente tangente. Questa supposizione non è arbitraria, ma risulta dal fatto, imperciocchè calcolando negli esempii particolari i valori delle $AM, MF....=Dx$ (§§. 187. 188. 189)

si troverà quello della AF per esempio, dal quale emerge il valore della ipotenusa AH, la quale risulta eguale, senza errore sensibile, all'arco AD valutato con la formola (11. §. 187): questo accordo più o meno grande giustifica il valore $s = \frac{x}{\cos\alpha}$.

Quando la curva venisse descritta con un angolo piccolissimo di proiezione, sarebbe a priori $s = x$, o vero $\cos\alpha = \cos\varepsilon = 1$ sensibilmente: facendo perciò $\frac{1}{\cos\alpha} = \omega$, sarà $s = \omega x$. La ω prende il valore di $\frac{1}{\cos\alpha}$ nel caso de' grandi angoli, ed il valore uno in quello de' piccoli angoli di proiezione.

L'esposto ragionamento ci manuduce alla ricerca della equazione finita della traiettoria: a tale oggetto l'equazioni (3. 5. §. 187) con $s = \omega x$ danno

$$\frac{dx}{dt} = \frac{V\cos\alpha}{e^{\frac{\omega x}{c}}}, \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{g}{V^2\cos^2\alpha}\, e^{\frac{2\omega x}{c}}.$$

Inoltre essendo (§. 60) $c = \frac{4aD}{3k}$ si scorge che il valore di c è lineare, onde facendo in queste formole $\frac{c}{2}$ eguale all'unità di misura si avrà

$$\frac{dx}{dt} = \frac{V\cos\alpha}{e^{\frac{\omega x}{2}}}, \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{g}{V^2\cos^2\alpha}\, e^{\omega x}.$$

Trovando con queste due formole la natura della equazione, della traiettoria, essa si apparterrà ad ogni maniera di proietti

giacchè il coefficiente della resistenza dell' aria si è tacitamente eliminato, e si ha ancora il vantaggio di avere le formole più semplici, e meglio accomodate a fare scoprire nuove verità. Con tale unità lineare bisogna che si preparino i dati prima dello svolgimento de' calcoli, affinchè essi risultino funzioni di $\frac{c}{2}$. Per esempio essendo (§. 189) $c=1616^m$, sarà $\frac{c}{2}=808^m$ l' unità lineare: onde $V=200^m$ dovrà inserirsi ne' calcoli per $\frac{200}{808}=\frac{25}{101}$, che indica $\frac{25}{101}$ dell' unità 808^m: la g va del pari calcolata con la stessa unità. I valori delle velocità $v=186^m$, $v'=176^m$, $u=78^m$ sarebbero venuti $v=\frac{186}{808}$, $v'=\frac{176}{808}$, $u=\frac{78}{808}$.

Se con quella unità si fosse avuto $Dx=0,3$; $Dy=0,1$: per conoscere i veri valori si dovrebbero moltiplicare 0,3 e 0,1 per 808^m, e quindi $Dx=0,3\times 808^m=242^m,4$; $Dy=0,1\times 808^m=80^m,8$.

Eseguendo le integrazioni; la prima dà

$$t=\frac{2}{\omega.V\cos\alpha}e^{\frac{\omega x}{2}}+C';$$

ma quando $t=0$ è anche $x=0$, dunque $C'=-\frac{2}{\omega V\cos\alpha}$, e

$$t=\frac{2}{\omega V\cos\alpha}\left(e^{\frac{\omega x}{2}}-1\right)\ldots\ldots\ldots\ldots(13).$$

La seconda poi ne presenta

$$p=-\frac{e^{\omega x}}{2\omega h\cos^2\alpha}+C'':$$

ed allorquando è $x=0$, è $p=\tan\alpha$, ne viene

$$C''=\tan\alpha+\frac{1}{2\omega h\cos^2\alpha}.$$ E perciò

$$p=\frac{dy}{dx}=\tan\alpha+\frac{1}{2\omega h\cos^2\alpha}-\frac{e^{\omega x}}{2\omega h\cos^2\alpha}\quad\ldots\ldots(14);$$

e

$$dy=\left(\tan\alpha+\frac{1}{2\omega h\cos^2\alpha}\right)dx-\frac{e^{\omega x}}{2\omega h\cos^2\alpha}dx;$$

integrando

$$y=\left(\tan\alpha+\frac{1}{2\omega h\cos^2\alpha}\right)x-\frac{e^{\omega x}}{2\omega^2 h\cos^2\alpha}+C''$$

nel caso di $y=0$, e di $x=0$, viene $C''=\frac{1}{2\omega^2 h\cos^2\alpha}$; e

$$y=\left(\tan\alpha+\frac{1}{2\omega h\cos^2\alpha}\right)x-\frac{e^{\omega x}-1}{2\omega^2 h\cos^2\alpha}\quad\ldots(15),$$

ch'è l'equazione della traiettoria nel mezzo resistente. Per conoscerne poi la natura si pone sotto la forma

$$y=\left(\tan\alpha+\frac{1}{2\omega h\cos^2\alpha}\right)x+\frac{1}{2\omega^2 h\cos^2\alpha}-\frac{e^{\omega x}}{2\omega^2 h\cos^2\alpha};$$

nella quale si osserva che i primi due termini del secondo membro esprimono l'equazione di una retta. Si può dunque stabilire

$$z=\left(\tan\alpha+\frac{1}{2\omega h\cos^2\alpha}\right)x+\frac{1}{2\omega^2 h\cos^2\alpha}.$$

(*Fig. 34*). La retta di questa equazione, intersega l'asse delle ordinate ad una distanza $\frac{1}{2\omega^2 h\cos^2\alpha}$ dall'origine, e fa

con l'asse delle ascisse un angolo il quale ha per tangente $\left(\tan\alpha + \frac{1}{2\omega h\cos^2\alpha}\right)$. Quindi è che tirati gli assi rettangolari Ax, Ay, si prenda $AB = \frac{1}{2\omega^2 h\cos^2\alpha}$; s'inclini la GBx' talmente che $\tan BGx = \tan\alpha + \frac{1}{2\omega h\cos^2\alpha}$; e l'equazione della GBx' sarà quella stabilita: siano Bx', By' i nuovi assi.

Prendiamo una medesima ascissa $AF = x$, tanto per la curva quanto per la retta, si avrà per la prima $y = FD$, e per la seconda $z = CF$; e $z - y = CF - FD = CD = \frac{e^{\omega x}}{2\omega^2 h\cos^2\alpha}$. Facendo $z - y = y'$, e conducendo la BP parallela alla Ax, si avrà $BE = AF = x = BC\cos G = x'\cos G$; e

$$y' = \frac{e^{\omega x'\cos G}}{2\omega^2 h\cos^2\alpha};$$

ch'è la equazione alla traiettoria, la quale manifestamente appartiene ad una logaritmica che ha per suttangente $\frac{1}{\omega\cos.G}$ e per asintoto la retta Gx'. Con questa suttangente la curva si potrebbe descrivere per assegnazione di punti.

Da questo paragrafo, e da ciò che si è detto antecedentemente (§. 191) si può stabilire *che la traiettoria è una logaritmica composta di due rami, del discendente che ha un asintoto verticale, e dell'ascendente che ne ha un altro inclinato all'asse orizzontale.*

196. Volendo spingere più oltre la teorica della balistica nel mezzo resistente, si dovrebbe tener conto della decrescenza della velocità, cioè a dire seguire i precetti antecedenti (§§. 61. 64), là dove si è ragionato del moto verticale de' proietti, e delle velocità di 30^m, 122^m, e 579^m stabilite come limiti, cioè a dire eseguire gli esempii particolari come nel §. 68.

Quando gradatamente si perviene al conoscimento delle velocità residue, conviene variare il valore di k secondo i risultamenti sperimentali inseriti nella tavola XIII (§. 57). Con ciò varia il c, il quale si manterrà costante solamente fra ciascuno de' detti limiti di velocità. Così nell' esempio del §. 189, ove $V = 200^m$, si è detto che si può stabilire $k = 0,9$, ma fino alla velocità residua di 122^m.

Allorchè la velocità seguita a diminuire, conviene menomare anche il fratto k, subordinandone il valor medio ai numeri inseriti nella colonna quarta della tavola suddetta, come si è praticato per $k = 0,9$ fra i rapporti da 1,43 fino a 2,08 per le velocità da 400 fino a 1600 piedi. Così per le velocità di 122^m fino a 30^m si può stabilire $k = 0,7$ circa; per le altre da 30^m fino a zero $k = 0,64$.

Ciò premesso per i valori di Dy (§. 189), il cui insieme forma le ordinate alla curva, bisogna tener conto della decrescenza della densità dell' aria, seguendo quanto è discorso nel §. 74 e ne' seguenti.

In generale conviene negli esempii far variare in $c = \frac{4aD}{3k}$ tanto D quanto k, l' uno per la densità dell' aria, e l' altro per i diversi gradi di velocità cui è animato il proietto. Con ciò si avrebbero i giusti valori delle velocità residue, delle ordinate, del tempo ec. ec., come in seguito daremo a conoscere con altro metodo più diretto.

Il moto diurno della Terra si dovrebbe anche porre a calcolo come pratica Poisson (§. 80); ma noi crediamo ciò inutile per le stesse ragioni addotte antecedentemente (§. 80).

TEORICA III.

Traiettorie simili, e tiro del mortaro.

197. L' equazione (11. §. 187) dà la proporzione

$$s : s' :: c \log \frac{V^2 \cos^2 \alpha}{gc} (C - P) : c' \log \cdot \frac{V'^2 \cos^2 \alpha'}{gc'} (C' - P').$$

Se a questa proporzione si aggiungano le condizioni di $\alpha = \alpha'$, $\frac{V^2}{c} = \frac{V'^2}{c'}$, e se si suppongono descritte le due traiettorie con questi dati (§. 188) esse diconsi *simili*. Prendendo sempre $p = p'$, cioè considerando i punti dai quali partono tali tangenti da fare con l'asse delle ascisse angoli eguali, ossia l'angolo $\varepsilon = \varepsilon'$, ne scaturirà $P = P'$, $C = C'$ (§. 187); dunque

$$s : s' :: c : c' :: \frac{4aD}{3k} : \frac{4a'D'}{3k} :: (a : a')(D : D') :: V^2 : V'^2.$$

Ciò vale a dire, *che nelle traiettorie simili gli archi omologhi, presi nei rami ascendenti, sono nella ragione de' quadrati delle velocità iniziali.*

Quando $D = D'$, ne viene

$$s : s' :: a : a' :: V^2 : V'^2.$$

Se $a = a'$, sarà

$$s : s' :: D : D' :: V^2 : V'^2.$$

E poichè alle sommità delle curve si ha $p = o$, $p' = o$ viene $p = p'$: *quindi le mezze traiettorie anche stanno come i quadrati delle velocità iniziali.*

Si dimostra pure facilmente *che gli archi delle curve maggiori delle rispettive metà hanno altresì la stessa relazione.* In generale si può stabilire, *che nelle traiettorie simili gli archi omologhi sono nel rapporto de' quadrati delle velocità iniziali de' proietti.*

(*Fig.* 35). Per chiarire maggiormente la teorica, sia costruita la traiettoria $ABCD$.... come sopra, per assegnazione di punti. Il proietto sia del diametro a, della densità D, e sia spinto con la velocità V sotto l'angolo $\alpha = BAx$. Così pure sia costruita la traiettoria $Abcd$.... il cui proietto sia del diametro a', della densità D', e spinto con la velocità V' e l'angolo α', ed abbiano pur luogo le condizioni di $\alpha = \alpha'$, e $\frac{V^2}{c} = \frac{V'^2}{c'}$. Ne verrà l'elemento primo

$$AB = 2,30258 \frac{c}{2} \log \frac{V^2 \cos^2 \alpha}{cg} (C - P),$$

dove nel valore di P si faccia $p = \tan(x^0 - 1^0) = \tan BFx$. Così pure sostituendo per p, $\tan(x^0 - 2^0) = \tan CMx$, si avrà il valore di ABC ec.

Similmente $$Ab = 2{,}30258 \frac{c'}{2} \log \frac{V'^2 \cos^2 \alpha}{gc'} (C' - P'),$$

da cui si avranno i valori di Abc, $Abcd$ ec; ma le parti affette dai segni logaritmi, quando si prende $p = p'$ ossia $CFx = cfx$, $DMx = dmx$, ec. sono identiche; dunque

$$AB : Ab :: c : c'$$

$$ABC : Abc :: c : c' ;$$

onde $$ABC : AB : Abc : Ab ,$$

dividendo si ha $$BC : AB :: bc : Ab.$$

Ed essendo CF parallela a cf, la congiungente Cc dovrà passare pel punto A.

Del pari si dimostra che

$$DC : CB :: dc : cb ,$$

e che la congiungente Dd passa per A.

Dalle quali cose si ritrae che la figura $ABCDEGHL$ è simile all'altra $Abcdeghl$. Dal che risulta *che nelle traiettorie simili le altezze delle gettate, e le ampiezze sono proporzionali fra loro, ed ai quadrati delle velocità iniziali.* Così supponendo che E ed e siano le sommità delle curve, ne seguirà

$$AL : Al :: EQ : eq ,$$

e che EL è parallela ad el.

Da ciò procede ancora *che le traiettorie simili hanno le loro sommità allogate in una retta che parte dall'origine delle coordinate*: il quale teorema ha relazione con quello dimostrato nella balistica nel vôto (§. 8).

Sia descritta la traiettoria $ABCD$.... Per descriverne un'altra simile, si prendano i piccolissimi archi AB, BC, CD ec; e si tirino AC, AD ec, e poscia si faccia

$$V^2 : V'^2 :: AB : \text{al quarto}, \text{ e sia } Ab.$$

Condotte le parallele bc, cd, de, ec, alle BC, CD, DE ec, i punti A, b, c, d, e, ec. apparterranno alla traiettoria richiesta.

In generale dunque tutto ciò che si può dedurre dai poligoni simili è applicabile alle traiettorie simili.

198 La teorica delle traiettorie simili trova una immediata ed utile applicazione al tiro del mortaro, mediante la seguente tavola di Newton, la quale in origine è dovuta a Robins, benchè Robison l'abbia corretta, come ci dice Hutton.

TAVOLA XXXIV.

RAPPORTO $\frac{V}{u}$	ANGOLO della massima ampiezza.	RAPPORTO $\frac{X}{h}$
0,6910	44°.00′	0,4110
0,9445	43°.15′	0,6148
1,1980	42°.30′	0,8178
1,4515	41°.45′	1,0210
1,7050	41°.00′	1,2244
1,9585	40°.15′	1,4276
2,2120	39°.30′	1,6312
2,4655	38°.45′	1,8346
2,7190	38°.00′	2,0379
2,9725	37°.15′	2,2413
3,2260	36°.30′	2,4447
3,4795	35°.45′	2,6481
3,7330	35°.00′	2,8515
3,9865	34°.15′	3,0549
4,2400	33°.30′	3,2583
4,4935	32°.45′	3,4616
4,7470	32°.00′	3,6650
5,0000	31°.15′	3,8684

Siffatta tavola è stata stabilita parte col calcolo, e parte cogli sperimenti.

La prima colonna indica i rapporti fra le velocità iniziali e le velocità finali, o complete de' proietti: la seconda esprime gli angoli delle massime ampiezze; e la terza contiene i rapporti fra queste e le altezze spettanti alle velocità complete.

Da ciò si comprende che la detta tavola non si può usare, se prima non si conosca la velocità completa de' proietti.

La formola (10 bis. §. 188) nel caso di p grandissimo, il quale fa risultare $P=p^2$ (§. 191), diventa $u=\sqrt{\frac{cg(1+p^2)}{C+p^2}}$: ma uno e C sono trascurabili rispetto a p^2, onde $u=\sqrt{cg}$ ch'è appunto la velocità *completa* de' proietti (§. 69), la quale è la massima di tutte le velocità del ramo discendente, qualunque esser possa l'angolo di proiezione. Applicata questa formola alla bomba da 12 si avrà

$\log c$ (tav. XV. §. 59). .	3,22994
$\log g$.	0,99162
	4,22156, la metà è
$\log u$.	2,11078

$$u=129^m.$$

Per le bombe da 10, e da 8 le velocità complete saranno rispettivamente 126^m, e 101^m. Per la bomba da 10 è

$$h=\frac{u^2}{2g}=\frac{126^2}{2\times 9,808}=809^m.$$

La tavola dichiarata è stata compilata nel modo seguente.

Il mortaro da 10 si è caricato con una data quantità di polvere col corrispondente proietto, si sono eseguiti moltissimi tiri, variando solamente l'angolo di elevazione, per tutti i tiri si sono misurate l'ampiezze orizzontali, e si è tenuto conto solamente della massima: così gli sperimenti hanno dato a conoscere che il suddetto mortaro inclinato sotto l'angolo di proiezione per 31°.15′ e colla velocità iniziale di $V=630^m$ ha dato per ampiezza mas-

sima $X = 3129^m,5$. Da questi dati sperimentali risulta $\frac{V}{u} = \frac{630}{126} = 5$; $\frac{X}{h} = \frac{3129,5}{809} = 3,8684$: quali rapporti si leggono nella tavola in linea di 31°. 15′ : così proseguendo la tavola XXXIV è stata compiuta.

La suddetta tavola non solo appartiene alla bomba da 10, ma anche ai proietti che si assoggettino alle condizioni di $\frac{V^2}{c} = \frac{V'^2}{c'}$ e di $\alpha = \alpha'$ per le traiettorie simili. Infatti sieno V' e c' i dati per un qualunque proietto, e V e c quelli della bomba da 10: e perchè $\frac{V^2}{c} = \frac{V'^2}{c'}$, si ha $\frac{V^2}{cg} = \frac{V'^2}{c'g}$, o $\frac{V^2}{u^2} = \frac{V'^2}{u'^2}$ e $\frac{V}{u} = \frac{V'}{u'}$; ma $\frac{V}{u}$ esprime tutti numeri della prima colonna della tavola per la bomba da 10, quindi $\frac{V'}{u'}$ esprimerà gli stessi per tutto altro proietto che descriva una traiettoria simile a quella che descrive la bomba da 10. Così per la bomba da 12 $\frac{V'}{u'} = 5,0000$ significa che quando il rapporto della velocità iniziale alla completa ($= 129^m$) è cinque, conviene inclinare il mortaro da 12 sotto l'angolo di 31°. 15′ per avere la massima ampiezza. Inoltre per la bomba da 10 $\frac{X}{h}$ indica tutti i numeri scritti nella terza colonna della Tav. XXXIV, per quella da 12, per esempio $\frac{X'}{h'}$ dovrà esprimere gli stessi numeri. Imperciocchè per ipotesi $\frac{V}{u} = \frac{V'}{u'}$ da cui $V^2 : V'^2 :: u^2 : u'^2 :: h : h'$. Ma per le traiettorie simili (§. 199) $X : X' :: V^2 : V'^2$ dunque $X : X' :: h \cdot h'$ e $\frac{X}{h} = \frac{X'}{h'}$. Onde pel detto esempio $\frac{X'}{h'} = 3,8684$, sarà $X' = 3,8684 . h' = 3,8684 . \frac{u'^2}{2g} = 3,8684 . \times$

$\frac{129^2}{2g}$ l'ampiezza massima della bomba da 12 spinta colla velocità iniziale $V'=5u'=5\times129^m=645^m$ sotto l'angolo di 31°. 15′.

Per applicare ora la tavola ultima, sia una bomba da 10, animata dalla velocità iniziale di 151^m: si vuol conoscere la massima ampiezza, e l'angolo corrispondente.

Essendo $\frac{V}{u}=\frac{151}{126}=1,198$, il quale rapporto corrisponde all'angolo di 42°.30′: perciò si conchiude, che l'angolo della massima ampiezza della bomba da 10, eseguita con 151^m di velocità iniziale sia di 42°.30′.

Inoltre a questo angolo corrisponde il rapporto 0,8176; dunque $\frac{X}{h}=0,8176$, ma $h=809^m$, in conseguenza sarà $X=0,8176\times809^m=661^m$ la massima ampiezza corrispondente alla velocità iniziale di 151 metro.

Dato l'angolo di 42° come massimo pel mortaro da 10, determinare la velocità iniziale della bomba, e l'ampiezza corrispondente.

Dalla Tav. XXXIV si osserva che l'angolo di 42° è compreso fra gli angoli di 42°. 30′ e 41°. 45′, quindi il rapporto $\frac{V}{u}$ per l'angolo di 42° dovrà cadere fra i rapporti 1,1980 e 1,4515 appartenenti ai due angoli della tavola: percui usando il metodo delle parti proporzionali che ha, presso a poco, luogo, come lo mostra la tavola, sarà

$42°.30'-41°.45':42°-41°.45'::1,4515-1,1980:z$ o pure $45:15::0,2535:z$, o $3:1::0,2535:z=\frac{0,2535}{3}=0,0845$; sottraendo questo quarto proporzionale dal rapporto 1,4515, avremo $\frac{V}{u}=1,4515-0,0845=1,3670$, e $V=1,3670\times u=1,3670\times126^m$ velocità richiesta. Della stessa guisa

$3:1::1,0210-0,8178:z'$, o $3:1::0,2032:z'=\frac{0,2032}{3}=0,0677$:

dunque $\frac{X}{h}=1,0210-0,0677=0,9533$, $X=0,9533\times h=$

$0,9533\times 809^m$ ampiezza richiesta.

Questo problema può servire di esemplare per tutti i quesiti ne' quali i dati non si trovino nella tavola XXXIV : cioè a dire bisogna far uso delle parti proporzionali.

TEORICA IV.

Tiro con piccoli angoli di proiezione.

199. L'equazioni (13. 15. §. 195) coi piccoli angoli di proiezione, cioè con $s=x$, ossia con $\omega=1$. (§. 195) diventano

$$t=\frac{2}{\sqrt{\cos\alpha}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

$$y=\left(\tan\alpha+\frac{1}{2h\cos^2\alpha}\right)x-\frac{e^x-1}{2h\cos^2\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Questa ultima equazione si può tirare da un metodo diretto. Infatti supponiamo che l'angolo di proiezione sia molto piccolo, allora il valore di P (§. 187) $=2\int dp\sqrt{1+p^2}$ diventa $2\int dp=2p$, perchè essendo p^2 infinitamente piccolo, sarà trascurabile rispetto all'unità. Il valore di C verrà $2\tan\alpha+\frac{c}{2h\cos^2\alpha}$; e quindi per la formola (7. §. 187) si avrà

$$dx=\frac{-cdp}{2\tan\alpha+\frac{c}{2h\cos^2\alpha}-2p}\ ;\ \text{e}$$

$$\frac{dx}{\frac{1}{2}c}=\frac{-dp}{\tan\alpha+\frac{\frac{1}{2}c}{2h\cos^2\alpha}-p};$$

facendo $\frac{1}{2}c=1$, risulta

$$x=\log.\mathrm{ip}\left(\tan\alpha+\frac{1}{2h\cos^2\alpha}-p\right)+C:$$

fatto $x=o$ risulta $p=o$, e $C=-\log.\mathrm{ip}\left(\tan\alpha+\frac{1}{2h\cos^2\alpha}\right)$;

onde $$p=\tan\alpha-\frac{1}{2h\cos^2\alpha}\left(e^x-1\right),$$

dalla quale si ha la formola suddetta.

Le dette equazioni determinano tutto ciò che riguarda il moto de' proietti spinti con angoli non maggiori di 18°. Persy dice: che queste formole danno risultamenti conformi al vero, com' è facile convincersene, paragonando gli analoghi risultamenti con quelli che si sono ottenuti per via di altri metodi rigorosi; che tali formole sono sufficientissime per governare il tiro delle armi lunghe eziandio cogli angoli di depressione, e che gli errori, che si possono commettere, sono sempre minori di quelli inevitabili, ai quali va soggetta la pratica de' tiri.

Poichè i cannoni e gli obici, per la costruzione de' loro affusti non possono se non con piccoli angoli di proiezione operare, perciò si potranno con fiducia i loro tiri subordinare alle mentovate due formole.

L' equazione (17) trasformata come sopra (§. 195) diventa

$$y'=\frac{e^{x'\cos G}}{2h\cos^2\alpha}$$

la quale esprime una logaritmica, la cui suttangente è espressa da $\frac{1}{\cos.G}$, e che $\tan G=\tan\alpha+\frac{1}{h\cos^2\alpha}$ (§. 195).

Facendo $y=0$ nella formola (17), ed esprimendo con X l' ampiezza, viene $\left(\tan\alpha+\frac{1}{2h\cos^2\alpha}\right)X=\frac{e^X-1}{2h\cos^2\alpha}$, ed

$$1+h\,\mathrm{sen}\,2\alpha=\frac{e^X-1}{X}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(18).$$

Sia un pezzo da 24 situato con una elevazione di $\alpha = 1^{\circ}.15'.06''$, cioè quanto l'angolo di mira naturale, ed il proietto sia animato dalla velocità iniziale $V = 462^{m},6$ (= 1424 piedi). Si cerca l'ampiezza orizzontale del tiro.

Poichè nella formola l'unità lineare è $\frac{c}{2}$ (§. 195), il valore di h va diviso per essa, ossia $h = \frac{V^2}{2g.\frac{c}{2}} = \frac{V^2}{gc}$, e perciò si ha la trasformata

$$1 + \frac{V^2}{gc} \text{sen}.2\alpha = \frac{e^X - 1}{X},$$

la quale dà il seguente calcolo

log. $V^2 (= 462,6)^2$	5,33042
com. log. g (= 9,808)	9,00842
com. log. c (Tav. XV)	6,87616
log. sen. 2α (= $2^{\circ}.30'.12''$). .	8,64025
	9,85525, il n.° è
	0,7166 , e
$1 + \frac{V^2}{cg}$ sen. 2α	1,7166

dunque

$$\frac{e^X - 1}{X} = 1,7166.$$

Il valore di X si rinviene approssimativamente, mercè la regola di falsa posizione.

Infatti sia $X = 1$ la prima posizione; si avrà

$$\frac{e^X - 1}{X} = \frac{2,71828 - 1}{1} = 1,71828;$$

perciò la prima correzione viene

$$1,71828 - 1,7166 = + 0,00168.$$

Sia $X = 0,9$ la seconda posizione, avremo

$$\frac{2,71828^{0,9}-1}{0,9},$$

e $0,9 \log. 2,71828 = 0,9 \times 0,43429 = 0,390861$, il cui numero è $2,4595$, e quindi

$$\frac{2,7118280^{0,9}-}{0,9} = \frac{1,4595}{0,9} = 1,6217;$$

onde la seconda correzione risulta $1,6217 - 1,7166 = -0,0949$.

Il quadro della regola è

1.ª posizione. 1 — 2.ª posizione. 0,9

1.ª correzione $+0,00168$ — 2.ª correzione $-0,0949$

$$0,9 \times 0,00168 = 0,001512$$
$$1 \times 0,0949 = 0,094900$$
$$0,096412$$
$$0,00168 + 0,0949 = 0,09658.$$

In conseguenza $X = \frac{0,096412}{0,096580} = 0,9982$, che sarà il valore approssimato di X, il quale si dovrà moltiplicare per l'unità $\frac{c}{2}$ a fine di avere il rispondente numero di metri, ossia

$X = 0,9982 \times \frac{c}{2} = 0,4991 \times c$; $\log X = 9,69819 + 3,12384 = 2,82203$, ed

$$X = 667^{m} \text{ circa} = 342^{tes} \text{ circa},$$

ch'è l'ampiezza orizzontale, cui descrive la palla da 24 spinta nel modo che si è detto di sopra.

Per fare una pruova della regola, converrebbe sostituire in $\frac{e^{X}-1}{X}$ per X 0,9982 per quindi avere, com'è facile a verificarsi, 1,7166 o pure un valore moltissimo approssimato.

L'equazione in parola si potrebbe altresì sciogliere con le sostituzioni successive; ma si preferisce la regola di falsa po-

sizione doppia, perciocchè è più conducente a risolvere tanto l'equazioni di questa specie, quanto le altre più complicate.

La formola (5. §. 187) $\frac{dp}{dx}=-\frac{g}{V^2\cos^2\alpha}e^{\frac{2s}{c}}$ diventa

$\frac{dp}{dx}=-\frac{g}{V^2\cos^2\alpha}e^{\frac{2x}{c}}$, e $dp=-\frac{g}{V^2\cos^2\alpha}e^{\frac{2x}{c}}dx$: integrando risulta

$p=-\frac{g.\frac{c}{2}}{V^2\cos^2\alpha}e^{\frac{2x}{c}}+C$: allorchè $x=0$, p diventa $\tan\alpha$, perciò

$C=\tan\alpha+\frac{g.\frac{c}{2}}{V^2\cos^2\alpha}$, e l'integrale diviene

$p=\tan\alpha+\frac{g.\frac{c}{2}}{V^2\cos^2\alpha}-\frac{g.\frac{c}{2}}{V^2\cos^2\alpha}e^{\frac{2x}{c}}$, dalla quale

$dy=\tan\alpha.dx+\frac{g.\frac{c}{2}}{V^2\cos^2\alpha}dx-\frac{g.\frac{c}{2}}{V^2\cos^2\alpha}e^{\frac{2x}{c}}dx$; ed

$y=x.\tan\alpha+\frac{g.\frac{c}{2}}{V^2\cos^2\alpha}x-\frac{g\left(\frac{c}{2}\right)^2}{V^2\cos^2\alpha}e^{\frac{2x}{c}}+C'$:

quando $x=0$ è pure $y=0$, in conseguenza $C'=\frac{g\left(\frac{c}{2}\right)^2}{V^2\cos^2\alpha}$:

e l'integrale corrispondente sarà

$$y=\left(\tan\alpha+\frac{g.\frac{c}{2}}{V^2\cos^2\alpha}\right)x-\frac{g\left(\frac{c}{2}\right)^2}{V^2\cos^2\alpha}\left(e^{\frac{2x}{c}}-1\right).$$

Ma $e^{\frac{2x}{c}}-1=\left[\frac{1}{\frac{c}{2}}+\frac{x}{2\left(\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{x^2}{2.3\left(\frac{c}{2}\right)^3}+\frac{x^3}{2.3.4\left(\frac{c}{2}\right)^4}+\text{ec.}\right]x$

Essendo questa una serie di rapida convergenza, ci gioveremo quindi fino alla seconda potenza di x, ed il risultamento $\left(\frac{c}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2x}{e^c - 1}\right)$ pareggerà $x.\frac{c}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3\frac{c}{2}}$. Sostituendo sarà

$$y = \left(\tan\alpha + \frac{g.\frac{c}{2}}{V^2\cos^2\alpha}\right)x - \frac{g}{V^2\cos^2\alpha}\left(x.\frac{c}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3\frac{c}{2}}\right),$$

riducendo $y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{6.c.V^2\cos^2\alpha}(3c + 2x)$,

equazione alla traiettoria, nella quale facendo, senza errore sensibile, $\cos\alpha = 1$ si avrà

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{6.c.V^2}(3c + 2x);$$

equazione inserita nell'Aide-Mémoire del 1836 pag. 480, ricavata però da quella che dà D'Obenhéim. Con essa si sono calcolate le tavole del tiro a rimbalzo, che sono notate nel Capitolo XV di detta Aide-Mémoire.

200. Per conoscere l'ordinata massima della traiettoria, si differenzia la formola (17. §. 199) rispetto ad y ed x, la quale darà

$$p = \frac{dy}{dx} = \tan\alpha + \frac{1}{h\cos^2\alpha} - \frac{e^x}{2h\cos^2\alpha} \quad . \; . \; . \; (m),$$

che posta eguale a zero, e chiamando X' l'ascissa al vertice, ed Y l'ordinata, si ha

$$1 + h\,\text{sen}\,2\alpha = e^{X'}, \; X' = \log.\text{ip}\,(1 + h\,\text{sen}\,2\alpha),$$

o pure

$$X' = 2{,}30258\log(1 + h\,\text{sen}\,2\alpha). \quad . \; . \; . \; (19).$$

Sostituendo questo valore nella formola (17. §. 199) in vece di x, si ottiene

$$Y = X'\left(\tan\alpha + \frac{1}{2h\cos^2\alpha}\right) - \frac{e^{X'} - 1}{2h\cos^2\alpha} =$$

$$X'\left(\tan\alpha + \frac{1}{2h\cos^2\alpha}\right) - \frac{h\,\mathrm{sen}\,2\alpha}{2h\cos^2\alpha} = X'\left(\frac{1 + h\,\mathrm{sen}\,2\alpha}{2h\cos^2\alpha}\right) - \tan\alpha =$$

$$\frac{(1 + h\,\mathrm{sen}\,2\alpha)\tan\alpha}{2h\cos^2\alpha.\tan\alpha}X' - \tan\alpha\text{, infine}$$

$$Y = \tan\alpha\left[\frac{1 + h\,\mathrm{sen}\,2\alpha}{h\,\mathrm{sen}\,2\alpha}.X' - 1\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20).$$

Dalla formola (18. §. 199) si conosce l'ampiezza, dalla (19) quella del ramo ascendente, ed esprimendo con X'' l'altra del ramo discendente, avrassi

$$X'' = X - X' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21).$$

Per trattare la formola (19), sia $h = 10$, e $\alpha = 5^\circ$: o pure $h =$ metri $10 \times \frac{c}{2} = \frac{V^2}{2g}$, e $10 = \frac{V^2}{cg}$, $\frac{V^2}{c} = 10 \times 9{,}809 = 98{,}09$, la quale equazione vale per tutti i proietti che danno il rapporto istesso, affinchè si possa stabilire $h = 10$. Dato il calibro e quindi il valore di c, verrà ad essere determinata la V: o viceversa conoscendosi la velocità iniziale di un dato proietto, si verrà a stabilire il valore di h per sostituirlo nelle formole.

Sia per esempio $V = 361^m$ appartenente alla palla da 24, si ha $h = \frac{V^2}{2g}$ metri; e per avere il rapporto con l'unità lineare $\frac{c}{2}$ conviene fare $h = \frac{V^2}{2g.\frac{c}{2}} = \frac{V^2}{cg} = \frac{361^2}{cg}$, e

log. 361^2	5,11542
com. log. c	6,87616
com. log. g (=9,808).	9,00842
	1,00000, onde

$$h = 10.$$

Vale a dire coi dati del pezzo da 24, e con $V = 361^m$, nelle formole converrà porre $h = 10$.

Ciò posto si ha il presente calcolo

$\log h \operatorname{sen} 2\alpha (= \log . 10 \operatorname{sen} 10^\circ)$ . . .	0,23967	
$h \operatorname{sen} 2\alpha$	1,73648	
$1 + h . \operatorname{sen} 2\alpha$	2,73648	
$\log (1 + h \operatorname{sen} 2\alpha)$	0,43719	
$\log [\log (1 + h \operatorname{sen} 2\alpha)]$		9,64067
$\log . 2,30258$		0,36221
$\log . X'$		0,00288

$$X' = 1,00667.$$

Siccome $\frac{V^2}{gc} = 10$, e fosse pure $\frac{V'^2}{c'g} = 10$, sarebbe altresì $\frac{V^2}{c} = \frac{V'^2}{c'}$, e $c : c' :: V^2 : V'^2$; ossia il valore di X' apparterrà a tutte le traiettorie simili (§. 197). La qual cosa conferma il gran vantaggio che si consegue, usando nelle formole la metà del coefficiente della resistenza dell'aria come unità di misura.

Rimanendo la ipotesi del pezzo da 24, si ottiene

$$X' = 1,00667 \frac{c}{2}, \text{ e } \log \cdot X' = 0,00288 + 3,12384 - 0,30103 = 2,82569, \quad X' = 669 \text{ metri.}$$

Cioè il vertice della traiettoria che descrive la palla da 24 proiettata con l'angolo di 5°, ed animata dalla velocità iniziale di 361^m ha per ascissa 669^m.

Restando pure $h = 10$, $\alpha = 5^\circ$ la formola (20) dà

$\log (1 + h \operatorname{sen} 2\alpha)$	0,43719	
$\log X'$	0,00288	
com. $\log . h \operatorname{sen} 2\alpha$	9,76033	
$\log \frac{1 + h \operatorname{sen} 2\alpha}{h \operatorname{sen} 2\alpha} X'$	0,20040, il n.° meno uno è	
	0,58639, il logaritmo è	
	9,76818	
$\log . \tan . 5^\circ$	8,94195	
$\log . Y$	8,71013	

$$Y = 0,0513.$$

Questo rapporto applicato al pezzo da 24 dà Y=met.0,0513.$\frac{c}{2}$,

$$\log Y = 8,71012 + 3,12384 - 0,30103 = 1,53294,$$
$$Y = 34^m,11,$$

che sarà l'ordinata massima della traiettoria descritta coi dati cennati.

Nella formola (18. §. 199) sostituendo pure $h=10$, ed $\alpha=5°$, si ha come sopra $1+h$ sen $2\alpha = 2,73648$, e

$$\frac{e^X-1}{X} = 2,73648.$$

Facendo, per le regole della falsa posizione, $X=1,76$, si ha $\frac{2,71828^{1,76}-1}{1,76} = 2,73430$, onde l'errore sarà $-0,00218$: Sia $X=1,762$, ne verrà $\frac{2,71828^{1,762}-1}{1,762} = 2,73780$; e perciò l'errore sarà $+0,00132$, esponendo il calcolo

$$\begin{array}{ccc} 1,76 & & 1,762 \\ -0,00218 & \times & +0,00132 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1,762 \times 0,00218 = 0,00384116 \\ 1,76 \times 0,00132 = \underline{0,00232320} \\ 0,00616436, \text{ ed} \end{array}$$

$$X = \frac{0,00616436}{0,00218+0,00132} = \frac{61,6436}{35} = 1,7612$$

Adunque l'ampiezza della curva sarà X=met. 1,7612. $\frac{c}{2}$; pel pezzo da 24, $\log X = 0,24581 + 3,12384 - 0,30103 = 3,06862$

$$X = \text{met. } 1171 \text{ circa.}$$

L'ampiezza in generale del ramo discendente verrà, formola (21), $X'' = X - X' = 1,7612 - 1,00667 = 0,75453$.

Nella data ipotesi

$$X'' = X - X' = 1171^m - 669^m = 502^m$$

201. Nella equazione (m. §. 200) sostituendo per x l'ampiezza X della traiettoria, per p si avrà la tangente dell'angolo di caduta; il quale angolo l'esprimiamo con α' che dovrà prendersi negativamente, perchè appartenente al ramo discendente (§. 188). Onde

$$-\tan\alpha' = \tan\alpha + \frac{1}{2h\cos^2\alpha} - \frac{e^X}{2h\cos^2\alpha}, \quad \tan\alpha' = \tan\alpha\left(\frac{e^X-1}{h\,\text{sen}2\alpha} - 1\right);$$

ma $e^X - 1 = (1 + h\,\text{sen}\,2\alpha)X$ (§. 199); dunque

$$\tan\alpha' = \tan\alpha\left[\frac{(1+h.\text{sen}\,2\alpha)\,X}{h\,\text{sen}\,2\alpha} - 1\right] \quad . \; . \; . \quad (22).$$

Sia $h = 10$, $\alpha = 5°$; si otterrà come sopra,

log $(1 + h\,\text{sen}\,2\alpha)$	0,43719
log. $X(= 1,7612)$	0,24581
com. log. h sen2α	9,76033
	0,44333, dal n.° meno uno
rimane	1,77543, il logaritmo è
	0,24930
log. tan $\alpha(= 5°)$.	8,94195
log. tan α'	9,19125

$$\alpha' = 8°.49'.45'',$$

ch'è l'angolo di caduta della palla da 24, e di tutti i proietti che con detta palla abbiano la relazione $\frac{V^2}{c} = \frac{V'^2}{c'}$.

202. Essendo (§. 187) $\frac{dx}{dt} = V\cos\alpha\, e^{-\frac{s}{c}}$, nel caso de' piccoli angoli è $s = x$; e ponendo $\frac{c}{2} = 1$, ne viene $c = 2$; e chiamando ε un angolo che un elemento qualunque della curva fa con l'asse delle x, si otterrà

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\varepsilon, \quad \text{e} \quad v.\cos\varepsilon = V.\cos\alpha.\, e^{-\frac{x}{2}}, \quad \text{e}$$

$$v = \frac{V\cos\alpha\, e^{-\frac{x}{2}}}{\cos.\varepsilon}, \quad v^2 = \frac{V^2.\cos^2\alpha.\, e^{-x}}{\cos^2.\varepsilon}.$$

Sia h' l'altezza dovuta alla velocità v, ne otterremo

$$h' = \frac{h \cos^2\alpha}{\cos.^2\varepsilon} e^{-x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23).$$

Quando si fa $x = X$ ampiezza della curva, risulta pure $\varepsilon = \alpha'$, ed

$$h' = \frac{h.\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha'} e^{-X} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24).$$

che darà la velocità finale nel piano orizzontale.

Sia $h = 10$, $\alpha = 5°$, onde $\alpha' = 8°.49'.45''$; quindi si ha il calcolo seguente

$$\log e^{-X} = -X \log.e = -0,43429.X;$$

ma $\log.0,43429.X = 9,63778 + 0,24581 = 9.88355$,

dunque $-0,43429.X = -0,76490$: prendendo il complemento

$\log.e^{-X}$	9,23510
$\log.h$	1,00000
$\log.\cos^2\alpha (= 5°)$.	9,99668
com. $\log.\cos^2\alpha' (= 8°.49'.45'')$	0,01035
$\log.h'$	0,24213

$$h' = 1,74636.$$

Posto al solito il caso del pezzo da 24 si ha

$$h' = 1,74636 \times \frac{c}{2}, \quad v = \sqrt{1,74636.cg}:$$

$$\log.v = \tfrac{1}{2}[0,24213 + 3,12384 + 0,99162] = 2,17879$$

$$v = 150^m \text{ circa},$$

ch'è la velocità finale nel piano orizzontale della palla da 24.

203. Il tempo necessario a percorrere la totale ampiezza, si ottiene con sostituire nella formola (16. §. 199) per x X, il quale tempo diventa

$$T = \frac{2}{V\cos\alpha}\left(e^{\frac{X}{2}} - 1\right); \text{ ma } V = \sqrt{2gh}, \text{ sarà}$$

$$T = \frac{e^{\frac{X}{2}} - 1}{\cos\alpha\sqrt{\frac{1}{2}gh}}.$$

Dovendosi anche la g valutare con $\frac{c}{2}$ per avere le misure rapportate alla stessa unità lineare, si avrà

$$T = \frac{e^{\frac{X}{2}-1}}{\cos\alpha\sqrt{\frac{gh}{c}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25),$$

Facendo $h = 10$, $\alpha = 5°$, ed assegnando, com'è di mestiere, la specie del proietto, giacchè la formola contiene la c, si procederà alla soluzione.

Trattisi del proietto da 24: avrassi il seguente calcolo

$\log . e^{\frac{X}{2}} = \frac{X}{2} \times 0.43429$, e $\log . \frac{X}{2} \times 0,43429 = \log X +$ $\log 0,43429 + \text{com}.\log 2 = 0,24581 + 9,63778 + 9,69897 =$ $9,58256$, il numero è $0,38244$ ossia $\log e^{\frac{X}{2}} = 0,38244$, ed $e^{\frac{X}{2}} = 2,412347$, dunque $e^{\frac{X}{2}} - 1 = 1,412347$:

$\log . \left(e^{\frac{X}{2}} - 1\right)$	0,14994
com. log. $\cos\alpha (= 5°)$	0,00166
com. log $\sqrt{\frac{gh}{c}}$	0,56611
log. T.	0,71771

$T = 5'',22.$

Se vogliasi con più approssimazione il valore di T conviene stabilire nel valore di c per k non il numero 0,9, ma bensì quello che corrisponderebbe alla velocità iniziale di 361^m, ricavato dalla Tav. XIII (§. 57), cioè $k = 0,95$. e siccome la

differenza nel risultamento è di qualche decimo di minuto, così si è trascurata questa avvertenza.

204. Nella formola (23. §. 202) facendo $\varepsilon = 0$, ed $x = X'$ ascissa al vertice, si ottiene

$$h'' = h \cos^2\alpha . e^{-X'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

per la velocità al vertice. Sia $h = 10$, $\alpha = 5^\circ$, si ha

$\log e^{-X'} = -X' \log e$, e $\log (X' \log e) = 0{,}00288 + 9{,}63778 = 9{,}64066$, $-X' \log e = -0{,}43718$, e

$\log . e^{-X'}$	9,56282
$\log . h (= 10)$	1,00000
$\log . \cos^2\alpha (= 5^\circ)$. . . .	9,99668
$\log . h''$.	0,55950

$h'' = 3{,}626$.

Pel pezzo da 24, $h'' = \frac{v^2}{cg}$, e $v^2 = 3{,}626\ cg$

$\log 3{,}626$.	0,55950
$\log . c$	3,12384
$\log (9{,}809)$	0,99162
$\log . v^2$	4,67496

$v = 218^m$ circa.

Riepilogando i risultamenti pel proietto da 24, si avrà

Velocità iniziale $= V$	361^m
Angolo di elevazione $= \alpha$.	5°
Ascissa al vertice $= X'$	669^m
Ordinata idem $= Y$	$34^m{,}11$
Ampiezza $= X$	1171^m
Ampiezza del ramo discendente $= X''$.	502^m
Angolo di caduta $= \alpha'$.	$8^\circ . 49' . 45''$
Velocità idem $= v$.	150^m
Tempo totale $= T$.	$5'',22$
Velocità al vertice $= u$	218^m

Generalmente parlando nel caso di $h = 10$, $\alpha = 5^\circ$, $\alpha = 10^\circ$ ed $\alpha = 15^\circ$ i risultamenti, che si ottengono con le antece-

denti formole, sono inseriti nella tavola che segue, come ancora quelli che ne porgono con altri metodi Borda, e Bezout.

TAVOLA XXXV.

$h = 10$

ANGOLI di proiezione.	Risultamenti	METODO di BORDA.	METODO di BEZOUT.	METODO di PERSY.
	X	1,7581	1,7602	1,7612
	Y	0,0513	0,0513	0,0513
	X'	1,0053	1,0062	1,00667
	X''	0,7539	0,7540	0,75453
	α'	8°.50'.24"	8°.49'.56"	8°.49'.45"
$\alpha = 5°$	h''	3,6178	3,6236	3,626
	h'	1,74125	1,74433	1,74636
	T	7",06	7",065	5",22
	X	2,4620	2,4758	2,4827
	Y	0,1614	0,1620	0,1623
	α'	21°.22'.33"	21°.18'.41"	21°.16'.40"
$\alpha = 10°$	h''	2,1682	2,1858	2,1941
	h'	0,9165	0,9276	0,9328
	T	12",41	12",436	12",45
	X	2,8579	2,8977	2,9181
	Y	0,3035	0,3066	0,3081
	α'	38°.8'.12"	33°.36'.22"	33°.50',7"
$\alpha = 15°$.	h'	1,5106	1,5398	1,5550
	h''	0,7066	0,7224	0,7307
	T	16",896	16",989	17",036

NOTE. Nel caso di $\alpha = 5°$, pel valore di h'', Persy scrive 3,62364, perchè fa uso della formola (12. §. 187).

Vi è qualche divario nel valore di h' paragonato a quello che dà Persy per cagione de' logaritmi, più o meno approssimati.

Il T. Persy lo rinviene di 5",6076, intanto lo scrive 7",066; percui ha dovuto correre qualche errore.

I risultamenti che ottiene Legendre col suo metodo sono più o meno discordi da quelli di Bezout, ma di molto approssimati a quelli che ne dà Borda.

I risultamenti del metodo, esposto in quanto alle ampiezze, non stanno in mezzo fra quelli di Borda e quelli di Bezout: ma i risultamenti di questo ultimo sono reputati i più prossimi al vero. E siccome i nostri poco da questi differiscono, così le dette formole si possono adoperare con confidenza nelle applicazioni fino a 15° in 18°; la qual cosa comprende tutti i casi del tiro delle armi lunghe, poichè esse non eccedono quasi mai la inclinazione di 5° in 6°. E in fatti Persy dice . . . . » l'applicazione equivarrà ad una esattezza rigorosa, di ma- » niera che il metodo stesso potrà servire per termine di pa- » ragone con altri metodi ».

205. Allorchè il punto da colpirsi non sia a livello della batteria, ed abbia una posizione qualunque sull'orizzonte, le cui coordinate siano note cioè indicate da n ed m, l'equazione generale (17. §. 199) diventa

$$n = \left(\tan\alpha + \frac{1}{2h\cos^2\alpha}\right)m - \frac{e^m - 1}{2h\cos^2\alpha}.$$

Ed esprimendo con δ l'angolo, sotto cui è veduto l'oggetto, si avrà $\tan\delta = \frac{n}{m}$; e quindi

$$\tan\delta = \left(\tan\alpha - \frac{1}{2h\cos^2\alpha}\right) - \frac{e^m - 1}{m}\cdot\frac{1}{2h\cos^2\alpha} \quad . \; . \; . \; (n).$$

Notando con $\tan s$ la espressione $\frac{e^x - 1}{x}(q)$, si avrà

$$\tan\alpha - \tan\delta = \frac{\tan s - 1}{2h\cos^2\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (p),$$

ch'è l'equazione della traiettoria che passa per un dato punto. Da questa equazione si ottiene

$$h = \frac{\tan s - \tan 45^\circ}{2\cos^2\alpha\,(\tan\alpha - \tan\delta)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (t),$$

perchè la $\tan 45^\circ$ pareggia l'unità. Questa formola fa conoscere la velocità iniziale, allorchè sono date le coordinate di un punto da battersi, e l'angolo con cui si vuol tirare. Ed affinchè essa

possa facilmente risolversi con i logaritmi, si ponga mente che $\operatorname{sen}(s-45^\circ)=\operatorname{sen} s.\cos 45^\circ-\cos s.\operatorname{sen} 45^\circ$.

Da cui $\frac{\operatorname{sen}(s-45^\circ)}{\cos s.\cos 45^\circ}=\tan s-1$, e $\operatorname{sen}(\alpha-\delta)=\operatorname{sen}\alpha.\cos\delta-\cos\alpha.\operatorname{sen}\delta$, e $\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\delta)}{\cos\alpha.\cos\delta}=\tan\alpha-\tan\delta$: dividendo fra loro queste equazioni, si ha

$$\frac{\tan s-1}{\tan\alpha-\tan\delta}=\frac{\operatorname{sen}(s-45^\circ)\cos\alpha.\cos\delta}{\cos s.\cos 45^\circ.\operatorname{sen}(s-\delta)},\ \text{e}$$

$$\frac{\operatorname{sen}(s-45^\circ)\cos\alpha.\cos\delta}{2\cos^2\alpha.\cos s.\cos 45^\circ.\operatorname{sen}(\alpha-\delta)}=\frac{\tan s-1}{2\cos^2\alpha(\tan\alpha-\tan\delta)}.$$

Facendo le riduzioni nel primo membro, e moltiplicando tanto il numeratore, quanto il denominatore per $\cos 45^\circ$; e perchè $2\cos^2 45=1$, avremo finalmente

$$h=\frac{\operatorname{sen}(s-45^\circ)\cos.\delta\cos 45^\circ}{\operatorname{sen}(\alpha-\delta).\cos\alpha.\cos s}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (27).$$

Il valore di h sarà positivo allorchè tale sia pure $\frac{\operatorname{sen}(s-45^\circ)}{\operatorname{sen}(\alpha-\delta)}$; perchè, comunque siano gli angoli, i coseni sono positivi. In questa espressione α è sempre maggiore di δ, e perciò h risulta positiva quando s sia maggiore di 45°, o pure $\tan s=\frac{e^m-1}{m}$ sia maggiore dell'unità.

Se avvenisse il contrario, h risulterebbe negativa; e perchè $V=\sqrt{2gh}$, la velocità si presenterebbe sotto forma immaginaria, la quale cosa dimostrerebbe i dati esser tali da non potersi colpire l'oggetto preso di mira.

Per risolvere la formola (27), siano $x=1000^m$, $y=4^m$ le coordinate di un punto da colpirsi con l'angolo di proiezione $\alpha=5^\circ$.

E perchè il valore di x si deve valutare con l'unità $\frac{c}{2}$, perciò bisogna fare $x=\frac{1000}{\frac{c}{2}}=\frac{2000}{c}$, e supponendo il pezzo esser quello da 24, viene $x=1,504$.

Inoltre $\tan\delta=\frac{n}{m}=0,004$, onde $\delta=0°.14'$ circa,

$$\tan s=\frac{e^x-1}{x}=\frac{2,718281^{,504}-1}{1,504}=\frac{4,499-1}{1,504}=\frac{3,499}{1,504}=2,327;$$

$$\log.\tan s=0,36669, \text{ ed } s=66°.44'.$$

Dalla formola

log. sen $21°.44'(=s-45°)$	9,56854
log. cos $\delta(=14')(=1.$ circa).	0,00000
log. cos $45°$	9,84949
com. log. sen $(\alpha-\delta)(=4°.46')$.	1,08041
com. log. cos $\alpha(=5°)$.	0,00166
com. log. cos. $s(=66°.44')$	0,40339
log. h	0,90349

$$h=8,007.$$

Ma $V=\sqrt{2gh}=\sqrt{8,007.cg}$, e

$$\log.V^2=\log.8,007+\log.c+\log.g=0,90349+3,12384+0,99162=5,01895, \text{ e}$$

$$V=323^m. \text{ circa.}$$

206. Sostituendo nella equazione (*p.* §. 205), per $\frac{1}{\cos^2\alpha}$ $1+\tan^2\alpha$, ed ordinando rispetto a $\tan\alpha$, si avrà

$$\tan^2\alpha-\frac{2h}{\tan s-1}\tan\alpha+\frac{2h\tan\delta}{\tan s-1}+1=0; \text{ e quindi}$$

$$\tan\alpha=\frac{h}{\tan s-1}\pm\frac{1}{\tan s-1}\sqrt{h^2-2h(\tan s-1)\tan\delta-(\tan s-1)}. \quad (28).$$

I valori di $\tan\alpha$ saranno, o due reali, o un solo reale, o tutti e due immaginarii, allorchè abbiano luogo rispettivamente le tre equazioni di condizione,

$$h^2 > 2h(\tan s - 1)\tan\delta + (\tan s - 1)$$
$$h^2 = 2h(\tan s - 1)\tan\delta + (\tan s - 1)$$
$$h^2 < 2h(\tan s - 1)\tan\delta + (\tan s - 1).$$

Il valore di $\tan s - 1$ è sempre positivo, perchè h è data sempre tale, come si è dimostrato nel § antecedente.

La formola ultima è della stessa forma di quella trovata nel vôto per l'angolo di elevazione: percui chiamando α' ed α'' i due angoli rinvenuti, reggerà l'eguaglianza $\alpha' - \delta = 90° - \alpha''$. E siccome il metodo è fondato sulla ipotesi che l'angolo di proiezione sia molto piccolo, cioè non maggiore di 18°, così convien far uso del più piccolo de' due angoli α', α''.

Per la ricerca dell'angolo di proiezione si può usare una formola accomodata per trattarsi con i logaritmi.

Infatti facendo

$$\tan\omega = \frac{\operatorname{sen}(s - 45°)}{h\cos 45°.\cos s} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (r);$$

ed avendosi di sopra $\frac{\tan s - 1}{h} = \frac{\operatorname{sen}(s - 45°)}{h\cos 45°.\cos s}$, sarà

$\tan.\omega = \frac{\tan s - 1}{h}$. E perciò dalla ($p$. §. 205) con questa sostituzione si ha

$\tan\delta = \tan\alpha - \frac{\tan\omega}{2\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha - \tan\omega}{2\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha - \tan\omega}{1 + \cos. 2\alpha}$; liberando da fratti, abbiamo

$\tan\delta + \tan\delta.\cos 2\alpha = \operatorname{sen} 2\alpha - \tan\omega$, e $\operatorname{sen}\delta\cos\omega +$
$\operatorname{sen}\delta.\cos\omega.\cos 2\alpha = \operatorname{sen}\delta.\cos\omega.\operatorname{sen} 2\alpha - \cos\delta.\operatorname{sen}\omega$;
riducendo si ha $\operatorname{sen}(\delta + \omega) = \cos\omega\operatorname{sen}(2\alpha - \delta)$.

Infine si ottiene

$$\operatorname{sen}(2\alpha - \delta) = \frac{\operatorname{sen}(\delta + \omega)}{\cos\omega} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (29);$$

questa formola darà il valore di $2\alpha - \delta$, e perciò anche quello di α. Conviene però dalla (q. §. 205) rinvenire s, dalla (r. §. 205) trovare il valore di ω.

A fine di fare un'applicazione di questa formola, sia $h = 8,007$, $x = 1000^m$, $y = 4^m$. Si cerca l'angolo di proiezione per colpire col pezzo da 24. Da questi dati emerge $x = 1,504$, $s = 66°.44'$ $\delta = 14'$ circa. Si ha

$$\tan\omega = \frac{\tan s - 1}{h} = \frac{1,327}{8,007} = 0,1657,\ \omega = 9°.25',\ \text{e}\ \omega + \delta = 9°.39':$$

la formola (29) diventa

$$\text{sen}(2\alpha - \delta) = \frac{\text{sen}\,9°.39'}{\cos 9°.25'},\ \log\text{sen}\,(2\alpha - \delta) = \log.\text{sen}\,9°.39' +$$

$$\text{com.log.}\cos 9°.25' = 9,22435 + 0,00589 = 9,23024\ ;$$

$2\alpha - \delta = 9°.47'$ circa, $2\alpha = 9°.47' + 14'$ circa $= 10°$. circa, ed $\alpha = 5°$. Come doveva essere perchè i dati corrispondono a quelli del passato esempio.

207. Quando siano date le coordinate m, n ed m' n' di due punti, pei quali debba passare la traiettoria, si avrà $\tan\delta = \frac{m}{n}$. $\tan\delta' = \frac{n'}{m'}$. L'equazione ($p$. §. 205) dà

$$\tan\alpha - \tan\delta = \frac{\tan s - 1}{2h\cos^2\alpha},\ \tan\alpha - \tan\delta' = \frac{\tan s' - 1}{2h\cos^2\alpha}.$$

Sottraendo dalla seconda la prima viene in fine

$$h = \frac{\tan s' - \tan s}{2\cos^2\alpha(\tan\delta - \tan\delta')} \quad \ldots\ldots\ (30).$$

Da questa se ne ha un'altra con la sostituzione di $1 + \cos 2\alpha$ per $2\cos^2\alpha$, cioè

$$\cos 2\alpha = \frac{\tan s' - \tan s}{h(\tan\delta - \tan\delta')} - 1 \quad \ldots\ldots\ (31).$$

Siano $x = 1000^m$, $y = 1^m$, $x' = 500^m$, $y' = 20^m$ le coordinate

di due punti da colpirsi con l'angolo $\alpha = 10°$. L'arma sia il pezzo da 24, che fa risultare

$$x = \frac{1000}{\frac{c}{2}} = 1,504\ ,\ x' = \frac{500}{\frac{c}{2}} = 0,7519\ ,\ \tan\delta = \frac{y}{x} = \frac{1}{1000} =$$

$$0,001\ ,\ \tan\delta' = \frac{y'}{x'} = \frac{20}{500} = 0,04\ ,\ \text{ed}\ \frac{e^x - 1}{x} = 2,327 =$$

$$\tan . s\ ,\ \frac{e^{x'} - 1}{x'} = 1,490 = \tan s'.$$

La formola (30) con queste sostituzioni dà

$$h = \frac{1.490 - 2,327}{2\cos^2.10°.(0,001 - 0,04)} = \frac{0,837}{0,078\cos^2.10°} = \frac{837}{78\cos^2.10°}\ ,$$

$\log.h = \log 837 + \text{com}.\log.78 + \text{com}.\log.\cos^2.10° = 2,92273 + 8,10791 + 0,01330 = 1,04394$, $h = 11,06$ circa. Per la velocità $V = \sqrt{2gh} = \sqrt{11,06.cg}$; $\log V = \frac{1}{2}(\log.11,06 + \log.g + \log.c) = \frac{1}{2}(1,04394 + 0,99162 + 3,12384) = 2,67970$:

$$V = 478^m.\ \text{circa}.$$

Siano i punti da colpirsi quelli stessi di sopra, e supponiamo esser data $V = 478^m$ ossia $h = 11,06$. Si domanda l'angolo di elevazione del tiro. In conseguenza la formola (31) è quella che deve risolversi. Intanto si ha pure $\tan\delta' = 0,04$, $\tan\delta = 0,001$: $\tan s' = 1,49$, $\tan s = 2,327$; onde

$$\cos 2\alpha = \frac{1,490 - 2,327}{11,06(0,001 - 0,04)} - 1 = \frac{0,837}{11,06 \times 0,039} - 1\ ,\ \text{e}$$

$\log.0,837 + \text{com}.\log 11,06 + \text{com}.\log.0,039 = 9,92273 + 8,95606 + 1,40898 = 0,28777$, il numero è 1,940 circa, dunque $\cos 2\alpha = 1,940 - 1 = 0,940$; $\log.\cos 2\alpha = 9,97313$, $2\alpha = 19°.58'$, e $\alpha = 9°.59'$ ossia $\alpha = 10°$ circa; come doveva risultare.

Dividendo ora a vicenda l'equazioni che si sono sottratte, e facendo le riduzioni, si ha

$$\tan\alpha = \frac{\tan\delta(\tan s' - 1) - \tan\delta'(\tan s - 1)}{\tan s' - \tan s}\ .\ .\ .\ (32).$$

Questa formola e la (30) si possono applicare, come accenna Persy, agli sperimenti di Lombard per la ricerca della velocità iniziale de' proietti de' cannoni e degli obici. Infatti in essi sperimenti si misurano le coordinate x, y della traiettoria al punto d'incontro con la tavoletta situata verticalmente vicino all'arma per dare a conoscere l'angolo di partenza, e le altre x', y' si ottengono misurando la distanza dal punto di caduta all'arma, e prendendo la differenza di livello fra esso punto ed il centro della bocca sia del cannone sia dell'obice. O in altri termini: i dati che debbono far parte dell'ultima formola, si prendono dopo il tiro, e poscia fanno conoscere l'angolo α, il quale in questo caso rappresenterà l'angolo di partenza del mobile; perchè in detti sperimenti l'arma è situata con l'anima orizzontale. Conosciutosi in tal modo α, e sostituitone il valore nella formola (30), si farà manifesto il valore di h e quindi quello di V.

È da notare, che le formole finora stabilite, nel cambiamento de' varii segni che si fa agli angoli α, δ, δ', si applicano alle diverse posizioni, in cui si trova il punto, o i punti da colpirsi.

Per fare un'applicazione delle formole (30 e 32) ad uno sperimento di Lombard, si sa da questo autore che la palla da 24 spinta con 8 libbre di polvere della portata di 125 tese col mortaro provetto, ha dato i seguenti risultamenti

$$\tan\delta = \frac{-0^m,012408888\,(=\text{piedi } 0,382)}{15^m,59232\,(=\text{piedi } 48)} = -0,0007958334.$$

$$\tan\delta' = \frac{-1^m,67812344\,(=\text{piedi } 5,166)}{245^m,74146\,(=\text{piedi } 756,5)} = -0,006828818,$$

$\log.\tan\delta = 6,90082$, $\log.\tan\delta' = 7,83435$. Da questi dati emerge $x = 15^m,59232$, $y = -0^m,012408888$; $x' = 245^m,74146$. $y' = -1^m,67812344$: le ordinate y, y' sono prese negativamente, perchè la traiettoria è passata al disotto dell'asse del

cannone. Valutando le ascisse con l'unità di misura $\frac{c}{2}$ viene $x=0,02345$ circa, e quindi $\tan s=\frac{2,71828^{0,02345}-1}{0,02345}=1,01183$ e $\tan s-1=0,01183$; così $\tan.s'-1=0,20980$; dunque log. $\tan\delta'$ $(\tan s-1)=7,83435+8,07304=5,90739$; log. $\tan\delta$ $(\tan s'-1)=6,90082+9,32181=6,22263$, e $-\delta'$ $(\tan s-1)+\tan\delta(\tan s'-1)=-0,00008019+0,00016696=0,00008617$: il logaritmo n'è 5,93536.

Inoltre $\tan s'-\tan s=0,19797$, il logaritmo sarà 9,29661; e quindi con tutte queste sostituzioni la formola (32) dà log. $\tan\alpha=6,63875$, ed $\alpha=0°.1'.30''$ circa.

In conseguenza la formola (30) darà

$$h=\frac{\tan s'-\tan s}{2\cos^2\alpha(\tan\delta-\tan\delta')}=\frac{0,19797}{2\cos^2(0°.1'.30'').0,006032985};\text{ e}$$

log. 0,19797	9,29661
com. log. 0,006033.	2,21954
com. log. 2	9,69897
com. log. $\cos^2.(0°.1'.30'')$	0,00000
log. h.	1,21512
log. c.	3,12384
log. g.	0,99162
	5,33058
log. V.	2,66529

$$V=462^m,6 \text{ circa},$$

ch'è la velocità assegnata da Lombard, il quale rinviene $\alpha=1'.34''$. Onde il metodo di questo autore per la ricerca della velocità iniziale conduce ai veri risultamenti; il che fa conoscere, che le anomalie in più sono distrutte da quelle in meno, le quali sono cagionate dal detto metodo.

208. L'equazione (17.§. 199) dà generalmente

$$\frac{x}{y}=\tan\alpha+\frac{1}{h\cos^2\alpha}-\frac{e^x}{2xh\cos^2\alpha}=\tan\delta\text{, e}$$

$$\tan\alpha-\tan\delta=\frac{e^x}{2xh\cos^2\alpha}-\frac{1}{h\cos^2\alpha}.$$

Aggiungendo a ciò la condizione del considerare il vertice della traiettoria come se passasse per un dato punto, dovrà con questa verificarsi la derivata della (17. §. 199), nella quale avrà a farsi $p = \frac{dy}{dx}$ eguale a zero, per esprimere detta condizione. Con tale operazione si rileva $\frac{\tan\alpha}{x} = \frac{e^x - 1}{2xh\cos^2\alpha}$; ma (§. 207) $\tan\alpha - \tan\delta = \frac{\tan s - 1}{2h\cos^2\alpha}$; dunque $\frac{e^x}{2xh\cos^2\alpha} - \frac{1}{2h\cos^2\alpha} = \frac{\tan s - 1}{2h\cos^2\alpha}$: e sostituendo $\frac{\tan\alpha}{x} - \frac{1}{2h\cos^2\alpha} = \frac{\tan s - 1}{2h\cos^2\alpha}$, dalla quale $\frac{\tan\alpha}{x} = \frac{\tan s}{2h\cos^2\alpha}$, e $h = \frac{x\tan s}{2\tan\alpha.\cos^2\alpha} = \frac{x\tan s}{2.\operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha}$; finalmente

$$h = \frac{x\tan s}{\operatorname{sen} 2\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33).$$

Eguagliando i secondi membri delle formole (33) e (27 §. 205), si avrà

$$\frac{x\tan s}{\operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}(s - 45^\circ).\cos\delta\cos 45^\circ}{\operatorname{sen}(\alpha - \delta)\cos\alpha.\cos s}, \text{ e } \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \delta)\cos\alpha}{\cos\delta.2\operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha} =$$

$$\frac{\operatorname{sen}(s - 45^\circ)\cos 40^\circ}{x\operatorname{sen} s}; \text{ riducendo}$$

$$\tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{\tan\delta}{\tan\alpha}\right) = \frac{\operatorname{sen}(s - 45^\circ)\cos^2 45^\circ}{x\operatorname{sen} s.\cos 45^\circ} = \frac{\operatorname{sen}(s - 45^\circ).\frac{1}{2}}{x\operatorname{sen} s.\cos 45^\circ};$$ e prendendo un angolo ausiliario β in modo da essere

$$\tan\beta = \frac{\operatorname{sen}(s - 45^\circ)}{x\operatorname{sen} s.\cos 45^\circ} \quad . \; . \; . \; . \quad (t),$$

avremo $1 - \frac{\tan\delta}{\tan\alpha} = \tan\beta$, da cui

$$\tan\alpha = \frac{\tan\delta}{1 - \tan\beta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (s).$$

Per rendere questa formola subordinata totalmente al calcolo de' logaritmi, si sostituisca per uno $\tan 45^\circ = \frac{\operatorname{sen} 45^\circ}{\cos 45^\circ}$, e per $\tan \beta \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta}$, dopo le riduzioni si ritrae

$$\tan \alpha = \frac{\tan \delta . \cos \beta . \cos 45^\circ}{\operatorname{sen}(45^\circ - \beta)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34).$$

Le formole (33, *t*, e 34), come in seguito vedremo, comprendono la teorica de' tiri a rimbalzo, allorchè il vertice della traiettoria debba trovarsi nella cresta del parapetto della faccia adiacente a quella presa di mira.

TEORICA V.

Tiro di punto in bianco.

209. (*Fig. 36*). Sia *ABCD* la bocca da fuoco, *CG* una orizzontale, *CHG* la traiettoria descritta dal mobile. E supponiamo primieramente essere la linea di mira *AB* parallela all'orizzonte. È chiaro che l'asse *LC* protratto indefinitamente in *E*, farà con l'orizzonte l'angolo *ECG* eguale all'angolo *BMC*. Il punto *H* incontro della linea di mira con la curva, si è generalmente chiamato *punto in bianco naturale*, se la *AB* rappresenta la linea di mira naturale; e *punto in bianco artificiale*, se *AB* rappresenta una linea di mira artificiale (§. 16). Allorchè la retta *AB* indica la linea di mira naturale diretta orizzontalmente, e la *CHG* esprime una traiettoria segnata dal proietto, il quale sia spinto con una carica di polvere che sia il terzo del suo peso e di una media qualità, il punto *H* si distingue da taluni col nome *di punto in bianco primitivo*.

Esprimendo con *m* l'angolo di mira naturale dell'arma, che si rinviene nel modo detto antecedentemente (§. 16), e sia la linea di mira *AB* orizzontale, si avrà $m = \alpha$. Di qui facil-

mente si scorge che le due rette BH e CG differiscono di pochissimo, sicchè volendo conoscere la distanza BH del punto in bianco naturale, qualunque siasi la carica, calcoleremo, e senza errore sensibile la CG. Ma la CG è l'ampiezza orizzontale del tiro, perciò la formola da risolversi sarà la (18. §. 199), in cui per 2α bisogna sostituire $2m$. Dal valore di V si conosce h (§. 199), ed il valore di $X = CG$ si conoscerà mediante la falsa posizione (§. 199), come si è eseguito pel pezzo da 24, il cui angolo di mira naturale essendo $1^\circ.15'.6''$, sarà preso come angolo di elevazione. Il risultamento avuto è stato di $X = 667^m = 342^{tes}$.

Lo stesso raziocinio di sopra regge, se m indichi un angolo di mira artificiale; e se la rispondente linea di mira sia parallela all'orizzonte, si avrà pure $m = \alpha$: ciò vale lo stesso che dire, che per colpirsi con un angolo m di mira qualunque, e con una data velocità, un oggetto a livello della bocca dell'arma, la formola da usarsi è la (18. §. 199), nella quale per 2α va sostituito $2m$; con ciò si ottiene

$$\text{sen}\, 2m = \frac{c^X - 1}{X} = \frac{\tan s - 1}{h}; \text{ ma (§. 205)} \frac{\tan s - 1}{h} = \frac{\text{sen}(s - 45^\circ)}{h \cos 45^\circ \cos s};$$

così l'angolo di mira farà parte della formola

$$\text{sen}\, 2m = \frac{\text{sen}(s - 45^\circ)}{h \cos 45^\circ \cos \cdot s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35).$$

210. Essendo in generale $m = \alpha - \delta$, perchè l'angolo al punto è trascurabile (§. 18), qualunque esser possa la posizione della linea di mira rispetto all'orizzonte; si avrà $2\alpha - \delta = 2m + \delta$, e quindi $\text{sen}\,(2\alpha - \delta) = \text{sen}\,(2m + \delta)$. Con ciò la formola (29. §. 206) darà

$$\text{sen}\,(2m + \delta) = \frac{\text{sen}\,(\delta + \omega)}{\cos \omega} \quad \ldots\ldots \quad (36).$$

Supponiamo che la distanza x dall'oggetto all'arma resti costante, e che l'angolo δ abbia una piccola variazione $d\delta$. Di-

mostreremo che l'angolo di mira m varierà per un tale angolo, che ben potrà al tutto trascurarsi.

Infatti differenziando questa equazione per rispetto ad m e δ, si ottiene $\cos(2m+\delta)(2dm+d\delta)=\frac{\cos(\delta+\omega)}{\cos\omega}d\delta$.

E se da principio δ è zero, viene $(2dm+d\delta)\cos 2m=d\delta$; infine $dm=\frac{\text{sen}^2 m}{\cos 2m}d\delta$. Questa formola dimostra che l'angolo all'oggetto prima era zero e poscia è stato aumentato per un angolo $d\delta$, e questo aumento ha prodotto l'altro dm nell'angolo di mira.

Facendo a cagion di esempio $m=2^\circ$, viene

$$dm=\frac{\text{sen}^2 2^\circ}{\cos 4^\circ}d\delta, \text{ e}$$

log. sen$^2 2^\circ$. . . .	7,08564
com. log. cos 4°	0,00206
	7.08770;

il numero è 0,00122, dunque $dm=0{,}00122d\delta$.

Supponiamo un oggetto alto 20^m e distante dall'arma per 600^m: si avrà $\tan d\delta=\frac{20}{600}=\frac{1}{30}$, $d\delta=1^\circ.55'$ circa, aumento dato all'angolo δ che in principio era zero. Con questo $dm=0{,}00122\times 1^\circ.55'=8'',41$: quantità trascurabile nelle applicazioni.

Dall'esposto si può stabilire con Persy (L), che tanto la portata di un punto in bianco, quanto la figura della traiettoria non cambiano sensibilmente, allorchè l'angolo di mira e la velocità iniziale restando i medesimi, l'angolo di proiezione varia nella grandezza de' limiti ordinarii; vale a dire che fra questi limiti e la stessa quantità e qualità di carica, la portata di punto in bianco dipende solamente dall'angolo di mira, e per niente dall'angolo di proiezione e della posizione della linea di mira in rapporto all'orizzonte. Ossia quando l'oggetto non

si eleva molto in rapporto del livello della batteria, si potrà usare la formola (35. §. 209), sulla quale è basata la costruzione delle tavole del tiro de' cannoni e degli obici, allorchè si adoperano con piena carica. In qualunque altro caso conviene far uso della formola (36).

Il calcolo dell'alzo si esegue con la formola inserita nel §. 16, nella quale per M' bisogna sostituire m: perciò

$$H = l \tan m - (R - r) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37)$$

Questa formola, la (35. §. 209) e l'altra ausiliaria (§. 205) $\tan s = \frac{e^x - 1}{x}$, comprendono tutta la teorica del punto in bianco.

Dalla (35) deriva l'altra

$$h = \frac{\operatorname{sen}(s - 45^\circ)}{\operatorname{sen} 2m \cos 45^\circ \cos s} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (38).$$

Inoltre $\frac{\operatorname{sen}(s - 45^\circ)}{\cos s} = h \operatorname{sen} 2m \cos 45^\circ$; ma $\frac{\operatorname{sen}(s - 45^\circ)}{\cos s} =$ $\cos 45^\circ (\tan s - 1)$; dunque

$$\tan s = 1 + h \operatorname{sen} 2m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39).$$

211. Per fare le applicazioni delle formole antecedenti, si voglia col pezzo da 24 colpire un oggetto distante 1000^m con la velocità iniziale di 361^m, e si voglia conoscere tanto l'angolo di mira quanto l'alzo che si deve dare.

Con questi dati si ha (§. 200) $h = 10$, (§. 205) $x = 1,504$, ed $s = 66^\circ.44'$, e la formola (35) diventa

$$\operatorname{sen} 2m = \frac{\operatorname{sen}(66^\circ.44' - 45^\circ)}{10 \cos 45^\circ \cos 66^\circ.44'} = \frac{\operatorname{sen} 21^\circ.44'}{10 \cos 45^\circ \cos 66^\circ.44'};$$

usando i logaritmi, avremo

log sen $21^\circ.44'$	9,56854
com. log 10	9,00000
com. log cos 45°	0.15051
com. log cos $66^\circ.44'$	0,40339
log sen $2m$.	9,12244

$m = 3^\circ.48'$ circa

(1) Cours de Balistique §. 110.

Per aversi l'alzo nella formola (37), bisogna sostituire per m 3°.48′, per l 3^m,184 (=pol. 117,63), e per $R-r$ 0^m,01543 (=pol. 2,57); onde log l+log tan 3°.48′=0,50297+8,82230=9,32527; e l tan m=0^m,2115 circa, ed

H=0^m,2115—0^m,01543=0^m,196 circa (=pol. 7. lin. 3).

212. Sia m=2°; si cerca la velocità iniziale per colpire un oggetto, distante 1000^m, di punto in bianco.

La formola da risolversi è la (38. §. 210). Si ha al solito α=1,504, ed s=66°.44′; onde

log sen (66°.44′—45°) (=21°.44′) . . .	9,56854
com. log sen 2m (=4°)	1,15642
com. log cos 45°	0,15051
com. log cos s (=66°.44′)	0,40339
log h	1,27886

Ma $V=\sqrt{2gh}$, adunque

log h	1,27886
log c	3,12384
log g	0,99162
	5,39432
log V	2,69716

V=498^m.

La formola per l'alzo dà log l (=3^m,184)+log tan m (=2°)=0,50297+8,54308=9,04605; e l tan m=0^m,1112, infine H=0^m,1112—0^m,01543=0^m,10577.

Se negli esempii particolari venisse H negativo allora converrebbe impiegare, per la punteria, la formola degli abbassamenti (11. §. 17).

213. Per applicare la formola (39. §. 210) al pezzo da 24, sia V=361^m ed m=3°; si cerca la distanza di punto in bianco artificiale.

Si avrà (§. 205) $h=10$, onde

$\log h\,(=10)$ 1,00000
$\log \operatorname{sen} 2m\,(=6^{\circ})$ 9,01923
0,01923, il n.° è
$h \operatorname{sen} 2m$ . . . . . 1,045 circa
$1+h \operatorname{sen} 2m$ . . . . 2,045; e perciò

$$\tan s=2{,}045,\ \text{o pure}\ \frac{e^x-1}{x}=2{,}045.$$

Per conoscere il valore di x, facciamo uso come antecedentemente della falsa posizione.

Sia primo $x=1$, si avrà $\frac{2{,}71828^1-1}{1}=1{,}71828$; ed il primo errore sarà $1{,}71828-2{,}045=-0{,}32672$.

Sia poscia $x=1{,}5$ avremo $\frac{2{,}71828^{1,5}-1}{45}=2{,}32$, e l'errore secondo viene $2{,}32-2{,}045=+0{,}275$: esponendo il quadro della regola, si ha

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & 1{,}5 \\ -0{,}32672 & & +0{,}275 \\ 1{,}5\times 0{,}32672 & = & 0{,}49008 \\ 1\times 0{,}275 & = & 0{,}275 \\ \hline & & 0{,}76508 \end{array}$$

Il valore approssimato di x verrà espresso da

$$x=\frac{0{,}76508}{0{,}32672+0{,}275}=\frac{0{,}76508}{0{,}60172}=1{,}27.$$

Per aversi x in metri, bisogna ripristinare l'unità linea $\frac{c}{2}$, e perciò $x=0{,}635\cdot c$; $\log. 0{,}635+\log. c=9{,}80277+3{,}12384=2{,}92661$, ed $x=844^{m}$, ch'è la portata di punto in bianco artificiale. La formola solita darà l'alzo, col quale conviene mirare l'oggetto da colpirsi.

TEORICA VI.

Tiro con piccoli angoli di proiezione.

METODO DI LOMBARD.

214. Nella formola (3.§. 187), supponendo l'angolo di proiezione α molto piccolo, verrà presso a poco $\cos\alpha = 1$, ed $s = x$ secondo ciò che da noi è stato stabilito antecedentemente (§. 199).

In conseguenza $$\frac{dx}{dt} = Ve^{-\frac{x}{c}}.$$

e perchè $\frac{dx}{dt} = v$ esprime la velocità residua alla distanza x dal punto di partenza, perciò avremo

$$v = \frac{V}{e^{\frac{x}{c}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40),$$

ch'è la formola fra la velocità iniziale la residua, e la corrispondente distanza; la quale formola è applicabile al tiro dei cannoni e degli obici.

Esempio 1.° Sia il pezzo da 24 francese, il cui proietto abbia di velocità iniziale 400^m; si voglia conoscere la velocità residua alla distanza di 300^m. Ciò vale a dire, che la v sarà la incognita. E sostituendo tali valori nella formola di sopra, si ha il seguente calcolo

$\log v = \log V - \log e^{\frac{300}{c}}$; ma $\log e^{\frac{300}{c}} = 300 \times \frac{1}{c} \times 0,43429$: in cui 0,43429 è il logaritmo della base e nel sistema Brigiano: quindi

$\log\left(\log e^{\frac{300}{c}}\right) = \log 300 + \log\frac{1}{c} \times 0,43429$; ma $\log\frac{1}{c} \times 0,43429 =$ 6,51394 (Tav. XV. §. 59); perciò $\log\left(\log e^{\frac{300}{c}}\right) = 2,47712 +$

$$6,51394 = 8,99106\,,\ \text{e}\ \log e^{\frac{300}{c}} = 0.09797\,,\ \text{e}\ \log v = 2,60206 - 0,09797 = 2,50409\ \ v = 319^{m}\ \text{circa}.$$

Dunque alla suddetta distanza dall'arma la velocità residua è 319^{m}: ossia la palla da 24, traversata l'aria per 300^{m}, perde di velocità $400^{m} - 319^{m} = 81^{m}$.

Esempio 2°. Sia $x = 300^{m}$, $v = 319^{m}$; si cerca la velocità iniziale della palla da 24.

La formola ultima dà

$$V = ve^{\frac{x}{c}}.$$

Sostituendo i numeri, viene

$$V = 319\,e^{\frac{300}{c}},\ \log V = \log 319 + \log e^{\frac{300}{c}} = 2,50379 + 0,09797 = 2,60176.$$
$$V = 399^{m},7\,,\ \text{o circa}\ 400^{m}.$$

Ciò vale a dire: perchè la palla da 24 abbia alla distanza di 300^{m} la velocità residua 319^{m}, bisogna che parta dalla bocca da fuoco con una velocità di 400^{m}.

La formola $\frac{dx}{dt} = \frac{V}{e^{\frac{x}{c}}}$ dà $Vdt = e^{\frac{x}{c}}dx$. Integrando si

ha $Vt = c \cdot e^{\frac{x}{c}} + C$; allorchè $x = o$ è pure $t = o$; dunque

$$C = -c\,,\ \text{e}$$

$$t = \frac{c}{V}\left(e^{\frac{x}{c}} - 1\right) \ldots\ldots\ldots \quad (41),$$

ch'esprime la formola fra il tempo, lo spazio e la velocità iniziale.

Esempio. Si vuol conoscere il tempo del tragitto della palla

da 24 con le stesse condizioni del primo esempio recato allo antecedente paragrafo.

Si avrà $t = \frac{c}{400}(e^{\frac{300}{c}} - 1)$, e

$\log e^{\frac{300}{c}} = 0{,}09797$; prendendone i numeri, $e^{\frac{300}{c}} = 1{,}253$ circa,

dunque $e^{\frac{300}{c}} - 1 = 0{,}253$; e $t = \frac{0{,}253 \cdot c}{400}$: prendendo i logaritmi,

si ha $\log. t = \log. c + \log. 0{,}253 - \log. 400$: assumendo dalla Tavola XV (§. 59) il valore di c per la palla da 24, viene $t = 3{,}12384 + 9{,}40312 - 2{,}60206 = 9{,}92490$, e $t = 0'',8412$.

Ossia una palla da 24 sollecitata dalla velocità iniziale di 400^m, dopo aver percorso 300^m, acquista la velocità residua di 319^m alla fine di $0'',8412$.

Le due stabilite formole sono accomodate per determinare tutte le circostanze del tiro di quelle bocche da fuoco, che debbono usarsi con piccoli angoli di proiezione. Ed abbenchè esse formole non esprimano la natura della curva descritta dal mobile, pure i risultamenti, che se ne ritraggono, sono bastevolissimi per governare con efficacia i tiri, e conoscere con la massima approssimazione l'effetto de' proietti dei cannoni e degli obici.

TEORICA VII.

Ricerca della velocità iniziale.

METODO DI LOMBARD.

115. Il metodo per la ricerca della velocità iniziale delle palle e delle granate, secondo Lombard, è il seguente (*Fig.* 37). L'arma *AB* si situi coll'asse orizzontale: si collochi di rincontro

alla medesima una tavoletta *QP* di due linee di spessezza, e larga quasi quanto il diametro del mobile, in posizione verticale e normale all'asse: si protrae l'infimo lato *OB* dell'anima fino al punto *M* della tavoletta, dal quale si meni la verticale *MQ*, e la orizzontale espressa dal punto *M* in proiezione. La tavoletta si pone tanto distante dalla bocca dell'arma da non rimaner rotta dal settore di esplosione, ma sibbene dal mobile. Sia la bocca da fuoco caricata con una data quantità di polvere di conosciuta portata, e dinoti *BIF* la traiettoria del proietto, il quale romperà la tavoletta, per esempio, in *I* punto infimo dell'arco del cerchio massimo di esso mobile: si misuri dopo lo sparo la retta *IM*, la distanza orizzontale *BD*, e la *FD* differenza di livello del punto *B* al punto di caduta *F*, e ciò mediante la livellazione. La formola (41. §. 114) dà $V=\frac{c}{t}(e^{\frac{x}{c}}-1)$: nella quale t esprime il tempo che mette il proietto per descrivere la curva *BIF*: ora se la gravità, non operasse il proietto si troverebbe in *H* all'estremo della tangente *BNH* condotta alla traiettoria, o vero seguirebbe la sua prima direzione, perciò *HD* indica l'effetto della gravità, in conseguenza tanto tempo impiega il mobile per descrivere l'arco *BIF* quanto ne impiegherebbe a percorrere la verticale *HD* abbandonato al proprio peso, ma questo tempo è indicato da $\sqrt{\frac{2HF}{g}}$, onde valutandone il valore e posto nella formola darà il valore della velocità iniziale *V*.

Applichiamo l'esposto procedimento ad una sperienza di Lombard (A). Il pezzo da 24 caricato con libbre francesi $2\frac{1}{2}$ di polvere della portata di 125 tese col provetto, ha dato i seguenti risultamenti presi sul terreno: $BM=$ piedi $24=$ pol. 288;

(A) Moto de' proietti, §. 172.

MI = pol. 2 lin. $8\frac{1}{2}$ = pol. 2,708333 = lin. 32,5 ; BD = piedi 791; DF = piedi 5,31944, con ciò avremo la seguente

Operazione preparatoria.

$$\tan IBM = \frac{IM}{BM} = \frac{2,708333}{288}, \text{ e}$$

log. 2,708333	0,4327021
com. log. 288	7,5406075
log. tan. IBM	7,9733096 = log. tan. 0° · 32′ · 20′.

Ma ED = tan. $IBM \times BD$ = tan. 0° · 31′ · 20″ × 791, onde

log. IBM	7,9733096
log. 791	2,8981765
log. ED	0,8714861
ED. . .	piedi 7,43851
DF.	5,31944
EF	12,75795.

Il tempo per la EF sarà espresso da

$$t = \sqrt{\frac{2EF}{g}} = \sqrt{\frac{FE}{15,1}} : \text{ percui}$$

log EF. . .	1,1057810
com log 15,1 . .	8,8210231
	9,9268041 : la metà dà
log. t . . .	9,9634020.

Questo tempo posto nella formola di V darà una velocità iniziale maggiore della vera, perciocchè questo sarebbe il tempo per la ED anzicchè per la HD, dunque si è commesso un errore in più che sarà corretto.

Calcolo della velocità colla formola $V=\frac{c}{t}(e^{\frac{x}{c}}-1)$.

$\log.\frac{1}{c}\times 0,43429$		5,8495323
$\log.x(=791)$		2,8981765
$\log.\left(\log.e^{\frac{x}{c}}\right)$		8,7477088
$\log.e^{\frac{x}{c}}$		0,0559382
$e^{\frac{x}{c}}$	1,13764	
$e^{\frac{x}{c}}-1$	0,13764	
$\log.\left(e^{\frac{x}{c}}-1\right)$		9,1381763
$\log c$		3,7882520
com. $\log t$.		0,0365980
$\log. V$		2,9630263

$V=$ piedi 918,39.

Supponiamo per poco che questa velocità sia effettivamente quella della palla, la qual cosa pel calcolo della *IN* arrecherà un errore trascurabile. Essendo *IM* di due pollici circa, e *BM* di 24 piedi, la ipotenusa *BI* verrà anche di 24 piedi, senza errore sensibile; perciò il moto della palla si può considerare equabile da *B* in *I*, attesa la prossimità di questi punti: chiamando perciò t' il tempo per la *BI*, sarà $t'=\frac{BI}{V}=\frac{24}{918,39}$. Ed essendosi la palla abbassata, durante questo tempo per la *NI*, verrà $\frac{24}{819,33}=\sqrt{\frac{NI}{15,1}}$; dalla quale $NI=$ linee 1,485; e perciò

$MN = MI + NI =$ linee $32,5 +$ linee $1,485 =$ linee $33,985$; onde

$$\tan NBM = \frac{MN}{BM} = \frac{33,985}{3456}, \text{ da cui}$$

log 33,985	1,5312873
com. log 3456.	6,4614263
log. tan. *NBM*.	7,9927136

Inoltre $HD = BD \times \tan NBM$, e

log *BD* (= 791 piedi) . .	2,8981765
log. tan *NBM*	7,9927136
log. *HD*	0,8908901

HD . . . . piedi 7,7784 circa.

Sarà $HF = HD + DF = 7,7784 + 5,31944 =$ piedi 13,09784 : perciò il tempo per la verticale *HF* sarà

$$t = \sqrt{\frac{HF}{15,1}} = \sqrt{\frac{13,09784}{15,1}}, \text{ e}$$

log. 13,09784.	1,1171996
com. log 15,1	0,8210231
	9,9382227, la metà da
log *t*	3,9691113.

Questo tempo posto nella suddetta formola darà la velocità iniziale corretta : perciò come sopra

$\log. \left(e^{\frac{x}{c}} - 1\right)$	9,1381763
log. *c*	3,7882520
com. log. *t*	0,0308887
log. *V*	2,9573170

V = piedi 906,37 circa.

Questa correzione del tempo diminuisce di 12 piedi la prima velocità trovata. E siccome si è calcolato la *NI* colla velocità di piedi 918,39, così calcolandola ora colla velocità di piedi 906,37 corretta, si avrà un valore più esatto, e quindi seguendo lo stesso procedimento, si farà un secondo calcolo pel tempo, il

quale porterà una seconda correzione, cioè si avrà una velocità iniziale di piedi 906,06 quasi eguale all'antecedente. Dopo lo esposto si può conchiudere che la velocità iniziale in disamina è di piedi 906.

Si scorge che il metodo in parola sta basato sul calcolo dell'angolo di partenza il quale manuduce alla conoscenza del tempo, da inserirsi nella formola della velocità iniziale da calcolarsi.

Vogliamo anche fare avvertire ch'essendo $c=\frac{4aD}{3k}$ (§. 61), Lombard suppone $k=\frac{3}{5}=0,6$, per la qual cosa stabilisce per la palla da 24 $\log c=3,7882520$ (B).

Dall'analisi di tutto quello che si è finora esposto emerge, che il metodo in discorso contiene degli errori che conducono a risultamenti in più ed in meno, non pertanto le velocità iniziali coincidono con quelle rinvenute coi procedimenti i più rigorosi, ciò significa che gli errori in parola mutuamente si compensano, e perciò tutti i sommi artiglieri matematici tengono come esatte le velocità iniziali delle palle, e delle granate, che offre Lombard nelle sue tavole del tiro.

TEORICA VIII.

Tiro di punto in bianco.

METODO DI LOMBARD.

216. (*Fig. 6.*). Sia *BG* un cannone o un obice: *L* il punto in bianco (§. 16), cioè l'incontro della linea balistica *GON* con una qualunque linea di mira *BA* prolungata: esprima la retta *HGK* l'asse del pezzo protratto indefinitamente.

Si tiri la *GL*, la orizzontale *Gx*, e la verticale *MK*.

(B) Lombard. Moto de' proietti, §. 133, Tav. VI.

Sia $AFG=M$ un angolo di mira qualunque: è chiaro che, se il proietto non fosse sottoposto alla forza di gravità, dovrebbe percorrere la retta GK; ma trovandosi in L, secondo si è supposto, l'abbassamento KL sarà l'effetto di essa gravità: o per meglio dire tanto tempo impiega il mobile per giungere da G in L quanto ne impiegherebbe passando per la verticale KL nel mezzo resistente per effetto del proprio peso.

Ma siccome negli usi delle bocche da fuoco, delle quali si tratta la KL è sempre piccolissima, così si potrà senza sensibile errore, considerare il tempo per la KL nel mezzo resistente eguale a quello per KL nel vôto.

Premesso ciò, essendo $KL=KM-LM$, e $KM=GM\tan KGM$, ed $LM=GM\tan LGM$, e $GM=GL\cos LGM$, ne risulta $KL=GL\cos LGM(\tan KGM-\tan LGM)$.

Il tempo per la caduta KL, facendo $GL=x$, verrebbe

$$t'=\sqrt{\frac{2x}{g}.\cos LGM(\tan KGM-\tan LGM)}.$$

Quello per la curva GOL o per la sua corda GL, che l'è quasi eguale, è (§. 215) $t=\frac{c}{V}\left(e^{\frac{x}{c}}-1\right)$; percui avremo l'analogia

$$\frac{2x}{g}\cos LGM(\tan KGM-\tan LGM)=\frac{c^2}{V^2}\left(e^{\frac{x}{c}}-1\right)^2,$$

Inoltre $e^{\frac{x}{c}}=1+\frac{x}{c}+\frac{x^2}{2c^2}+\frac{x^3}{2.3.c^3}+$ ec., da cui

$$\left(e^{\frac{x}{c}}-1\right)^2=\left(\frac{x}{c}+\frac{x^2}{2c^2}+\frac{x^3}{2.3.c^3}+\text{ec.}\right)^2=\frac{x^2}{c^2}+\frac{x^3}{c^3}+\frac{x^4}{3.c^4}+$$

$$\frac{x^4}{4.c^4}+\text{ec.};\ \frac{\left(e^{\frac{x}{c}}-1\right)^2}{x}=\frac{x}{c^2}+\frac{x^2}{c^3}+\frac{x^3}{3.c^4}+\frac{x^3}{4c^4}+\text{ec.}$$

È da notarsi, che nell' uso del tiro del cannone e del tiro dell' obice, il valore di x è sempre minore di quello di c, come dalla Tav. XV (§. 59) apprendiamo. Di più nei denominatori de' fratti che compongono il secondo membro della serie, gli esponenti di x sono di una unità minore di quelli di c: perciò esso secondo membro forma una serie di rapida convergenza. Dalla qual cosa si deduce che i valori de' fratti $\frac{x^3}{3.c^4}$, $\frac{x^3}{4.c^4}$, ec. sono trascurabili rispetto ai valori degli altri $\frac{x}{c^2}$, $\frac{x^2}{c^3}$, come infinitamente piccoli di ordini superiori. Perciò

$$\frac{\left(e^{\frac{x}{c}}-1\right)^2}{x}=\frac{x}{c^2}+\frac{x^2}{c^3}, \text{ e}$$

$$\frac{2}{g}\cos LGM(\tan KGM-\tan LGM)=\frac{c^2}{V^2}\left(\frac{x}{c^2}+\frac{x^2}{c^3}\right); \text{ onde}$$

$$x^2+cx=\frac{2cV^2}{g}\cdot\cos LGM(\tan KGM-\tan LGM) \quad \ldots\ldots (a).$$

Da questa equazione risultano le altre

$$V=\sqrt{\frac{g\left(\frac{x^2}{c}+x\right)}{2\cos LGM(\tan KGM-\tan LGM)}} \quad \ldots\ldots (42),$$

$$\cos LGM(\tan KGM-\tan LGM)=\frac{g}{2V^2}\left(\frac{x^2}{c}+x\right) \quad \ldots\ldots (43),$$

$$x=c\left[\sqrt{\frac{2V^2.\cos LGM(\tan KGM-\tan LGM)}{gc}}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}\right] \quad \ldots (44).$$

Queste tre formole racchiudono tutto ciò che può riguardare la teorica del punto in bianco. Per applicarle a qualche caso particolare supponiamo:

Esempio 1.° Che il punto L da colpirsi di punto in bianco naturale sia elevato di 15^m sulla orizzontale Gx, e distante da G per 700^m, ossia $GL=x=700^m$; e si supponga che facciasi uso del pezzo da 24 di assedio del sistema Gribeauval. Si vuol conoscere la velocità iniziale V.

Con questi dati bisogna fare il seguente calcolo preparatorio. $GM = \sqrt{GL^2 - LM^2} = \sqrt{700^2 - 15^2} = \sqrt{489775}$, log. $GM =$ 2,84501. Nel triangolo rettangolo si ha

$\cos LGM = \frac{GM}{LG}$; log. cos $LGM =$ log. $GM +$ com. log. $GL =$ $2,84501 + 7,15490 = 9,99991$, e $LGM = 1^\circ.10'$.

Inoltre $KGM = LGM + KGL = LGM + AFG - ALG$, ma l'angolo ALG al punto è sempre trascurabile, dunque $KGM = LGM + AFG = 1^\circ.10' + 1^\circ.15'.6'' = 2^\circ.25'.6''$, l'angolo AFG è di $1^\circ.15'.6''$ come angolo di mira dell'arma. Di più

$\tan KGM = \tan 2^\circ.25'.6'' = 0,04223$: $\tan LGM = \tan. 1^\circ.10' = 0,02036$, onde $\tan KGM - \tan LGM = 0,02187$, e prendendo i logaritmi

$\log(\tan KGM - \tan LGM) = 8,33985$; e perciò

$\log[\cos LGM(\tan KGM - \tan. LGM)] = \log. \cos LGM + \log(\tan. KGM - \tan LGM) = 9,99991 + 8,33985 = 8,33976$; quindi la formola (42) dà

$\log x^2 (= 700^2)$	5,79021
com. log. c (Tav. XV. §. 56).	6,87616
$\log. \frac{x^2}{c}$	2,66636
$\frac{x^2}{c}$	463,8
x	700
$\frac{x^2}{c} + x$	1163,8
$\log. \left(\frac{x^2}{c} + x\right)$	3,06595
$\log \frac{1}{2} g (= 4,904)$	0,69055
com. log. cos LGM (tan KGM - tan LGM). . .	1,66024
	5,41674, la metà
$\log. V$.	2,70834

$V = 510^m,95$

ch'è la velocità iniziale richiesta.

Se vogliasi tirare il punto in bianco artificiale con un dato angolo di mira, per AFG si sostituisca il dato, il quale sia, a cagion di esempio, $2^\circ.30'$; allora risulterà $KGM = 1^\circ.10' + 2^\circ.30' = 3^\circ.40'$, e su questo nuovo angolo si faccia il calcolo preparatorio, e quindi per la ricerca della velocità iniziale si ha da tener metodo simile a quello stabilito di sopra.

Esempio 2.° Sia $x = 700^m$, $V = 250^m$, ed il punto L sia elevato di 15^m sulla orizzontale. Si cerca con qual angolo di proiezione si debba tirare usando il medesimo pezzo da 24.

La formola (43) è quella da risolversi: quindi

$\log x^2 (= 700^2)$		5,79020
com. log. c		6,87616
$\log. \frac{x^2}{c}$		2,66636
$\frac{x^2}{c}$	463,8	
x	700	
$\frac{x^2}{c} + x$	1163,8	
$\log. \left(\frac{x^2}{c} + x\right)$		3,06595
$\log. 4,904 (= \frac{1}{2} g)$		0,69055
		3,75650
com. log. V^2.		5,20412
$\log. \cos LGM (\tan KGM - \tan LGM)$.		8,96062

; ossia $9,99991 + \log(\tan KGM - \tan LGM) = 8,96062$, e $\log(\tan KGM - \tan LGM) = 8,96062 - 9,99991 = 8,96071$, $\tan KGM - \tan. LGM = 0,09135$; $\tan KGM = 0,09135 + \tan. 1^\circ.10' = 0,09135 + 0,02036 = 0,11171$, $KGM = 6^\circ.23'.26''$, ch'è l'angolo di elevazione richiesto.

L'angolo di mira artificiale che ne risulta sarà

$$M = KGM - LGM = 5^\circ.13'.26'';$$

ossia, tanto è dare all'arma una posizione tale che l'asse risulti elevato di 6°.23′.26″, quanto il servirsi di un angolo di mira artificiale di 5°.13′.26″ per colpire il punto L alto 15^m sulla orizzontale Gx.

Esempio 3.° Supponiamo l'asse GK del cannone elevato 6° sulla orizzontale Gx, e supponiamo altresì $V = 400^m$; si domanda il punto in bianco naturale del pezzo da 24.

Si avrà $KGM = 6°$, $LGF = AFG = 1°.15'.6''$; e quindi $LGM = 4°.44'.54''$.

L'espressione $\cos LGM(\tan KGM - \tan LGM)$ dà $\cos 4°.44'\ 54''(\tan 6° - \tan 4°.44'.54'')$; ma $\tan 6° = 0,10510$, $\tan 4°.44'.54'' = 0,08307$, e perciò $\tan 6° - \tan 4°.44'.54'' = 0,02203$; $\log.0,02203 = 8,34301$; $\log\cos 4°.44'.54'' = 9,99851$, e $\log\cos LGM(\tan KGM - \tan LGM) = 9,99851 + 8,34301 = 8,34152$.

Premesso ciò, la formola (44) darà il seguente calcolo

$\log V^2 (= 400^2)$	5,20412
$\log\cos LGM(\tan KGM - \tan LGM)$ . .	8,34152
com. log 4,904	9,30945
com. log c	6,87616
	9,73125, il n.° è
$\dfrac{2\,V^2\cos LGM(\tan KGM - \tan LGM)}{gc}$ . . .	0,5386
$+\frac{1}{4}$	0.25
	0,7886, il log. è
	9,89686 la metà, è
	9,94843, il n.° è
	0,8880
$-\frac{1}{2}$	0,5
	0.3880, il log. è
	9,58883
log c	3,12384
log x	2,71267

$x = 516^m$ circa,

ch'esprime la distanza GL fra la bocca G ed il sito L, ch'è la distanza di punto in bianco.

217. Le tre ultime formole applicate ai fatti diventano più semplici: essendo $KL = GL \cos LGM (\tan KGM - \tan LGM)$,

e $\tan KGL = \frac{\tan KGM - \tan LGM}{1 + \tan KGM \times \tan LGM}$ e perchè i cannoni ed

obici hanno piccole inclinazioni su i corrispondenti affusti, ne segue che gli angoli KGM, LGM sono piccolissimi, e quindi il prodotto delle loro tangenti sarà trascurabile rispetto l'unità. Ciò posto risulta, senza errore sensibile, $\tan KGL = \tan KGM - \tan LGM$: ma l'angolo LGM è anche piccolissimo, onde $\cos LGM = 1$, emerge $KL = GL \tan KGL$. Inoltre l'angolo KGL è eguale all'angolo di mira AFG (§. 18), sarà $KL = GL, \tan M$,

con ciò l'equazione (a) diventa $x^2 + cx = \frac{2cV^2 . \tan M}{g}$; dalla quale

$$V = \sqrt{\frac{g}{2\tan M}\left(\frac{x^2}{c} + x\right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (45)$$

$$\tan M = \frac{g}{2V^2}\left(\frac{x^2}{c} + x\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (46)$$

$$x = c\left[\sqrt{\left(\frac{2V^2 \tan M}{gc} + \frac{1}{4}\right)} - \frac{1}{2}\right] \quad . \; . \; . \; (47).$$

Per dimostrare che queste tre formole, le quali si possono anche ricavare dalle tre antecedenti direttamente giusto il valore assegnato KL, ci porgono risultamenti quasi eguali a quelli delle tre antecedenti, ci serviremo degli stessi esempii, cioè risolveremo la formola (45) con le condizioni di $x = 700^m$, ed $M = 1^\circ . 15' . 6''$, per conoscere la velocità iniziale V; e poscia risolveremo le altre due per avere $\tan M$ ed x.

Premesso ciò si avrà il calcolo seguente

$\log x^2 (=700^2)$ 5,79020
com. $\log c$. 6,87616

$\log \frac{x^2}{c}$ 2,66636

$\frac{x^2}{c}$ 463,8

x. 700

$\frac{x^2}{c}+x$. 1163,8

$\log\left(\frac{x^2}{c}+x\right)$ 3,06595

$\log 4,904 (=\frac{1}{2}g)$. 0,69055
com. $\log \tan M (=1^\circ.15'6'')$ 1,66056

5,41706, la metà è

$\log V$. 2,70853

$V=511^m,1$.

Il qual valore differisce da quello di V, trovato con la formola (42. §. 216) per $511^m,1-510^m,9=0^m,2$, quantità che nel valutare le velocità iniziali può trascurarsi.

Sia', come nell'esempio secondo (§. 216), $x=700^m$, $V=250^m$; si domanda quale dev'essere l'angolo di mira.

La formola da risolversi è la (46), per cui avremo il seguente calcolo

$\log x^2 (700^m)^2$ 5,79026
com. $\log c$ 6,87616

$\log \frac{x^2}{c}$ 2,66642

$\frac{x^2}{c}$. 463,8

x. 700

$\frac{x^2}{c}+x$ 1163,8

$$\log\left(\frac{x^2}{c}+x\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3{,}06595$$

$$\log 4{,}904\,(=\tfrac{1}{2}g) \ldots\ldots\ldots \quad 0{,}69055$$
$$\text{com.}\log V^2=(250)^2 \ldots\ldots\ldots \quad 5{,}20412$$
$$\log\tan M \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8{,}96062$$

$$M=5^\circ.13'.6'',$$

che indica l'angolo di mira, il quale differisce da quello rinvenuto antecedentemente per $5^\circ.13'.26''-5^\circ.13'.6''=20''$, differenza trascurabile. Infatti l'espressione dell'alzo positivo (§. 16)

$$H=l\tan M-(R-r),$$

si risolva prima nel caso di $M=5^\circ.13'.26''$, e poscia in quello di $M=5^\circ.13'.6''$. Si avrà

$$\log l\,(=3^m{,}184) \ldots\ldots\ldots \quad 0\ ,50297$$
$$\log\tan M\,(=5^\circ.13'.26'') \ldots \quad 8\ ,96107$$
$$\log l\tan M \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9\ ,46404$$
$$l\tan M \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 0\ ,29110$$
$$(R-r)\,(=0^m{,}01543) \ldots \quad 0\ ,01543$$
$$H=0^m{,}27567.$$

Inoltre
$$\log l=3^m{,}184) \ldots\ldots\ldots \quad 0\ ,50297$$
$$\log\tan M\,(5^\circ.13'.6'') \ldots\ldots \quad 8\ ,96062$$
$$\log l\tan M \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9\ ,46359$$
$$l\tan M \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 0\ ,29090$$
$$R-r \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 0\ ,01543$$
$$H=0^m{,}27547$$

il quale alzo differisce dal primo per $0^m{,}27567-0^m{,}27547=0^m{,}0002$, quantità che nelle applicazioni non può nemmeno assegnarsi.

Infine facendo nella formola (47) $V=400^m$, si deduce il punto in bianco naturale come segue

$\log V^2 (=400)^2$	5,20412	
$\log \tan M (=1^\circ.15'.6'')$	8,33943	
com. $\log 4,904 (=\frac{1}{2}g)$.	9,30945	
com. $\log c$	6,87616	
	9,72916	
$\frac{V^2 \tan M}{gc}$	0,5360	
$+\frac{1}{4}$	0,25	
	0,7860	, il log. è
	9,89542	, la metà è
	9,94771	, il n.° è
	0,8866	
$-\frac{1}{2}$	0,5	
	0,3866	, il log.
	9,58726	
$\log c$.	3,12384	
$\log x$.	2,71110	

$x = 514^m$.

Cioè, questo punto in bianco differisce da quello rinvenuto con una delle tre formole dell'antecedente paragrafo per $516^m - 514^m = 2^m$; e la lunghezza in più o in meno di due metri rende sempre certa la maniera di colpire ad una stabilita distanza, un regolare bersaglio.

Nei tre esempii del paragrafo antecedente si è dovuto tener conto della differenza di livello fra la bocca dell'arma e l'oggetto da colpire; essendo ciò indispensabile per la natura delle tre formole, che hanno somministrato i rispondenti risultamenti. Ma gli stessi esempii risoluti con le tre ultime formole, hanno dato a divedere che nella pratica del tiro di punto in bianco è inutile il tener conto della differenza di livello fra l'arma ed il bersaglio: perchè le prime formole danno risultamenti così diversi da quelli, che derivano dalle seconde, da non potersene apprezzare ne' fatti la differenza, sia nella velocità, sia negli alzi, o nella distanza de' punti in bianco. Su tal proposito il Lombard (M) così la ragiona in quanto alle formole ultime.

(M) Moto de' proietti §. 151 Lombard.

« Se in tutti i casi, che si sono presentati, non abbiamo
» parlato della situazione del bersaglio relativamente al livello
» della batteria, ciò è stato, perchè tale circostanza è del tutto
» inutile a considerarsi nel tiro del punto in bianco. Importa
» poco che l'oggetto da colpirsi, o il punto per cui si vuol
» far passare un proietto, sia al disopra, o al disotto di questo
» livello, che il pezzo sia o no inclinato all'orizzonte. Ciò
» niente cambia quanto all'effetto del tiro di punto in bianco.
» L'unico scopo di questa maniera di tirare è quello di diri-
» gere la linea di mira naturale, o artificiale dell'arma al punto
» che si vuol colpire, e perciò è sufficiente conoscerne la sola di-
» stanza, senza por mente alla sua situazione rispetto all'orizzonte ».

Facendosi poscia a ragionare de' valori ricavati negli esempii applicati alle prime, ed alle seconde formole, dice (N).

« Dato dunque a queste differenze il loro giusto valore, per
» ciò che riguarda la pratica del servizio, bisogna rimaner ben
» convinti, ch'esse non sono di alcun momento per la giu-
» stezza de' tiri, e che le medesime non ci debbono far per-
» dere il vantaggio di un calcolo semplicissimo per tener dietro
» alla inutile precisione di una 200ma parte nella velocità ini-
» ziale del proietto; di una 300ma parte nell'alzo, e di una
» 200ma parte nella portata: essendo questo un grado di esattezza,
» di cui le applicazioni non possono in conto alcuno giovarsi ».

218. Se negli esempii particolari per M, nella formola (16. §. 217) abbiamo un angolo tale da far risultare positivo il valore di H (§. 16), è segno evidente, che l'oggetto da colpire debba mirarsi con l'alzo positivo. Se poi risulta H eguale a zero, l'oggetto sarà colpito di punto in bianco naturale. Infine avendosi H negativo, converrà situare sulla tromba un alzo eguale ad H, e poscia mirare l'oggetto, o pure far uso della linea di mira naturale della bocca da fuoco, dirigendola disotto al bersaglio per la quantità (§. 17) $A = \frac{DH}{l}$.

(N) Moto de' proietti §. 155 Lombard.

TEORICA IX.

Metodo stabilito pel tiro di punto in bianco, paragonato con quello di Lombard.

219. Senza entrare in discussioni sulle formole antecedenti usate da Lombard per tutto ciò che riguarda il tiro di punto in bianco, faremo solamente vedere quali differenze si hanno ne' risultamenti, allorchè gli stessi dati sono sostituiti in esse formole, ed in quelle stabilite con l'altro metodo di sopra dichiarato.

Sia $V=462^m,6$, $m=1^\circ.15'.6''$; si domanda la distanza del punto in bianco naturale del pezzo da 24. Usando la formola (47. §. 217), con tali dati si ha il seguente calcolo

$\log V^2 (=462,6)^2$	5,33042	
$\log \tan M (=1^\circ.15'6'')$.	8,33943	
com. $\log 4,904 (=\frac{1}{2}g)$.	9,30945	
com. $\log c$.	6,87616	
	9,85546,	il n.° è
	0,7169	
$+\frac{1}{4}$.	0,25	
	0,9669 ,	il log. è
	9,98538,	la metà è
	9,99269,	il n.° è
	0,9833	
$-\frac{1}{2}$.	0,5	
	0,4833 ,	il log. è
	9,68422	
$\log c$.	3,12384	
$\log x$.	2,80806	

$x=643^m$.

Ma con gli stessi dati la formola (18. §. 199) ha dato $x=667^m$, perciò la differenza è di 24^m. Si osservi, che la differenza di 24^m nella portata di punto in bianco naturale non farà certamente fallare il tiro diretto contro un bersaglio di una

certa grandezza, quantunque non si colpisca nel centro al quale si è mirato, perciocchè le ordinate delle due curve differiranno per una piccolissima lunghezza.

220. Sia $x=1000^m$, $V=361^m$: si vuol conoscere l'angolo di mira del detto pezzo con la formola (46. §. 217). Dunque

$$\log.x^2(=1000^2) \ldots\ldots\ldots 6,00000$$
$$\text{com.log.}c \ldots\ldots\ldots\ldots 6,87616$$
$$\log.\frac{x^2}{c} \ldots\ldots\ldots\ldots 2,87616$$
$$\frac{x^2}{c} \ldots\ldots\ldots\ldots 751,9$$
$$x \ldots\ldots\ldots\ldots 1000$$
$$\frac{x^2}{c}+x \ldots\ldots\ldots\ldots 1751,9$$
$$\log\left(\frac{x^2}{c}+x\right) \ldots\ldots\ldots\ldots 3,24353$$
$$\log.4,904\left(=\tfrac{1}{2}g\right) \ldots\ldots\ldots\ldots 0,69055$$
$$\text{com.log.}V^2(=361^2) \ldots\ldots\ldots\ldots 4,88498$$
$$\log.\tan.M \ldots\ldots\ldots\ldots 8,81906$$
$$M=3^\circ 46'.18''$$

Gli stessi dati han fatto risultare $m=3^\circ.48'$(§. 110) con la formola (35. §. 209); la differenza dunque è di $1'.42''$, quantità trascurabile.

221. Sia $M=2^\circ, x=1000^m$; si domanda la velocità iniziale del proietto da 24 mediante la formola (45. §. 217). Avremo

$$\log.x^2(=1000^2) \ldots\ldots\ldots\ldots 6,00000$$
$$\text{com.log.}c \ldots\ldots\ldots\ldots 6,87616$$
$$\log.\frac{x^2}{c} \ldots\ldots\ldots\ldots 1,87616$$
$$\frac{x^2}{c} \ldots\ldots\ldots\ldots 751,9$$
$$x \ldots\ldots\ldots\ldots 10000$$
$$\frac{x^2}{c}+x \ldots\ldots\ldots\ldots 1751,9$$

$\log.\left(\frac{x^2}{c}+x\right)$	3,24353
$\log.4,904(=\frac{1}{2}g)$.	0,69055
com.log.tan.$M(=2^\circ)$.	1,45692
	5,39100
$\log V$.	2,69550

$V=496^m$

Poichè la formola (38. §. 210) dà $V=498^m$ (§. 112), la differenza di 2^m può trascurarsi.

222. Infine sia $M=3^\circ, V=361^m$, si domanda la distanza del punto in bianco artificiale del pezzo da 24, mercè la risoluzione della formola (47. § 217). Adunque

$\log.V^2(=361^2)$	5,11502	
$\log.\tan.M(=3^\circ)$.	8,71940	
com.$\log.4.904(=\frac{1}{2}g)$.	9,30945	
com.$\log.c$.	6,87616	
	0,02003	il n.° è
	1,047	circa
$+\frac{1}{4}$.	0,25	
	1,297	, il log. è
	0,11294	, la metà
	0,05647	, il n.° è
	1,139	
$-\frac{1}{2}$.	0,5	
	0,639	, il log. è
	0,80550	
$\log.c$.	3,12384	
$\log.x$	2,92934	

$x=849^m$. circa.

Or la formola (39. §. 210) dà $x=844^m$ (§. 213); dunque la differenza è di 5^m, che può trascurarsi nella pratica.

Dal fin qui detto si può stabilire che le formole di Lombard presentano gli stessi risultamenti delle altre dichiarate da noi

antecedentemente (§§. 209. 210) intorno alla teorica del punto in bianco, purchè nelle prime i coefficienti della resistenza dell'aria siano quelli inseriti nella Tavola XV (§. 59), in cui $k=0,9$ (§. 59), e non già $k=\frac{2}{3}=0,6$ come si è stabilito dal detto autore sull'esempio di Borda. Ciò vale a dire che il metodo di Lombard in quanto alle formole generali condurrebbe a risultamenti giusti purchè nel valore di

$$c=\frac{4aD}{3k}, \text{ } k \text{ si faccia } =0,9.$$

Nella pratica dunque in vece di far uso delle formole dei §§. 209. 210 alquanto complicate, si potrebbero usare le corrispondenti più semplici notate nel §. 217; perchè si è osservato, che i risultamenti delle une si accordano quasi perfettamente con quelli delle altre, e le differenze sono sì tenui da poterle trascurare nelle applicazioni come minori assai degli errori che inevitabilmente si commettono nei fatti.

TAVOLA XXXVI.

Risultamenti rinvenuti con i due metodi.

	FORMOLE.	DATI.	RISULTAMENTI	
DI LOMBARD.	$x=c\left[\sqrt{\left(\frac{2V^2\tan.M}{gc}+\frac{1}{4}\right)}-\frac{1}{2}\right]$	$V=462^m,6$ $m=1^o.15'.6''$	$x=643^m$	Portata di punto in bianco naturale
	$\tan M=\frac{g}{2V^2}\left(\frac{x^2}{c}+x\right)$	$V=361^m$ $x=1000^m$	$M=3^o$ $46'.18''$	
	$x=c\left[\sqrt{\left(\frac{2V^2\tan.M}{gc}+\frac{1}{4}\right)}-\frac{1}{2}\right]$	$V=361^m$ $M=3^o$	$x=844^m$	Portata di punto in bianco artificiale.
	$V=\sqrt{\frac{g}{2\tan M}\left(\frac{x^2}{c}+x\right)}$	$M=2^o$ $x=1000^m$	$V=496^m,1$	
STABILITE.	$1+h.\text{sen}.2m=\frac{e^{\frac{X}{}}-1}{X}$	$V=462^m,6$ $m=1^o.15'.6''$	$X=667^m$	Portata di punto in bianco naturale.
	$\text{sen}.2m=\frac{\text{sen}(s-45^o)}{h\cos 45^o.\cos s}$	$V=361^m$ $X=1000^m$	$m=3^o.48'$	
	$1+h.\text{sen}2m.=\frac{e^{\frac{X}{}}-1}{X}$	$V=361^m$ $m=3^o$	$X=849^m$	Portata di punto in bianco artificiale.
	$h=\frac{\text{sen}(s-45^o)}{\text{sen}.2m.\cos 45^o.\cos s}$	$m=2^o$ $x=1000^m$	$V=498^m$	

L'esempio del §. 207 risoluto con le formole (30. 32. §. 207), mediante i dati ricavati dagli sperimenti di Lombard. ci fa conoscere, che le velocità presentate da questo autore nelle sue tavole del tiro, sono vere, e perciò di quelle possiamo giovarci nelle applicazioni. E quantunque tali velocità siano state valutate con la ipotesi di $k=\frac{3}{2}$, pure si accordano con i risultamenti della formola (30. §. 207), nella quale si è fatto $k=0,9$; nè ciò deve far maraviglia, poichè Persy dice: il metodo di Lombard per la ricerca delle velocità iniziali esser tale che ci sono errori in più ed in meno, i quali scambievolmente si compensano, ed i risultamenti non essere in conseguenza discosti dai veri. Sul medesimo subbietto d'Obenhéim, nella introduzione al suo corso di balistica, si esprime in questi termini....

« ..... Del resto ci ha nel metodo di Lombard compensa-
» zioni di errori, le quali permettono di tenere le velocità,
» che egli ha ottenute, come prossimissime alle vere. Che se
» le velocità iniziali ei le avesse conosciute direttamente, i
» suoi sperimenti l'avrebbero condotto a determinare il fattore
» della resistenza dell'aria con molta precisione ».

TEORICA X.

Tiro a rimbalzo.

223. Nel §. 23 abbiamo cennato le condizioni in generale che si richieggono, perchè si producano rimbalzi con i proietti scagliati dalle bocche da fuoco considerando il moto come se avesse luogo nel vôto. Ed affinchè le applicazioni siano dirette a guidare i tiri a rimbalzo nel mezzo resistente, noi tratteremo le analoghe formole per avere efficacissimi effetti. Intanto gli svariati e continui sperimenti han dato a conoscere, che vi sono tali angoli d'incidenza da formare i limiti, al di là de'quali i proietti non possono rialzarsi per produrre risalti. Sull'acqua,

per esempio, questo limite è di 4 in 5°; su di un terrapieno di mezzana consistenza è di 9 in 10°, e sul murato da 36 in 38°. È facile d'altronde il comprendere che i piccoli angoli di incidenza, ad eguali condizioni, cui si sottopongono le armi, favoriscono i rimbalzi.

(*Fig. 8*). Sia la traiettoria *AMCH*, la quale passando tangenzialmente pel sopracciglio *C*, incontri il terrapieno *RO* della opera da battere di rimbalzo. E poichè l'altezza $CR=2^m,27388$ (=piedi $7\frac{1}{2}$), e l'angolo d'incidenza non potendo eccedere i 10°, è facile determinare la distanza *RH* dal parapetto alla prima caduta del mobile, per la considerazione che la parte *CH* della curva può, senza errore sensibile, confondersi con la sua corda. Per la qual cosa il triangolo rettangolo *CRH* dà

$$RH : RC :: 1 : \tan RHC, \text{ ed}$$

$$RH=\frac{RC}{\tan RHC}=\frac{2^m,27388}{\tan.10^\circ};\ \log.2^m,27388+\text{com.log.tan.}10^\circ=$$

$0,35676+0,75368=1,11044$; ed $RH=13^m$circa (=piedi 40). Se dunque un proietto, sfiorando la cresta *C* dell'opera esposta al rimbalzo, cada nell'intervallo *RH* del terrapieno, non potrà produrre alcun rimbalzo.

Supponiamo essere la lunghezza della $RO=116^m,4$ (=tese 60), quanto è la faccia di un bastione secondo il sistema di Cormontaingne; e sia *GO* un tale arco della traiettoria da far risultare l'angolo *GOR* di 10°. Si prolunghi la retta *RC* in *G*, e si avrà

$$OR : RG :: 1 : \tan.10^\circ;$$

$$RG=OR\tan.10^\circ;$$

$$\log.RG=\log.OR+\log.\tan.10^\circ=2,06595+9,24632=1,31227.$$

$$RG=20^m,5.$$

Cioè a dire, che se ai salienti delle opere di fortificazione si ponessero berrette di terra, come accenna Carnôt (O), i proietti di artiglieria caderebbero bensì nei terrapieni, ma non

(O) Carnôt. Défense des Places.

produrrebbero risalti. Nel caso poi che il bastione fosse del detto sistema, l'altezza di una tale berretta dovrebbe essere di $20^m,5$. Per le altre opere in generale quest'altezza è subordinata all'angolo di 10°, ed alla lunghezza del terrapieno.

224. (*Fig. 8*). Vogliasi percuotere di rimbalzo il terrapieno *RO* in modo che la prima caduta del mobile sia in *a*. Esprima la orizzontale Ax l'asse delle ascisse, ed Ay quello delle ordinate; e il punto *S* sia il centro degli orecchioni, intorno ai quali si esegue la rotazione della bocca da fuoco.

Le formole (32. 30. §. 207) sono quelle da adoperarsi, poichè la prima dà l'angolo di proiezione, e la seconda la velocità iniziale. I valori di s,δ e di s',δ' sono dati in funzione delle coordinate AB,BC, ed Ab,ba, del sopracciglio e del punto di caduta, le quali si debbono misurare o conoscere dalle osservazioni, con tener presente che $y=CB$ altezza del sopracciglio del parapetto, $AB=x$ ascissa corrispondente, come pure $y'=ab=CB-CR=y-2^m,27388$ ed $Ab=x'=AB+Ra=x+Ra$.

Per fare un'applicazione, nella ipotesi del pezzo da 24, sia $x=400^m y=15^m, Ra=20^m$, sarà $y'=15^m-2^m,274$, ed $x'=400^m+20^m=420^m$.

Da questi dati si avranno i seguenti calcoli preparatorii

$$\tan\delta=\frac{y}{x}=\frac{15}{400}=0,0375,\ \tan\delta'=\frac{y'}{x'}=\frac{12,726}{420}=0,0303$$

$$x=\frac{400}{\frac{c}{2}},\ \log x=\log.800+\text{com}.\log c=2,90309+6,87646=$$

$9,77925$, $x=0,6015$.

Così $\log x'=2,92428$, $x'=0,6316$: $\tan s=\frac{e^x-1}{x}=$

$$\frac{2,71828^{0,6015}-1}{0,6015}=1,371,\ \tan s-1=0,371:$$

$$\tan s'=\frac{e^{x'}-1}{x'}=\frac{2,71828^{0,6316}-1}{0,6316}=1,393,\ \tan s'-1=0,393:$$

$\log.\tan\delta.(\tan s'-1)=\log.\tan\delta+\log(\tan s'-1)=8,57403+9,59439=8,16842$, $\tan\delta(\tan s'-1)=0,01474$,
$\log.\tan\delta'(\tan s-1)=\log.\tan\delta'+\log(\tan s-1)=8,48144+9,56937=8,05081$, $\tan\delta'(\tan s-1)=0,01124$.

Percui la formola (32. §. 207) diventa

$\tan\alpha=\frac{0,01474-0,01124}{1,393-1,371}=\frac{0,0035}{0,022}$, e $\log.\tan\alpha=\log.0,0035+$ com.$\log.0,022=9,20165$, $\alpha=9°.3'$circa, che sarà l'angolo di elevazione da darsi al pezzo da 24 affine di produrre rimbalzi.

225. Per la velocità iniziale, la formola (30. §. 207) dà

$h=\frac{1,393-1,371}{2.\cos^2.9°.3'\times0,0072}=\frac{0,022}{2.\cos^2.9°.3'\times0,0072}$, $\log.h=$ $\log.0,022+$com.$\log.2+$com.$\log.\cos^2.9°.3'+$com.$\log.0,0072=8,34242+9,69897+0,01084+2,14267=0,19490$; e $\log.V^2=\log.h+\log.c+\log.g=0,19490+3,12384+0,99162=4,31036$, $\log.V=2,15518$, $V=143^m$ (=440 piedi circa), che esprimerà la velocità iniziale con la quale si deve scagliare il proietto per rimbalzare più volte sul terrapieno.

226. Ma essendo (§. 18) $m=\alpha-\delta$, e perchè $\delta=2°.9'$, risulta $m=9°.3'-2°.9'=6°.54'$, ch'è l'angolo di mira artificiale da darsi al pezzo da 24. Ne deriva quindi che tanto è lo elevare l'asse dell'arma per $9°.3'$, quanto il mirare al sopracciglio del parapetto con un angolo di mira artificiale di $6°.54'$. E sostituendo perciò nella formola (37. §. 210) per m questo valore, avremo

$H=l\tan6°.54'-(R-r)$; ma $\log l+\log\tan6°.54'=0,50297+9,08283=9,58580$, $l\tan6°.54'=0^m,38530$, ed $H=0^m,38530-0,01543=0^m,37987$ (=pol. 13).

Adunque ponendo perpendicolarmente sulla fascialta di culatta un alzo eguale al valore di H, e dirigendo al sopracciglio la rispondente linea di mira, si otterrà nello sparo il rimbalzo con le condizioni stabilite.

227. L'angolo di caduta CaR si potrà, senza errore notabile,

valutare con la risoluzione del triangolo CaR, in cui i cateti aR ed RC sono assegnati. Dunque

$$aR : CR :: 1 : \tan CaR ;$$

ed in numeri

$20^m : 2^m,27388 :: 1 : \tan CaR = \frac{2,27388}{20}$; $\log \tan CaR = \log 2,27388 +$ com. $\log 20 = 0,35676 + 8,69897 = 9,05573$, $CaR = 6^\circ.29'$.

Per ottenere il valore dell'angolo di caduta con più esattezza, dal §. 200 si ha la formola (m): nella quale, sostituendo per h, α, ed x i valori, cioè $\log h = 0,19490$, di $x = 0,6316$, e di $\alpha = 9^\circ.3'$, cambiando il segno a $\frac{dy}{dx}$, perchè il punto che si considera della traiettoria è nel ramo discendente (§. 188), si avrà il valore di $\frac{dy}{dx} = \tan \varepsilon$ in cui ε differirà di poco da $6^\circ.29'$.

228. Per conoscere la velocità con la quale il proietto percuote il terrapieno, si fa uso della formola (23. §. 202), nella quale $\alpha = 9^\circ.3'$, $\varepsilon = 6^\circ.29'$, $\log h = 0,19490$, ed $x = 0,6316$: quindi si avrà il seguente quadro del calcolo

$\log h$.	0,19490
$\log \cos^2 9^\circ.3'$.	9,98912
com. $\log \cos^2 6^\circ.29'$	0,00558
com. $\log e^{-x}$.	9,72570
$\log h'$.	9,91530.

Inoltre

$\log h'$.	9,91530
$\log c$.	3,12384
$\log g$.	0,99162
	4,03076
$\log V'$.	2,01538

$V' = 103^m$ ($= 316$ piedi circa),

che è la velocità di percossa.

Riepilogando ora i risultamenti de' calcoli, mediante le condizioni seguenti:

Distanza fra la batteria e l'opera da percuotersi.	400^m
Differenza di livello.	15^m
Distanza dal parapetto al punto da percuotersi. .	20^m

Si avrà

Velocità iniziale.	143^m
Angolo di elevazione	$9°.3'$
Angolo sotto del quale è veduta la cresta . . .	$2°.9'$
Angolo di mira artificiale	$6°.54'$
Alzo corrispondente.	$0^m,37987$
Angolo di caduta.	$6°.29'$
Velocità residua	103^m.

Variando poi i dati, altre saranno le incognite da conoscersi, giovandoci delle formole di cui abbiamo fatto uso nell'esempio recato. Intanto gli svolgimenti de' calcoli suddetti possono servire di esemplare pei casi simili, qualunque siano le bocche da fuoco che si vogliono adoperare.

A tutto quello che abbiamo detto è necessario aggiungere, che se nel trovare l'angolo di elevazione con la formola, ne risultasse uno maggiore del massimo, col quale l'arma può elevarsi sul proprio affusto, bisognerebbe allontanare convenevolmente la batteria fino a che l'angolo calcolato venisse non maggiore del citato massimo.

229. Si è detto che necessaria condizione pel tiro a rimbalzo si è che la cresta del parapetto si trovi nel ramo discendente della traiettoria (§. 23). Ma per avere il tiro più rasente, si può aggiungere anche la condizione, che essa cresta si trovi nel vertice della curva, senza però pretendere che il mobile cada ad una distanza assegnata dal parapetto; perchè in caso contrario il problema sarebbe più che determinato.

Ciò premesso le formole da risolversi saranno le (t. §. 208) e (34. §. 208).

(*Fig. 8*). Siano, come sopra $x=400^m, y=15^m$, le coordinate al punto C, e si voglia far uso del pezzo da 24.

Si conviene prima preparare i dati per inserirli nelle citate formole. Infatti dai risultati antecedenti si ha, $x=0,6015, \delta=2^\circ.9'$, $\tan s=1,393$, da cui $s=53^\circ.54'$, la formola (*t.* §. 208) dà

$$\tan\beta=\frac{\operatorname{sen}(53^\circ.54'-45^\circ)}{0,6015\operatorname{sen}53^\circ.54'\cos 45^\circ}=\frac{\operatorname{sen}8^\circ.54'}{0,6015\operatorname{sen}53^\circ.54'\cos 45^\circ};$$ e però

log. sen 8°.54'	9,18952
com. log. 0,6015	0,22076
com. log. sen 53°.54'	0,09259
com. log. cos. 45°	0,15051
log. tan β	9,65338

$$\beta=24^\circ.14'.$$

La formola (34. §. 208) viene

$$\tan\alpha=\frac{\tan 2^\circ.9'\cos 24^\circ.14'\cos 45^\circ}{\operatorname{sen}(45^\circ-24^\circ.14')}=\frac{\tan 2^\circ.9'\cos 24^\circ.14'\cos 45^\circ}{\operatorname{sen}20^\circ.46'}.$$

Ed operando al solito coi logaritmi, si avrà il seguente calcolo

log. tan 2°.9'	8,57425
log. cos 24°.14'	9,95994
log. cos 45°	8,84949
com. log. sen 20°.46'	0,45031
log. tan α	8,83426

$$\alpha=3^\circ.54' \text{ circa.}$$

L'altra (33. §. 208) ci somministra il calcolo che segue

$$h=\frac{0,6015\tan 53^\circ.54'}{\operatorname{sen}7^\circ.48'},$$

log. 0,6015	9,77924
log. tan 53°.54'	0,13715
com. log. 7°.48'	0,86737
log h.	0,78376 :

e quindi

log. h	0,78376
log. c	3,12384
log. g	0,99162
log. V^2.	4,89922
log. V	2,48961

$V = 308^m$ (=944 piedi circa).

Questo valore di V nell'esempio recato dovrà riputarsi il massimo; perciocchè l'uso di una velocità maggiore, farebbe sì, che la cresta del parapetto cadrebbe nel ramo ascendente; il che si oppone alle condizioni stabilite pel tiro a rimbalzo.

230. Per conoscere la distanza, che è dal parapetto al punto di caduta nel terrapieno, ossia la RH, conviene nella formola (17. §. 199) porre per y il valore di $HD = BR = CB - CR = 15^m - 2^m,27388 = 12^m,72612$, il quale numero valutato con l'unità di misura lineare $\frac{c}{2}$, dà $\log y = 8,28188$ circa; per α porre $3°.54'$, e per h quel numero il cui logaritmo è 0,78376.

Liberando la equazione da fratti e riducendo, si otterrà

$2hy\cos^2\alpha - 1 = (h \operatorname{sen} 2\alpha + 1)\, x - e^x$: quindi

log. 2	0,30103
log. h	0,78376
log. y	8,28188
log. $\cos^2 3°.54'$.	9,99798
	9,36465, il n.° è circa
	0,23150, perciò

$2hy\cos^2\alpha - 1 = -0,76850$ di più

log. h	0,78376
log. sen $7°.48'$.	9,13263, il n.° è
	0,8249 , ed
$1 + h \operatorname{sen} 2\alpha$.	1,8249

Sostituendo risulta $e^x - 1,8249\, x = 0,76850$.

Per conoscere la x applichiamo il metodo della falsa posizione. Sia $x=0,8$, si avrà

$\log e^x=0,8\times0,43429=0,347432$, $e^x=2,2255$. L'errore dunque sarà $0,76558-0,76850=-0,00292$, perchè $2,2255-0,8\times1,8249=76558$.

Similmente facendo $x=0,81$, ne emerge

$\log e^x=0,35177$, ed $e^x=2,247800$; e $2,247800-0,81\times1,8249=0,769631$; l'errore adunque verrà $0,769631-0,7685=+0,001131$.

Ed il quadro della regola sarà il seguente:

$$\begin{array}{rl} & 0,8 \qquad\qquad 0,81 \\ & -0,00292\times+0,001131 \\ 0,00292\times0,81 & =0,0023652 \\ 0,001131\times0,8 & =0,0009048 \\ \hline & \quad 0,0032700 \end{array}$$

; per la qual cosa

$$x=\frac{0,0032700}{0,00292+0,001131}=\frac{0,0032700}{0,004051}=0,8072.$$

Ma l'ascissa al vertice della curva, o alla cresta del parapetto è $0,6015$, dunque $RH=0,8072-0,6015=0,2057$. Questo valore, ridotto in metri con riferirlo all'unità $\frac{c}{2}$, risulta $\log RH=\log.0,2057+\log.c+\text{com}.\log 2=2,13604$, ed $RH=136^m$.

Dopo di ciò si può stabilire, che se il terrapieno da percuotersi con rimbalzo fosse più lungo di 136^m, il punto di caduta sarebbe in esso; al contrario il rimbalzo si effettuirebbe altrove, ed il tiro sarebbe d'infilata per tutta la faccia; perciocchè la traiettoria, quantunque non percuota il terreno, è sì poco arcata da scavalcare di primo lancio le artiglierie, ed ucciderne i difenditori.

Le altre incognite, inerenti al presente quesito, si troveranno con calcoli simili a quelli eseguiti antecedentemente.

Allorchè da un dato sito si voglia battere di rimbalzo una

fortificazione qualunque sia, bisogna stabilire come si è fatto antecedentemente (§. 223) la distanza tra il più vicino punto di caduta e il parapetto. Poscia con questo dato, e gli altri che bisogna prendere col fatto sul terreno, si calcolerà la velocità iniziale la quale dovrà stabilirsi come la minima appartenente a quella tale stazione.

Oltre a questo, nello stabilire la condizione, che la cresta del parapetto si trovi nel vertice della traiettoria, si verrà a ricavare tale velocità iniziale da riguardarsi come la massima per la stazione della batteria. Per le quali cose, tutte le velocità intermedie fra la minima e la massima, produrranno il tiro a rimbalzo o d'infilata. E siccome per ogni velocità corrisponde un angolo di mira particolare, così ci sarà pure una serie di alzi per le dette velocità, da produrre il tiro a rimbalzo o d'infilata.

Se poi fosse assolutamente necessario di percuotere il terrapieno fra due dati siti, converrà prenderne o conoscerne le rispettive distanze dal parapetto, e così stabilire i valori di x, x', y ed y' da farne uso nelle formole a fine di valutare le due velocità iniziali tali, che il proietto possa percuotere i detti punti. Ed usando le velocità intermedie, ed i corrispondenti alzi, si possa bersagliare con efficacia lo spazio stabilito.

TEORICA XI.

Tiro a rimbalzo.

METODO DI LOMBARD.

231. Nella precedente teorica si è detto che mirando al sopracciglio del parapetto di punto in bianco, e subordinando antecedentemente la traiettoria a passare per due punti, si effettuava con efficacia il tiro a rimbalzo o d'infilata. Ciò vuol dire, che nelle formole a tal uopo usate è inclusa la condi-

zione, che il proietto, sfiorando la cresta del parapetto presa come bersaglio, si trovi nel ramo discendente della curva. Che se ci avvisassimo di far uso delle formole del punto in bianco (§. 216 e seguenti), senza altra condizione, potremmo essere indotti in errore; vale a dire che il mobile possa sfiorare il parapetto nel sopracciglio senza la certezza, che dopo un tal sito si trovi nel ramo discendente; poichè le citate formole non esprimono nè la salita nè la discesa de'mobili che partono dalle bocche da fuoco. Ma se si rinvengano le velocità iniziali con la condizione, che il proietto si trovi nel ramo discendente toccando il sopracciglio, le dette formole si rendono adattate al bisogno.

La sperienza ha fatto conoscere, che un mobile scagliato da un'arma situata a 292^m ($=150$ tese) da un'opera di fortificazione qualunque, impiega $2''$ per percorrere una tale lunghezza, e si trova nel ramo discendente della curva, che descrive, prima di oltrepassare il sopracciglio. Ci mette poi $2''\frac{1}{3}$ allorquando la distanza è di 390^m($=200$ tese), $2''\frac{2}{3}$ quando la distanza diventa 487^m ($=250$ tese), ed infine impiega $3''$ pel tragitto di 585^m ($=300$ tese).

Ciò premesso, supponiamo che un pezzo da 24 si trovi distante 400^m($=205$ tese), da una fortificazione; e si vogliano i dati per eseguire il tiro a rimbalzo.

Nella formola (41. §. 215) si rinviene il valore di V con la condizione di $t=2''\frac{1}{3}$, e col dato di $\varpi=400^m$, perciò avremo il seguente calcolo

$$V=\frac{c}{2''\frac{1}{3}}\left(2{,}71828^{\frac{400}{c}}-1\right);\ \text{e quindi}\ \log 2{,}71828^{\frac{400}{c}}=$$

$$400\times\frac{1}{c}\times 0{,}43429,\ \text{ma}\ \log\frac{1}{c}\times 0{,}43429=6{,}51395$$

(Tav. XV. §. 59); percui $\log\left(\log 2{,}71828^{\frac{400}{c}}\right)=2{,}60206+$

$$6,51395 = 9,11601 \; ; \; \text{e} \; \log 2,71828^{\frac{400}{c}} = 0,13060 \; , \; \text{ossia}$$

$$2,71828^{\frac{400}{c}} = 1,351 \; ; \; \text{e quindi}$$

$$V = \frac{c}{2''\frac{1}{3}}\left(1,351 - 1\right) = \frac{c}{2''\frac{1}{3}} \times 0,351 = \frac{3c}{7} \times 0,3517 \; , \; \text{e}$$

$\log 3$	0,47712
$\log c$	3,12384
com. $\log 7$	9,15490
$\log . 0,351$	9,54531
$\log V$	2,30117

$$V = 200^{m} \, ,$$

che sarà la velocità iniziale compresa fra la massima e la minima di quelle di cui si è tenuto ragionamento (§. 230). Gli esempii de' §§. 228.229 ne porgono una pruova.

L'alzo da calcolarsi dipenderà dalla formola corrispondente trattata come sopra (§. 217).

Per conchiudere quanto si è dichiarato dobbiamo dire, che la teorica del tiro a rimbalzo stabilita da Lombard è utilissima nelle applicazioni, non solo perchè le formole corrispondenti danno velocità iniziali comprese fra le massime e le minime, alle quali è subordinato il tiro a rimbalzo e d'infilata (§. 230), ma ancora perchè il loro uso è sanzionato dagli utili effetti che ne' poligoni continuamente si osservano (Q). Ma il solo coefficiente della resistenza dell'aria va modificato, come altrove si è detto.

Chi fosse desideroso di altri minuti particolari potrebbe consultare la egregia opera del citato Lombard, intorno al moto de' proietti; applicato al tiro delle bocche da fuoco.

(Q) Lyautey. Mémorial de l'artillerie pag. 35. n.° 11.

TEORICA XII.

Tiro con angoli qualunque di proiezione, supponendo costante la densità dell'aria.

232. Nel §. 189 abbiamo esposto il metodo del descrivere la traiettoria per assegnazione di punti, e la maniera con cui rinvenire le altre condizioni del moto de' corpi proiettati con angoli qualunque d'inclinazione. Quantunque le approssimazioni si possano in questo subbietto spingere tant'oltre da non lasciar niente a desiderare per le applicazioni, pure Legendre ha indicato il modo onde ottenere risultamenti più esatti, con lo stabilire le verità, che qui verremo esponendo.

(*Fig.* 38). Sia ACF una traiettoria nel mezzo resistente, BQ, CP due tangenti consecutive, le quali facciano gli angoli $BQx = \varepsilon$, $CPx = \varepsilon'$ con l'asse delle x. L'arco BC si può considerare sensibilmente come un arco di una circonferenza, determinato dalle tangenti prossime BR, RC. Da B e C si conducano le normali BO, CO, e si ponga l'angolo $BOC = 2\gamma$: si descriva l'arco mn col raggio Om eguale a quello delle tavole trigonometriche, e si meni la BN parallela ad RE.

Essendo l'angolo $DBN = DRE = RBC + RCB$ sarà $2RBC = \varepsilon - \varepsilon'$; ma $\frac{1}{2}BOC = RBC$, dunque $\gamma = \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{2}$.

Inoltre $CBM = DBM - DBC + \varepsilon - \gamma$; e si ha pure

$$2\gamma : BC :: 1 : OB = \tfrac{1}{2}.\frac{BC}{\gamma}\text{; come ancora}$$

$$1 : OB :: \text{corda}\, mn : \text{corda}\, BC\text{, in simboli}$$

$$1 : \tfrac{1}{2}.\frac{DS}{\gamma} :: 2\,\text{sen.}\,\gamma : \text{corda}\, BC = Ds.\frac{\text{sen}\,\gamma}{\gamma}\text{, o pure}$$

corda BC : corda mn :: arco BC : arco mn, in simboli arco BC : $2\text{sen}\gamma$ :: $Ds : 2\gamma$, corda $BC = Ds\frac{\text{sen}\cdot\gamma}{\gamma}$; in conseguenza $BM =$ corda BC

$\cos CBM$, $CM = \text{corda}\, BC \operatorname{sen} CBM$, che indicheranno le proiezioni dell' arco BC negli assi coordinati. Ritenendo i simboli stabiliti, si avrà $Dx = Ds.\frac{\operatorname{sen}.\gamma}{\gamma}\cos(\varepsilon - \gamma)$, $Dy = Ds.\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\gamma}$ $\operatorname{sen}(\varepsilon - \gamma)$.

Pel ramo discendente, l'espressione $\varepsilon - \gamma$ si converte in $\varepsilon + \gamma$.

233. Sia un proietto gettato con l'angolo di $\alpha = 45°$, e con tale velocità da essere $h = 10$; cioè a dire, prendendo $\frac{c}{2}$ come unità lineare. Si consideri l'elemento Ds dell' arco compreso fra $\varepsilon = 35°$ e $\varepsilon' = 30°$, ed avremo $\gamma = \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{2} = 2°,5$.

E perchè dalle serie generalmente si ha

$\operatorname{sen}.\gamma = \gamma - \frac{\gamma^3}{1.2.3} + \frac{\gamma^5}{1.2.3.4.5} - \text{ec.}$, si otterrà $\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\gamma} =$ $1 - \frac{\gamma^2}{1.2.3} + \frac{\gamma^4}{1.2.3.4.5} - \text{ec.}$; nel nostro caso γ essendo molto piccolo, si potrà stabilire senza errore sensibile $\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\gamma} = 1 - \frac{\gamma^2}{6}$.

La svolta dell' arco $\gamma = 2° \frac{1}{2}$ si ha dalla proporzione

$$360° : 2° \tfrac{1}{2} :: 6,28318 : \gamma, \text{ ossia}$$

$$72 : 1 :: 3,1415926 : \gamma = \frac{3,1415926}{72} = 0,04363 = 0,4 = \tfrac{1}{25} \text{ circa ed}$$

$$1 - \frac{\gamma^2}{2.3} = 1 - \frac{1}{3750} = \frac{3749}{3750}$$

Nella formola (11. §. 187) facendo $\frac{c}{2} = 1$, si ha

$$s = 2,30258 \log. \frac{V^2.\cos^2\alpha}{2g}(C - P); \text{ ma } h = \frac{V^2}{2g}, \text{ dunque}$$

$$s = 2,30258 \log. 10.\cos^2.45°(C - P); \text{ e}$$
$$s' = 2,30258 \log. 10.\cos^2.45.(C - P'); \text{ la differenza è}$$

$$Ds = s' - s = 2,30258 \log. \frac{C - P'}{C - P};$$

nella quale è da farsi (§. 187) $C = \tan.45^\circ \sqrt{1+\tan^2.45^\circ}. +$ $\log.\text{ip}\left(\tan.45^\circ + \sqrt{1+\tan.45^\circ}\right) + \frac{1}{10.\cos^2.45}$; ma $\frac{1}{10.\cos^2.45} = 0,2$;

in conseguenza per la tavola XXXIII (§. 189) si ha
$C = 0,2 + 2,29557$, $P = 1,50763$; e $C - P = 0,98794$.

Similmente $C - P' = 1,27960$, e $\log. \frac{C-P'}{C-P} = \log \frac{1,27960}{0,98794} =$

$0,10707 + 0,00526 = 0,11233$; e perciò $Ds = 2,30258 \times 0,11233$, $\log. Ds = 0,36221 + 9,05054 = 9,41275$, e $Ds = 0,25867$; da ciò

$$Dx = 0,25867 \times \frac{\text{sen}.2^\circ,5}{2^\circ,5} \cos(35^\circ - 2^\circ,5) =$$

$$0,25867 \times \frac{3749}{3750} \cos.32^\circ,5;$$

$\log.0,25867$	9,41275
$\log.\frac{3749}{3750}$	9,99989
$\log.\cos(32^\circ,5)$	9,92603
$\log.Dx$	9,33867

$$Dx = 0,2180925.$$

Così pure

$$Dy = 0,25867 \times \frac{3749}{3750} \text{sen}(32^\circ,5), \text{ e}$$

$\log.0,25867$	9,41275
$\log.\frac{3749}{3750}$	9,99989
$\log.\text{sen}(32^\circ,5)$	9,73022
$\log.\ Dy$	9,14286

$$Dy = 0,138942.$$

Con questo modo si è calcolata la seguente tavola.

TAVOLA XXXVII.

s	INCLINAZIONI medie.	Ds	Dx	Dy	$-s$	INCLINAZIONI medie.	Ds	Dx	$-Dy$
45°					5°	$2^{\circ}\frac{1}{2}$	0,067849	0,067763	0,002959
	$44^{\circ}.\frac{1}{2}$					$7\frac{1}{2}$			
44		0,392782	0,280063	0,275218	10		0,064967	0,064391	0,008477
	$43\frac{1}{2}$					$12\frac{1}{2}$			
43		0,269115	0,195147	0,185188	15		0,063804	0,062271	0,013805
	$41\frac{1}{2}$					$17\frac{1}{2}$			
40		0,497043	0,372146	0,329246	20		0,063981	0,061001	0,019233
	$37\frac{1}{2}$					$22\frac{1}{2}$			
35		0,438380	0,347682	0,266784	25		0,066426	0,061350	0,025412
	$32\frac{1}{2}$					$27\frac{1}{2}$			
30		0,258677	0,218098	0,138944	30		0,069901	0,061983	0,032267
	$27\frac{1}{2}$					$32\frac{1}{2}$			
25		0,178840	0,158582	0,082553	35		0,075647	0,063779	0,040631
	$22\frac{1}{2}$					$37\frac{1}{2}$			
20		0,135290	0,124952	0,051757	40		0,083964	0,066593	0,051098
	$17\frac{1}{2}$					$42\frac{1}{2}$			
15		0,108853	0,103782	0,032723	45		0,095712	0,070544	0,064642
	$12\frac{1}{2}$					$47\frac{1}{2}$			
10		0,091784	0,089580	0,019860	50		0,112247	0,075809	0,082731
	$7\frac{1}{2}$					$52\frac{1}{2}$			
5		0,080408	0,079695	0,010491	55		0,135757	0,082618	0,107669
	$2\frac{1}{2}$					$57\frac{1}{2}$			
0		0,072790	0,072698	0,003174	60		0,169891	0,091253	0,143239
						$62\frac{1}{2}$			
					65		0,221005	0,102016	0,195972
			2,042425	1,395938		$67\frac{1}{2}$			
					70		0,301000	0,115151	0,278000
						$72\frac{1}{2}$			
					75		0,434744	0,130687	0,414491
								1,177209	1,480628

La prima colonna indica gli angoli, che le tangenti alla traiettoria fanno con l'asse delle ascisse. La seconda le risultanti inclinazioni medie. La terza gli archi compresi fra le tangenti consecutive. La quarta le proiezioni di detti archi nel-

l' asse delle ascisse. E la quinta le proiezioni degli stessi archi, ma nell'asse delle ordinate.

La sesta colonna esprime le inclinazioni, che le tangenti consecutive dopo il vertice, fanno con l'asse delle ascisse. La settima le medie di tali inclinazioni. La ottava gli archi compresi fra le tangenti consecutive. La nona e decima le proiezioni di detti archi prese negli assi coordinati.

Gli angoli notati al principio della prima colonna sono molto fra loro ravvicinati, per avere maggiore approssimazione nelle corrispondenti ricerche; perciocchè gli elementi della curva nel principio si approssimano più degli altri alle proprie corde, cioè a dire, che tali elementi sono meno arcati.

Sommando i numeri della quarta colonna, si ha l'ampiezza del ramo ascendente. Sommando quelli della quinta, si ha l'altezza della gettata; le quali somme sono rispettivamente 2,042425, e 1,395938.

234. Vuolsi qui notare che pel ramo discendente, sommando le Dy negative fino a 70°, si ha 1,066135, e sommandole fino a 75°, risultano eguali a 1,480626. E perchè l'altezza della gettata 1,395938 è compresa fra i detti due numeri, ne risulta che rinvenendo come sopra (§. 233) l'arco fra 70° e 74°, si ottiene $Ds = 0,332990$, $Dx = 0,102867$ e $-Dy = 0,316592$, da cui procede $0,316592 + 1,066135 = 1,382727$, ch'esprimerà la somma delle Dy appartenenti al ramo discendente fino al punto della curva, in cui la tangente fa un angolo di 74° con l'asse delle ascisse. Ma l'altezza della gettata è 1,395938, perciò l'angolo di caduta sarà maggiore di 74°. Per rinvenirlo con approssimazione, si stabilisca la seguente analogia fra le parti proporzionali comprese tra limiti ristrettissimi, cioè fra gli angoli delle tangenti di 74° e 75°; ossia

$1,480626 - 1,382727 : 1,395938 - 1,382727 :: 1° :$ al quarto,

o pure $97899 : 13211 :: 1° :$ sta a 0°. 8′, 1.

Il che vuol dire che le differenze delle Dy, calcolate rispet-

tivamente con 75°, e 74°, stanno alla differenza dell'altezza della gettata e delle Dy valutate fino a 74°, come 1° differenza di 75° a 74° al quarto proporzionale, il quale sarà la differenza dell'angolo che si cerca sul minore 74°. Per conseguenza l'angolo di caduta approssimativamente verrà di 74°. 8′, 1.

Inoltre 1° : 0°.8′,1 :: 0,02782 : al quarto, o pure

1° : 0°,135 :: 0,02782 : al quarto = 0,003755 circa.

Ossia, la differenza fra gli angoli 75° e 74°, prossimamente maggiore e minore del dato, sta alla differenza del dato sul prossimamente minore, come la differenza delle ampiezze prossimamente maggiore e minore al quarto proporzionale, il quale sarà la differenza dell'ampiezza che si cerca sulla prossimamente minore: ma l'ampiezza corrispondente a 74° pareggia la somma delle Dx della tavola, fino a 70° più la Dx = 0,102867 ch'è l'ampiezza degli altri quattro gradi, ossia 1,149389; in conseguenza la corda incontrerà l'asse delle x in un punto distante dall'origine delle coordinate per 1,149389 + 0,003755 = 1,153144, che sarà l'ampiezza del ramo discendente: perciò la totale ampiezza pareggerà 2,042425 + 1,153144 = 3,195568.

Il metodo delle parti proporzionali è simile a quello che si tiene pei numeri ed i logaritmi, allorchè si cercano gli uni per mezzo degli altri, che non sono registrati nelle tavole logaritmiche.

La tavola XXXVI (§. 233) inserita nel trattato di balistica di Persy è utile per tutte le traiettorie simili, cioè per quelle sottoposte alla condizione di $\frac{V^2}{c} = \frac{V'^2}{c'}$, e di $\alpha = \alpha'$ (§. 197).

235. Sia una bomba del diametro di 0^m,2707 (= 10 pollici), spinta con l'angolo di proiezione di 45°, e con la velocità iniziale di 398^m, la quale corrisponde ad $h = 10$.

Si avrà dalla tavola ultima, in metri, l'altezza $Y =$

$1,395938 \frac{c}{2}$,

da cui

log. 1,395938	0,14487
log. c	3,20866
com. log. 2	9,69897
log. Y	3,05250

$$Y = 1128^{m}. \text{ circa.}$$

L'ampiezza del ramo ascendente

$X' = 2,042425 \times \frac{c}{2}$, e

log. 2,042425	0,31015
log. c	3,20866
com. log. 2	9,69897
log. X'	3,21778

$$X' = 1651^{m}.$$

L'ampiezza del ramo discendente $X'' = 1,153144 \times \frac{c}{2}$, e

log. 1,153144	0,06188
log. c	3,20866
com. log. 2	9,69897
log. X''	2,96951

$$X'' = 932^{m}.$$

L'ampiezza totale; dunque sarà

$$X = X' + X'' = 2583^{m}.$$

Riepilogando

Velocità iniziale	398^{m}.
Angolo di proiezione	45°.
Idem di caduta	74°.8′,1
Altezza della gettata	1128^{m}.
Ampiezza del ramo ascendente	1651.
Idem del discendente	932.
Ampiezza totale	2583^{m}.

L'ampiezza nel vòto con le stesse condizioni è (§. 3) $X=\frac{398^2}{g}$, e perciò

log. 398^2.	5,19976
com.log. g	9,00838
log. X.	4,20814

$X=16150^m$. circa,

ch'è il valore corrispondente al sestuplo e un quarto circa dell'ampiezza presa nel mezzo resistente.

Facendo nella formola (10. §. 187) $p=\tan.\ 74^\circ.8'$, 1, $\tan\alpha=\tan.\ 45^\circ=1$ si rinverrà la velocità di caduta. Nella formola (12. §. 187) sostituendo in C per tan α, tan $45^\circ=1$, si avrà la velocità al vertice.

TEORICA XIII.

Tiro del mortaro provetto.

236. Supponiamo la velocità del globo del mortaro provetto di $48^m,73$ (=150 piedi), trovata mediante la macchina di Grobert, con la carica di pruova, cioè con tre once di polvere detta di *ricezione* (§. 46). Sarà $h=\frac{V.^2}{2g}$; e prendendo per unità $\frac{c}{2}$ avremo

log. V^2.	3,37560
com.log. c.	6,57137
com.log. g	9,00838
log. h	8,95535

$h=0,09023$.

Applicando il metodo sopra cennato, o pure quello di cui è detto al §. 189, si ottiene prossimativamente;

$X'=0,0857$, ampiezza del ramo ascendente;

$X''=0,0834$, idem del ramo discendente;

$X=0,1691$, idem totale.

E riducendo questi valori a metri, si ha,

$X' = 0{,}0857 \times \frac{c}{2} = 115^m$ circa.

$X'' = 0{,}0834 \times \frac{c}{2} = 112^m$ circa.

$X = 0{,}1691 \times \frac{c}{2} = 227^m$

$Y = 0{,}0436 \times \frac{c}{2} = 58^m$.

Da tali risultamenti si fa chiaro, che i due rami della traiettoria hanno presso a poco eguali ampiezze, e che l'altezza della gettata è quasi la quarta parte della totale ampiezza: che sono proprietà della parabola.

Il metodo esposto al §. 232 suppone, che la densità dell'aria sia costante, il che pel tiro del mortaro provetto accade veramente, poichè il globo nella pruova della polvere si eleva ad un'altezza molto minore di 200 in 250^m (§. 76).

237. Premesso ciò, essendo generalmente nel vôto (§. 3) $X = \frac{V^2}{g}$ sen. 2α, nel nostro caso $\alpha = 45°$, e $V = 48^m{,}73$: dunque

$X = \frac{(48{,}73)^2}{g}$; da cui

log. $(48{,}73)^2$	3,37560
com. log. g	9,00838
log. X	2,38398

$X = 242^m$, $X' = X'' = 121^m$, $Y = 60{,}5$.

Dal paragone di questi con gli antecedenti risultamenti si conchiude

1.° *Che la curva descritta nell' aria dal globo del provetto, con una data velocità risultante dalla carica di pruova, è presso a poco una parabola.*

2.° *Che nel vôto, posta la stessa velocità, la parabola descritta dal globo è simile* (§. 198), *senza errore sensibile, alla*

traiettoria che col fatto si descrive da esso globo nella pruova della polvere.

E perchè le parabole descritte con lo stesso angolo di 45° sono simili, dappoichè le rispettive ampiezze sono proporzionali all'altezza della gettata, perciò tutte le traiettorie descritte dal globo nel mezzo resistente, e con la solita carica di pruova, saranno simili. E siccome la pruova della polvere ha per fine il conoscere le forze comparative e non le assolute, così tali forze si sono paragonate con le portate rispettive del provetto prese sul terreno, le quali conservano lo stesso rapporto delle ampiezze, che si valuterebbero nel vôto. O per meglio dire, *le forze relative di due polveri stanno fra loro, o come le ampiezze del mortaro di pruova che operi nell'aria, o come le ampiezze che si otterrebbero nel vôto.*

238. Se nella formola $X=\frac{V^2}{g}$ si faccia $X=227^m$ (§.236) si avrà $V^2=227^m \times g$; ossia

log. 227	2,35603
log. g	0,99162
log. V^2.	3,34765

$V=47^m$, che indicherà la velocità iniziale del globo: ma la velocità che ha dato l'ampiezza di 227^m nell'aria è di $48^m,73$ (§. 236), quindi è che per avere nel vôto la medesima ampiezza che si ha nell'aria, è di mestiere che il globo sia spinto da una velocità iniziale più piccola; verità di per sè sola evidente. Per altro una tale differenza è molto tenue; onde servendoci delle ampiezze prese sul terreno per valutare le velocità iniziali del globo, ne potremmo conseguire risultamenti poco discosti dai veri. Da questa teorica si fa manifesto il vantaggio e l'esattezza che si ha, facendo col mortaro provetto la pruova della polvere.

TEORICA XIV.

Balistica nel mezzo resistente, considerando variabile la densità dell'aria.

239. Fin'ora nelle formole pei tiri di ogni maniera si è supposto essere costante la densità dell'atmosfera; ma siccome nel fatto essa è evanescente, così i risultamenti, ottenuti con gli angoli grandi di elevazione, dovranno essere corretti analogamente all'altezza cui può giungere il mobile. In quanto poi appartiene ai piccoli angoli o di elevazione o di depressione, la densità dell'aria si può considerare come fosse al tutto omogenea (§. 76), ed allora $c = \frac{4aD}{3kD'}$ si rende variabile per rispetto al solo numero k, il quale prende differenti valori secondo il cambiamento della velocità (§. 57). Nella ipotesi poi de' grandi angoli di proiezione, il valore di c varia tanto relativamente a k quanto alla densità D' dell'aria.

Per conoscere quali variazioni arreca ne' risultamenti delle formole il considerare variabile il solo k, ci facciamo a trattare un'altra volta l'esempio antecedente (§. 189), quello cioè della bomba da 10 spinta con la velocità iniziale di 200^m con l'angolo di 40°.

Riscontrando la tavola XIII (§. 57) si osserva, che la detta velocità non trovasi notata nella colonna settima, ma in vece è compresa fra le velocità di $213^m,36$, e $182^m,88$, alle quali corrispondono i rapporti 1,55 e 1,50 inseriti nella quarta colonna. Quindi per rinvenire il rapporto appartenente alla velocità 200^m, conviene far uso delle parti proporzionali (§. 234), ossia stabilire fra la velocità prossimamente maggiore e prossimamente minore della data, e la differenza de' suddetti rapporti, la seguente proporzione

$213^m,36 - 182^m,88 : 200^m - 182^m,88 :: 1,55 - 1,50 :$ al quarto

o pure $30,48 : 17,12 :: 0.05$ sta a $0,03$ circa.

Questo decimale, aggiunto al rapporto prossimamente minore, dà 1,53 per quello appartenente alla suddetta velocità.

In conseguenza $k=\frac{1,53}{2}=0,76$, e $c=\frac{4aD}{3\times 0,76}$; ma $\log\frac{4aD}{3}=$ 3,16290 (Tavola XV. §. 59), dunque $\log\frac{4aD}{3\times 0,76}=3,16290+$ 0,11919 = 3,28209 pel logaritmo del coefficiente della resistenza dell'aria, relativamente alla detta velocità per la bomba da dieci.

Nella formola (11. §. 187) l'espressione $\frac{V^2\cos^2\alpha}{gc}$ si deve pel caso nostro valutare: e facendo uso, al solito, de' logaritmi, si avrà il calcolo seguente

$\log V^2(=200)^2$	4,60206
$\log\cos^2 40^\circ$	9,76850
com. $\log g(=9,809)$	9,00838
com. $\log c$	6,71791
$\log\frac{V^2\cos^2 40^\circ}{gc}$	0,09685, e
com. $\log\frac{V^2\cos^2 40^\circ}{gc}=\log\frac{gc}{V^2\cos^2 40^\circ}$ . .	9,90315, e
$\frac{gc}{V^2\cos^2 40^\circ}$	0,8 circa; dunque

$C=\tan 40^\circ\sqrt{1+\tan^2 40^\circ}+\log.\text{ip}(\tan 40^\circ+\sqrt{1+\tan^2 40^\circ})+0,8$, e $C=1,8583+0,8$ (Tav. XXXIII. §. 189) $=2,6583$.

Facendo in P $p=\tan(40^\circ-1^\circ)=\tan 39^\circ$. Si avrà per la stessa tavola $P=1,7823$: onde

$$s=2,30258\frac{c}{2}\cdot\log\frac{V^2\cos^2\alpha}{gc}(C-P)=$$

$$2,30258\frac{c}{2}\left[\log\frac{V^2\cos^2\alpha}{gc}+\log(C-P)\right]=$$

$2,30258\frac{c}{2}[0,09685+9,94250]=2,30258\frac{c}{2}\times 0,03935$: onde

$\log 2,30258 + \log c + \text{com.}\log 2 + \log.0,03935 = 0,36221 + 3,28209 + 9,66577 + 8,59550 = 1,90557$ ed $s = 80^m,5$ circa.

Considerando la metà di quest'arco come sopra (§. 189) si avrà $Dx = 40^m,2 \times \cos 40^\circ = 30^m,8$: $Dy = 40^m,2 \times \text{sen}\, 40^\circ = 25^m,8$.

Questi valori di pochissimo differiscono da quelli calcolati nel detto paragrafo.

L'equazione (10. §. 187) dà

$$v = \frac{1}{\cos 39^\circ}\sqrt{\frac{gc}{C-P}}\,;$$

della quale

$\log c$	3,28209	
$\log g$	0,99162	
$\text{com.}\log(C-P)(=0,8760)$.	0,05750	
$\log \frac{gc}{C-P}$	4,33121	la metà 2,16560
$\text{com.}\log\cos 39^\circ$		0,10950
$\log v$		2,27510

$$v = 188^m \text{ circa},$$

velocità poco maggiore di 186^m (§. 188).

(*Fig. 39*). Ciò premesso, si tirino gli assi rettangolari AX, AY; si prenda $AB = 30^m,8$, e si elevi la perpendicolare $BA' = 25^m,8$ alla AX. La congiungente AA' rappresenterà il primo elemento della traiettoria; ed in A' il mobile ha 188^m di velocità.

Dal punto A' si conducano gli assi $A'X'$, $A'Y'$ paralleli ai primi; e tutto ciò che si è fatto all'origine A con la data velocità di 200^m, e con l'angolo di 40°, si esegua per la nuova origine A' con la velocità di 188^m, e la elevazione di 39°. Avvertendo però di calcolare il valore di k con le parti proporzionali, come si è praticato per la velocità di 200^m, ossia facendo $213^m,36 - 182^m,88 : 188^m - 182^m,88 :: 0,05$ al quarto, o pure

$30,48 : 5,12 :: 0,05$ sta a $0,008$; onde

$$k = \frac{1,50 + 0,008}{2} = 0,754\,, \text{ e } c = \frac{4aD}{3 \times 0,754}\,; \text{ da cui}$$

$$\log \frac{4aD}{3 \times 0,754} = 3,16290 + 0,12263 = 3,28553.$$

Sostituendo nella formola (11. §. 187) per V 188^m, per α 39°, ed in P per p tan 38° : si avranno allo stesso modo i valori di $A'B', B'A''$; e la congiungente $A'A''$ sarà il secondo elemento della curva, il quale fa con l'asse primitivo un angolo di 39°.

Col medesimo procedimento si valuteranno le $A''B'', B''A'''$ e le altre, fino a tanto che si abbiano i valori di AH, Ha, e la velocità in a. Allorquando si giunge al vertice a della curva, è uopo valutare l'arco aa', supponendo che la tangente in a' faccia con l'asse AX un angolo di 1°. Per la qual cosa si trasporti in a l'origine delle coordinate, e quindi si valuterà l'analogo valore di aa': indi si calcoleranno le ab, ba', e la velocità in a'. Similmente si verrà in cognizione delle $a'b'$, e $b'a''$ prendendo a' per nuova origine della traiettoria, e per angolo di proiezione quello misurato da 2°.

Nel modo anzidetto la curva verrà ad essere determinata con precisione alquanto maggiore di quella descritta con i precetti del §. 232, e seguenti. Ma poichè le circostanze del moto valutate con k variabile conducono a risultamenti prossimi a quelli, che si hanno con $k=0,9$ per le velocità usate nelle bocche da fuoco di artiglieria, così nelle ricerche si possono confidatamente adoperare le regole stabilite da Eulero (§. 189), o quelle fermate da Legendre (§. 232).

Calcolate le $AB, BA', A'B', B'A''$ ec. come si è detto, e quindi modificandole coi precetti antecedenti (§. 77 e seguenti), si verrebbe a tener conto della evanescenza dell'aria; e perciò si potrebbe descrivere la traiettoria con tale approssimazione da confondersi col vero cammino del mobile. Ma siffatto metodo essendo quasi impossibile a conseguirsi, perciò i matematici ne hanno rinvenuto un altro, che mena a formole tali da poter essere applicate con vantaggio e speditezza nell'uso del tiro delle armi, governate con grandi angoli di elevazione.

240. Un proietto spinto in alto incontra continuamente gli

strati atmosferici di densità decrescente (§. 77); laonde il coefficiente c sarà un'altra variabile da considerarsi nelle formole. Varie ipotesi si sono stabilite sulla densità relativa dell'aria per dar tale valore al detto coefficiente da rendere le integrazioni finite; ed esprimendo siffatto coefficiente con w, si ha secondo Borda $\frac{1}{w}=\frac{m}{\frac{1}{2}c\sqrt{1+p^2}}$, il quale determina m con la condizione che al principio della curva, ove $p=\tan x$, diventi $w=\frac{1}{2}c$, con ciò $\frac{1}{\frac{1}{2}c}=\frac{m}{\frac{1}{2}c\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$, ed $m=\frac{1}{\cos\alpha}$; dunque generalmente Borda stabilisce $\frac{1}{w}=\frac{\frac{1}{\cos\alpha}}{\frac{1}{2}c\sqrt{1+p^2}}=\frac{\cos\varepsilon}{\frac{1}{2}c\cos\alpha}$ per la densità *relativa*. Quindi nelle formole pel moto, ove ha parte l'unità divisa pel coefficiente costante $\frac{1}{2}c$, sostituisce $\frac{\cos\varepsilon}{\frac{1}{2}c\cos\alpha}$, e quindi esegue le analoghe integrazioni.

Analizzando l'espressione $\frac{1}{w}=\frac{\cos\varepsilon}{\frac{1}{2}c\cos\alpha}$ è da notare, che all'origine delle coordinate accade $\alpha=\varepsilon$, e quindi $\frac{1}{w}=\frac{1}{\frac{1}{2}c}$. Al vertice della curva, ove $\varepsilon=0$, risulta $\frac{1}{w}=\frac{1}{\frac{1}{2}c\cos\alpha}$. per conseguenza ei parte dal principio che la densità aumenterebbe dall'origine del moto alla sommità della curva; e questo si è in opposizione col fatto. Se dunque con questa ipotesi di densità relativa, si calcolasse l'ampiezza de' rami della curva, si verrebbe ad avere un risultamento minore di quello valutato nella ipotesi, che la densità sia costante. Oltre a ciò pel ramo discendente la espressione $\frac{\cos\varepsilon}{\frac{1}{2}c\cos\alpha}$ diminuisce continuamente dal vertice al punto di caduta, perchè ε è sempre crescente. E

questo pure si è in opposizione con la natura dell'aria. Di più facendo $\varepsilon = \alpha$, sarà $\frac{1}{w} = \frac{1}{\frac{1}{2}c}$ che sarebbe la densità relativa al punto, ove la tangente della traiettoria fa un angolo con l'asse delle x eguale a quello di proiezione; ma il detto punto supera in livello l'origine (§. 193) delle coordinate, perciò la rispondente densità relativa dell'aria dovrebbe risultare non eguale a $\frac{1}{\frac{1}{2}c}$, ma sibbene minore.

Intanto il citato Borda, per rendere eseguibili le integrazioni, si fonda sulla detta ipotesi; ma dà un certo compenso all'ampiezza totale della traiettoria con calcolare separatamente quella di ciascun ramo, facendo uso per la velocità al vertice di quella che risulta dalla formola (12. §. 187).

Fra i matematici il Bezout, il Lombard e il Legendre si sono adoperati nello stabilire ipotesi plausibili per la densità relativa dell'aria, affinchè mediante la sostituzione si pervenisse alle integrazioni finite delle formole, che risguardano il moto curvilineo coi grandi angoli di proiezione. Ma i ragionamenti dei citati autori si accostano più o meno a quello di Borda. Intanto noi seguiteremo il metodo di Persy, come quello che più si confà alla natura del quisito.

241. Esprimendo $\frac{1}{w} = \frac{m+np}{\frac{1}{2}c\sqrt{1+p^2}}$ la densità relativa dell'aria, ne risulta che in questa formola ci ha due quantità m ed n da determinare, anzichè una come avviene nel caso di Borda. Perciò si stabilisca la ipotesi, che all'origine del moto risulti $\frac{1}{w} = \frac{1}{\frac{1}{2}c}$, ed al vertice della curva $\frac{1}{w} = \frac{\cos\alpha}{\frac{1}{2}c}$, la qual cosa per rispetto al ramo ascendente è secondo il fatto, giacchè $\frac{1}{\frac{1}{2}c}$ è sempre maggiore di $\frac{\cos\alpha}{\frac{1}{2}c}$.

Nella stabilita equazione facendo $p = \tan\alpha$, e $p = 0$ si avrà rispettivamente

$$\frac{1}{\frac{1}{2}c} = \frac{m + n\tan\alpha}{\frac{1}{2}c\sqrt{1+\tan^2\alpha}}, \quad \frac{\cos\alpha}{\frac{1}{2}c} = \frac{m}{\frac{1}{2}c};$$

da quest'ultima si ha $m = \cos\alpha$: e sostituendo tal valore nell'altra risulta

$$1 = \frac{\cos\alpha + n\tan\alpha}{\sec\alpha} = \frac{\cos\alpha + n\tan\alpha}{\frac{1}{\cos\alpha}}, \text{ ed}$$

$$n\tan\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}; \text{ quindi } n = \operatorname{sen}\alpha.$$

Per conseguenza $\frac{1}{w} = \frac{\cos\alpha + p\operatorname{sen}\alpha}{\frac{1}{2}c\sqrt{1+p^2}}$; ma $p = \tan\varepsilon = \frac{\operatorname{sen}\varepsilon}{\cos\varepsilon}$, dunque $\frac{1}{w} = \frac{\cos\alpha\cos\varepsilon + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varepsilon}{\frac{1}{2}c}$, e $\frac{1}{w} = \frac{\cos(\alpha-\varepsilon)}{\frac{1}{2}c}$. La quale espressione sarà un massimo, allorchè $\varepsilon = \alpha$, ed un minimo nel caso di $\varepsilon = 0$: cioè le densità relative risulteranno rispettivamente all'origine ed al vertice, $\frac{1}{\frac{1}{2}c}$, e $\frac{\cos\alpha}{\frac{1}{2}c}$, vale a dire secondo la ipotesi.

Il valore di $\frac{1}{w}$ crescerà, o diminuirà secondochè l'angolo di proiezione sarà più piccolo o più grande, la qual cosa è di per sè manifesta.

(*Fig. 39*). Rispetto poi al ramo discendente si ha $\frac{1}{w} = \frac{\cos(\alpha+\varepsilon)}{\frac{1}{2}c}$, il qual valore in vece di crescere diminuisce pei punti che più si avvicinano a quello di caduta. Dove accade che $\varepsilon = 90 - \alpha$ là si ottiene $\frac{1}{w} = \frac{0}{\frac{1}{2}c} = 0$, ossia, nel punto della traiettoria, in cui l'angolo variabile della tangente diventa complemento di quello di proiezione, la densità risulta zero, e da tal punto in poi dovrà risultare la densità medesima di un valore negativo.

Quando $\varepsilon = 0$, avremo $\frac{1}{w} = -\frac{\cos.\alpha}{\frac{1}{2}c}$. Per evitare siffatti inconvenienti bisogna calcolare le circostanze del moto pel solo ramo ascendente: in seguito trasportare l'origine delle coordinate alla sommità della curva, ossia in a, considerando le ba', ca'' ec., come positive, come pure il valore di p: per conseguenza la gravità g dovrà prendersi negativamente o positivamente, secondochè nelle formole del ramo ascendente essa si trova col segno positivo o col segno negativo; vale a dire che le formole pel ramo ascendente si possono applicare al ramo discendente cambiando il segno a g, o che torna lo stesso, cambiandolo ad y ed a p: ritenendo per altro per la densità relativa la stessa formola $\frac{1}{w} = \frac{\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha.p}{\frac{1}{2}c\sqrt{1+p^2}} = \frac{\cos(\alpha-\varepsilon)}{\frac{1}{2}c}$, affinchè al principio a la densità sia $\frac{\cos\alpha}{\frac{1}{2}c}$, ed al punto in cui $\varepsilon = \alpha$ risulti eguale a $\frac{1}{\frac{1}{2}c}$.

Da tutto ciò si rileva che il procedimento della densità relativa è tale, che pel ramo ascendente diminuisce un poco più della vera fino al vertice, in cui diventa $\frac{\cos\alpha}{\frac{1}{2}c}$. Da tal punto in poi la densità relativa di nuovo comincia a crescere fino al punto, in cui $\varepsilon = \alpha$, e poscia insensibilmente diminuisce. Ond'è che valutate le circostanze del moto pel primo ramo, si debbano valutare separatamente quelle pel secondo, facendo uso della velocità al vertice calcolata con la formola (12. §. 187). Di qui è che l'ampiezza del ramo discendente verrà a modificarsi un poco: cioè a dire che una minor velocità alla sommità supplisce quasi agli effetti di una minor densità di cui si fa uso nelle formole appartenenti al ramo discendente. Da siffatto ragionamento è facile conchiudere che l'ampiezza di ciascun dei due rami della curva risultar deve più grande di ciascuna am-

piezza valutata con la densità costante: come appunto deve avvenire, rendendosi ciò più manifesto dappoi, alloraquando si faranno le applicazioni delle formole.

242. Essendo le componenti delle forze ritardatrici del moto eguali ai coefficienti differenziali, presi per rispetto al tempo, delle componenti della velocità, secondo le parallele agli assi coordinati, si otterrà generalmente (§. 187).

$$\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt}=-\frac{1}{c}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dx}{dt},\quad \frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dt}=-g-\frac{1}{c}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dy}{dt};$$

ed eseguendo le differenziazioni, considerando dx costante, avremo

$$-\frac{dx.d^2t}{dt.dt^2}=-\frac{1}{c}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dx}{dt},\ \text{e}\ \frac{d^2t}{dt^2}=\frac{1}{c}\cdot\frac{ds}{dt}\ .\ .\ .\ (a)$$

$$\frac{dt.d^2y-dy.d^2t}{dt.dt^2}=-g-\frac{1.}{c.}\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dy}{dt},\ \text{e}$$

$$\frac{d^2y}{dt}-dy.\frac{d^2t}{dt^2}=-gdt-\frac{1.}{c.}\frac{ds}{dt}dy,$$

sostituendovi per $\frac{d^2t}{dt^2}$ il suo valore preso da (a), avrassi in fine

$$d^2y=-gdt^2.\ .\ .\ .\ .\ .\ (b).$$

Per eliminare il tempo da (a) e da (b), si differenzii quest'ultima equazione, e si otterrà $d^3y=-2gdt.d^2t$; e sostituendovi il valore di d^2t preso dalla (a), risulta

$$d^3y=-\frac{2gdt^2.ds}{c};\ \text{ma da}\ (b)\ \text{si ha}\ dt^2=-\frac{d^2y}{g},\ \text{dunque}$$

$$d^3y=+\frac{2ds.d^2y}{c}\ .\ .\ .\ .\ .\ (c).$$

Ma essendo $d^2y=dp.dx$, $d^3y=d^2p.dx$, le (b) e (c) diventano

$$\frac{dp}{dx}=-g\frac{dt^2}{dx^2}.\ .\ .\ .\ (d),\ \frac{d^2p}{dp}=\frac{ds}{\frac{1}{2}c}.\ .\ .\ .\ (e)$$

E poichè queste due equazioni si sono ottenute dalla (b), che non contiene il coefficiente $\frac{1}{2}c$, ne deriva che esse sono

indipendenti da ogni ipotesi che risguardi la legge della densità atmosferica. Quindi è che dando per cognita una delle tre cose, cioè o la legge di densità dell'aria, o la velocità, o la traiettoria, si conosceranno le altre due, poichè è sempre $v^2 = \frac{ds^2}{dt^2}$. Sostituendo dunque nella (e) per $\frac{1}{2^c}$ la legge variabile di densità (§. 241), si ottiene una equazione, e facendo al solito $\frac{1}{2}c = 1$, si ha

$$\frac{d^2p}{dp} = \frac{(\cos\alpha + p.\operatorname{sen}\alpha)ds}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{(\cos\alpha + p\operatorname{sen}\alpha)dx\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+p^2}}, \text{ e}$$

$$\frac{d^2p}{dx} = (\cos\alpha + p.\operatorname{sen}\alpha)\,dp: \text{ integrando}$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{(\cos\alpha + p\operatorname{sen}.\alpha)^2}{2\operatorname{sen}\alpha.} + C$$

Si faccia $C = -\frac{A^2}{2\operatorname{sen}\alpha.\cos^2\alpha}$, ed avremo

$$\frac{dp}{dx} = \frac{(\cos\alpha + p.\operatorname{sen}\alpha)^2 - \frac{A^2}{\cos^2\alpha}}{2\operatorname{sen}\alpha} \quad . \; . \; . \; (f).$$

Si ponga $\cos\alpha + p.\operatorname{sen}\alpha = q$, e quindi $dp = \frac{dq}{\operatorname{sen}\alpha}$; la ($f$)

$$\text{darà } \frac{dq}{dx.\operatorname{sen}\alpha} = \frac{q^2 - \frac{A^2}{\cos^2\alpha}}{2\operatorname{sen}\alpha}, \text{ e } dx = \frac{2dq}{q^2 - \frac{A^2}{\cos.^2\alpha}} =$$

$$\frac{\cos\alpha}{A}\left(\frac{dq}{q - \frac{A}{\cos\alpha}} - \frac{dq}{q + \frac{A}{\cos\alpha}}\right),$$

dalla quale risulta

$(\cos\alpha + p\operatorname{sen}\alpha)dx = \frac{2qdq}{q^2 - \frac{A^2}{\cos^2\alpha}}$; ed integrandole entrambe,

dopo avere eseguite le analoghe riduzioni, si ha

$$\frac{Ax}{\cos\alpha} = \log.\mathrm{ip}\, B^2 \cdot \frac{q - \frac{A}{\cos\alpha}}{q + \frac{A}{\cos\alpha}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

$$x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha = \log.\mathrm{ip}\, C^2 \left(q^2 - \frac{A^2}{\cos^2.\alpha}\right) \quad . \quad . \quad (49).$$

Perciocchè i valori delle costanti, non potendo essere comuni ad ambi i rami (§. 241), ne deriva che, eliminando q fra queste due ultime equazioni, se ne avrà un'altra che apparterrà tanto al ramo ascendente quanto al discendente, secondochè esse costanti siano determinate in modo che l'origine delle coordinate stia o nel principio del moto, o pure alla sommità della curva.

Dall'equazioni (f) e (d) si ritrae

$$\frac{dx^2}{dt^2} = -\frac{2g\,\mathrm{sen}\,\alpha}{q^2 - \frac{A^2}{\cos^2.\alpha}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50);$$

la quale è applicabile al ramo discendente, cambiando il segno alla gravità (§. 241). In conseguenza di ciò le tre ultime formole sono come il fondamento per valutare le circostanze del moto per ciascun ramo in particolare.

243. Considerando prima il ramo ascendente, nel quale alla origine delle coordinate è $x = 0$, $y = 0$ e $p = \tan\alpha$, ne risulta $q = \cos\alpha + \tan\alpha.\,\mathrm{sen}\,\alpha$ (§. 242), da cui $q = \frac{1}{\cos\alpha}$; e perchè $\frac{dx}{dt} = V\cos\alpha$ (§. 1), si avrà $\frac{dx^2}{dt^2} = V^2\cos^2\alpha = 2gh\cos^2\alpha$; quindi per la equazione (50. §. 242), si ottiene

$$2gh\cos^2\alpha = -\frac{2g.\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{A^2}{\cos^2\alpha}}, \text{ ed}$$

$$A = \sqrt{1 + \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{h}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g).$$

Per la equazione (48. §. 242) alla detta origine si ha

$$0 = \log.\mathrm{ip}\, B^2 \cdot \frac{\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{A}{\cos\alpha}}{\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{A}{\cos\alpha}} = \log.\mathrm{ip}\, B^2 \frac{1-A}{1+A};$$ ed in fine

$$B^2 = \frac{1+A}{1-A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (h).$$

Dalla (49. §. 242) si ha

$$0 = \log.\mathrm{ip}\, C^2 \left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{A^2}{\cos^2\alpha}\right),$$ e in ultimo

$$C^2 = \frac{\cos^2\alpha}{1-A^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (l).$$

Eliminando la q fra l'equazioni (48. 49. §. 242) si avrà l'equazione del ramo di cui si tratta. Infatti dalla seconda tolta la prima, viene

$$x\left(\cos\alpha - \frac{A}{\cos\alpha}\right) + y\,\mathrm{sen}\,\alpha = \log.\mathrm{ip}\,\frac{C^2}{B^2}\left(q + \frac{A}{\cos\alpha}\right)^2 =$$

$$2\log.\mathrm{ip}\,\frac{C}{B}\left(q + \frac{A}{\cos\alpha}\right):$$

passando dai logaritmi ai numeri, si avrà

$$e^{x\left(\cos\alpha - \frac{A}{\cos\alpha}\right) + y\,\mathrm{sen}\,\alpha} = 2\frac{C}{B}\left(q + \frac{A}{\cos\alpha}\right),$$ e

$$q + \frac{A}{\cos\alpha} = \tfrac{1}{2}\frac{B}{C} e^{x\left(\cos\alpha - \frac{A}{\cos\alpha}\right) + y\,\mathrm{sen}\,\alpha},$$ e quindi

$$q - \frac{A}{\cos\alpha} = \tfrac{1}{2}\frac{B}{C} e^{x\left(\cos\alpha - \frac{A}{\cos\alpha}\right) + y\,\mathrm{sen}\,\alpha} - \frac{2A}{\cos\alpha}.$$ Con questi due valori l'equazione (48. §. 242) diventa

$$\frac{Ax}{\cos\alpha} = \log.\mathrm{ip}\, B^2 \frac{\frac{B}{C} e^{x\left(\cos\alpha - \frac{A}{\cos\alpha}\right) + y\cos\alpha} - \frac{4A}{\cos\alpha}}{\frac{B}{C} e^{x\left(\cos\alpha - \frac{A}{\cos\alpha}\right) + y\,\mathrm{sen}\,\alpha}} =$$

$$\log.\text{ip}\frac{B^2e^{x\left(\cos\alpha-\frac{A}{\cos\alpha}\right)+y\,\text{sen}\,\alpha}-4CB\frac{A}{\cos\alpha}}{e^{x\left(\cos\alpha-\frac{A}{\cos\alpha}\right)+y\,\text{sen}\,\alpha}}=$$

$$\log.\text{ip}\left(B^2e^{x\left(\cos\alpha-\frac{A}{\cos\alpha}\right)+y\,\text{sen}\,\alpha}-4CB\frac{A}{\cos\alpha}\right)-$$

$x\left(\cos\alpha-\frac{A}{\cos\alpha}\right)-y\,\text{sen}\,\alpha$, e sostituendo per B, e C i valori presi da (h) ed (l), si ha

$$\log.\text{ip}\left[\frac{1+A}{1-A}e^{x\left(\cos\alpha-\frac{A}{\cos\alpha}\right)+y\,\text{sen}\,\alpha}-\frac{4A}{1-A}\right]=$$

$\frac{Ax}{\cos\alpha}+x\left(\cos\alpha-\frac{A}{\cos\alpha}\right)+y\,\text{sen}\,\alpha$, e finalmente $x\cos\alpha+$

$$y\,\text{sen}\,\alpha=2{,}30258\log\frac{(1+A)e^{x\left(\cos\alpha-\frac{A}{\cos\alpha}\right)+y\,\text{sen}\,\alpha}-4A}{1-A}\ldots(51),$$

ch'è l'equazione al ramo ascendente della traiettoria.

244. In questa equazione prendendo il valore del coefficiente differenziale di prim'ordine rispetto a y, ed x, ed eguagliato a zero, si giunge a conoscere l'altezza massima della gettata (§. 200); ma siccome una tale altezza dipende dal valore dell'ampiezza del ramo ascendente, così la formola ultima sarebbe poco adattata per la ricerca da farsi. Intanto per conseguire lo scopo nella formola (48. §. 242) facendo $q=\cos\alpha$, come accade al vertice, il valore di x diverrà l'ampiezza del ramo ascendente, che esprimiamo con X', e perciò

$$X'=2{,}30258\frac{\cos\alpha}{A}\log B^2\frac{\cos\alpha-\frac{A}{\cos\alpha}}{\cos\alpha+\frac{A}{\cos\alpha}}=$$

$2{,}30258\frac{\cos\alpha}{A}\log\frac{1+A}{1-A}\cdot\frac{\cos^2\alpha-A^2}{\cos^2\alpha+A^2}$: finalmente

$$X'=2{,}30258\frac{\cos\alpha}{A}\log\frac{(1+A)(A-\cos^2\alpha)}{(A-1)(A+\cos^2\alpha)}\ldots\ldots(52).$$

Nella (49. §. 242) sostituendo per x il cognito valore X', per y si avrà l'ordinata alla sommità, che per distinguerla si chiami Y. In conseguenza

$$X'\cos\alpha + Y\operatorname{sen}\alpha = \log.\text{ip}\,\frac{\cos^2\alpha}{1-A^2}\left(\cos^2\alpha - \frac{A^2}{\cos^2\alpha}\right),\ \text{in ultimo}$$

$$Y = 2{,}30258\,\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\log\frac{(A+\cos^2\alpha)(A-\cos^2\alpha)}{(A+1)(A-1)} - \frac{X'}{\tan\alpha}\ .\ .\ (53),$$

per l'altezza della gettata.

Sia $h = 10$, ed $\alpha = 45°$. Con questi dati si vuol rinvenire l'ampiezza del ramo ascendente, e l'ordinata alla sommità. Le formole da risolversi perciò saranno le due ultime, ma si conviene primieramente determinare il valore della costante A, espressa dalla (y). Per conseguenza

$$A = \sqrt{1 + \frac{\operatorname{sen} 45°}{10}};\ \text{onde}$$

log. sen 45°	9,84949
com. log. 10.	9,00000
	8,84949, il n.° è
$\frac{\operatorname{sen} 45°}{10}$.	0,07071, ed
$1 + \frac{\operatorname{sen} 45°}{10}$.	1,07071, il log. è
	0,02968, la metà
log A	0,01484

$A = 1{,}0347$ circa.

Dai calcoli della formola (52) si ha

$A + 1$	2,0347
$A - 1$	0,0347
$\cos^2 45°$	0,5
$A + \cos^2 45°$	1,5347
$A - \cos^2 45°$	0,5347;

quindi eseguendo le sostituzioni risulta

$$X' = 2{,}30258\,\frac{\cos 45°}{1{,}0347}\log\frac{2{,}0347 \times 0{,}5347}{0{,}0347 \times 1{,}5347};$$

ed eseguendo il calcolo con i logaritmi avremo

log 2,0347	0,30851
log.0,5347	9,72815
com.log.0,0347	1,45904
com log 1,5347	9,81396
=	1,30966, e
log 1,30966	0,11716
log 2,30258	0,36222
log cos 45°	9,84948
com.log 1,0347	9,98517
log X'	0,31403

$X' = 2,0607$ circa.

La formola (53) con le suddette sostituzioni dà

$$Y = 2,30258 \frac{1}{\text{sen } 45^\circ} \log \frac{1,5347 \times 0,5347}{2,0347 \times 0,0347} - \frac{2,0607}{\tan 45^\circ}; \text{ dunque}$$

log 1,5347	0,18604
log.0,5347	9,72815
com.log 2,0347	9,69149
com.log.0,0347	1,45904
=	1,06472, e
log 1,06472	0,02723
com.log sen 45°	0,15051
log 2,30258	0,36222
	0,53996, il n.° è
	3,4671 ; ma

$\frac{2,0607}{\tan 45^\circ} = 2,0607$, per conseguenza

$$Y = 3,4671 - 2,0607 = 1,4064 \text{ circa.}$$

I valori di X' ed Y paragonati con quelli inseriti nella Tavola (XXXVI. §. 233) espressi da 2,042425, e 1,395938, fanno conoscere che l'ampiezza del ramo ascendente, e l'altezza della gettata sono più grandi allorchè l'aria si considera evanescente, anzichè omogenea in densità, come si era accennato alla fine del §. 241.

245. La formola (50. §. 242) si trasforma nell'altra

$$v^2 = \frac{2g \operatorname{sen} \alpha}{\frac{A^2}{\cos^2 \alpha} - (\cos \alpha + p \operatorname{sen} \alpha)^2} \quad \ldots\ldots \quad (54),$$

la quale farà conoscere la velocità ad un punto qualunque del ramo ascendente. Facendo $p = 0$, il valore di v diventerà la velocità al vertice della curva. Ed esprimendo con H l'altezza appartenente a tale velocità, si avrà

$$H = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha}{(\cos^2 \alpha + A)(A - \cos^2 \alpha)} \quad \ldots\ldots \quad (55).$$

Per lo stesso esempio si otterrà

log sen 45°	9,69897
log cos² 45°	9,84949
com.log 1,5347	9,81396
com.log.0,5347	0,27185
log H	9,63427

$H = 0,43079.$

Il valore di X', per la bomba da 10, sollecitata con la velocità di 398ᵐ, che corrisponde ad $h = 10$, in metri dà

$$X' = 2,0607 \times \frac{c}{2}, \text{ e}$$

log 2,0607	0,31401
log c (Tav. XV)	3,20866
com.log 2	9,69897
log X'	3,22164

$X' = 1666^m$ circa.

Così pure $$Y = 1,4092 \times \frac{c}{2}, \text{ e}$$

log 1,4092	0,14810
log c	3,20866
com.log 2	9,69897
log Y	3,05573

$Y = 1137^m$ circa.

Infine $H = 0,43072 \times \frac{c}{2}$, e $v = \sqrt{0,43072cg}$, e

log.0,43079	9,63427
log c	3,20866
log g	0,99162
	3,83455, la metà è
log v	1,91727

$v = 82^m,6.$

246. Affine di analizzare le circostanze del moto pel ramo discendente, conviene, come di già si è detto, portare l'origine delle coordinate al vertice della curva, e con tale condizione i valori di A, B, C dovranno risultare differenti da quelli stabiliti nel §. 243. In conseguenza per distinguerli si esprimano con A', B', C'; ma le formole del ramo ascendente si cambiano in quelle del ramo discendente, portando l'origine al vertice, e prendendo le y e le p positive, il che torna lo stesso, cambiando il segno alla g (§. 241).

Le formole dunque (48. 49 §. 242), con la introduzione delle nuove costanti diventano

$$\frac{A'x}{\cos\alpha} = \log.\mathrm{ip}\, B'^2 \frac{q - \frac{A'}{\cos\alpha}}{q + \frac{A'}{\cos\alpha}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (m)$$

$$x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha = \log.\mathrm{ip}\, C'^2 \left(q^2 - \frac{A'^2}{\cos\alpha}\right) \quad . \; . \; . \quad (n).$$

Per determinare tali costanti con le dette condizioni, si osserva che la formola (50. §. 242) per un punto del ramo discendente risulta

$$\frac{dx^2}{dt^2} = \frac{2g\,\mathrm{sen}\,\alpha}{q^2 - \frac{A'^2}{\cos^2\alpha}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (56).$$

Al vertice poi si trova $p = 0$, e perciò $q = \cos\alpha$, onde

$$v^2 = \frac{2g\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos^2\alpha - \frac{A'^2}{\cos^2\alpha}}.$$

Ma si è detto che per dare un certo compenso in lunghezza all'ampiezza del ramo discendente, ed a tutte le altre circostanze del moto, conviene prendere per velocità al vertice quella che risulta dalla formola (12. §. 187). E perciò esprimendo con Z l'altezza di una tale velocità, essa dovrà considerarsi come cognita ed in conseguenza

$$2gZ = \frac{2g \operatorname{sen} \alpha}{\cos^2\alpha - \frac{A'^2}{\cos^2\alpha}}, \text{ o pure}$$

$$Z = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos^2\alpha - \frac{A'^2}{\cos^2\alpha}} \cdot \text{ Da questa equazione si ha}$$

$$A' = \cos\alpha \sqrt{\cos^2\alpha - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{Z}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (o).$$

Al vertice abbiamo $x = 0$, $y = 0$, e $q = \cos\alpha$: e con questi dati le formole (m) ed (n), si cambiano in

$$0 = \log.\text{ip}\, B'^2 \frac{\cos\alpha - \frac{A'}{\cos\alpha}}{\cos\alpha + \frac{A'}{\cos\alpha}}$$

$$0 = \log.\text{ip}\, C'^2 \left(\cos^2\alpha - \frac{A'^2}{\cos^2\alpha}\right)$$

e quindi

$$B'^2 = \frac{\cos^2\alpha + A'}{\cos^2\alpha - A'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (p)$$

$$C'^2 = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^4\alpha - A'^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (q).$$

Premesso ciò, eliminando fra (m) ed (n) il q, si otterrà l'equazione del ramo discendente. Per giungere allo scopo prefisso, dalla (n) si sottragga la (m), e ne otterremo

$$x\left(\cos\alpha - \frac{A'}{\cos\alpha}\right) + y \operatorname{sen}\alpha = \log.\text{ip}\, \frac{C'^2}{B'^2}\left(q + \frac{A'}{\cos\alpha}\right)^2 =$$

$$2 \log.\text{ip}\, \frac{C'}{B'}\left(q + \frac{A'}{\cos\alpha}\right).$$

E per più facilmente scrivere i calcoli, si esprima per poco il primo membro con 2ω: si avrà

$$\omega = \log.\mathrm{ip}\frac{C'}{B'}\left(q+\frac{A'}{\cos\alpha}\right), \text{ ed in conseguenza}$$

$$e^{\omega} = \frac{C'}{B'}\left(q+\frac{A'}{\cos\alpha}\right); \text{ da cui } q+\frac{A'}{\cos\alpha} = \frac{B'}{C'}\,e^{\omega},$$

$$q-\frac{A'}{\cos\alpha} = \frac{B'}{C'}\,e^{\omega}-\frac{2A'}{\cos\alpha}, \text{ e perciò}$$

$$B'^2.\frac{q-\frac{A'}{\cos\alpha}}{q+\frac{A'}{\cos\alpha}} = B'^2.\frac{\frac{B'}{C'}e^{\omega}-\frac{2A'}{\cos\alpha}}{\frac{B'}{C'}e^{\omega}} = \frac{e^{\omega}.B'^2-B'C'\frac{2A'}{\cos\alpha}}{e^{\omega}}$$

L'equazione (m) con questa sostituzione darà

$$\frac{A'x}{\cos\alpha} = \log.\mathrm{ip}\frac{e^{\omega}B'^2-B'C'.\frac{2A'}{\cos\alpha}}{e^{\omega}}, \text{ dalla quale}$$

$$e^{\frac{A'x}{\cos\alpha}} = \frac{e^{\omega}B'^2-B'C'.\frac{2A'}{\cos\alpha}}{e^{\omega}}, \text{ riducendo}$$

$$e^{\omega}\left(B'^2-e^{\frac{A'x}{\cos\alpha}}\right) = B'C'.\frac{2A'}{\cos\alpha}, \text{ ed}$$

$$e^{\omega} = \frac{2A'}{\frac{B'}{C'}\cos\alpha-\frac{\cos\alpha}{B'C'}e^{\frac{A'x}{\cos\alpha}}};$$

e sostituendo per B', e C' i rispondenti valori, si ha

$$e^{\omega} = \frac{2A'}{(\cos^2\alpha+A')+(A-\cos^2\alpha)\,e^{\frac{A'x}{\cos\alpha}}}; \text{ prendendo i loga-}$$

ritmi, avremo $\omega = \log.\mathrm{ip}\dfrac{2A'}{(\cos^2\alpha+A')+(A-\cos^2\alpha).\,e^{\frac{A'x}{\cos\alpha}}}$; ponen-

do poi per α il suo significato, ed eseguendo le riduzioni si ha

$$y.\operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha=(A-\cos^2.\alpha)x+2\times$$

$$2,30258.\cos\alpha\log\frac{2A'}{(\cos^2\alpha+A')+(A'-\cos^2\alpha)e^{\frac{A'x}{\cos\alpha}}}. \quad (57).$$

Tal'è l'equazione del ramo discendente della traiettoria.

Se per y si sostituisca Y presa dalla equazione (53. §. 244), si avrà per x un tal valore, ch'esprimasi con X'', il quale sarà l'ampiezza del ramo discendente, poichè Y è eguale alla ordinata del punto di caduta. Onde

$$Y.\operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha=(A'-\cos^2\alpha)X''+2\times$$

$$2,30258\cos\alpha\log\frac{2A'}{(\cos^2\alpha+A'^2)+(A'-\cos^2\alpha)e^{\frac{A'X''}{\cos\alpha}}}. \quad (58).$$

247. Il valore di A' diventa immaginario, allorchè $\cos^2\alpha$ è minore di $\frac{\operatorname{sen}.\alpha}{Z}$, com'è manifesto dalla formola (0. §. 246).

In tal caso la formola (58. §. 246) non si presterebbe per la ricerca di X''; adunque è mestieri stabilire un'altra espressione che sodisfaccia al bisogno. Si ponga dunque la costante C(§. 242) eguale ad $\frac{A''}{2\operatorname{sen}\alpha.\cos^2\alpha}$, e le due trasformate di sopra (§. 242) diverranno

$$dx=\frac{2dq}{q^2+\frac{A''^2}{\cos^2\alpha}}=\frac{2dq}{\frac{A''^2}{\cos^2\alpha}\left(1+\frac{\cos^2\alpha}{A''^2}q^2\right)}$$

$$qdx=\frac{2qdx}{q^2+\frac{A''^2}{\cos^2\alpha}}.$$

Gl'integrali rispettivi saranno

$$\frac{A''^2}{2\cos^2\alpha}x+B''=\text{ar.}\left(\tan=\frac{\cos\alpha}{A''}q\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (r)$$

$$x\cos\alpha+y\operatorname{sen}\alpha=\log.\text{ip}\,C''^2\left(q^2+\frac{A''^2}{\cos^2\alpha}\right)\ldots(s).$$

Per determinare le costanti, si ha al solito (§. 246)

$$\frac{dx^2}{dt^2}=\frac{2g\,\text{sen}\,\alpha}{\cos^2\alpha+\frac{A''^2}{\cos^2\alpha}}=2gZ\,;$$

dalla quale

$$A''=\cos\alpha\sqrt{\frac{\text{sen}\,\alpha}{Z}-\cos^2\alpha}\quad\ldots\ldots\ (t).$$

La (r) darà, a cagione di $x=0$ e di $q=\cos\alpha$, pel vertice

$$B''=\text{ar.}\left(\tan=\frac{\cos^2.\alpha}{A''}\right)\ldots\ldots\ (u)\,;\ \text{e la}\ (s)$$

$$C''=\sqrt{\cos^4.\alpha+A''^2}\quad\ldots\ldots\ (v).$$

L'equazione (r) dà $\tan\left(\frac{A''x}{2\cos\alpha}+B''\right)=\frac{\cos\alpha}{A''}q$, e

$$q^2=\frac{A''^2}{\cos^2.\alpha}\tan^2\left(\frac{A''x}{2\cos\alpha}+B''\right),\ q^2+\frac{A''^2}{\cos^2\alpha}=$$

$$\frac{A''^2}{\cos^2\alpha}\left[1+\tan^2\left(\frac{A''x}{2\cos\alpha}+B''\right)\right]=\frac{A''^2}{\cos^2.\alpha}\sec^2\left(\frac{A''^2}{2\cos\alpha}+B''\right).$$

Con questa operazione la (s) diventa

$$x\cos\alpha+y\,\text{sen}\,\alpha=\log.\text{ip}\,C''^2.\sec^2\left(\frac{A''^2}{2\cos\alpha}+B''\right):$$

ed eseguendo le riduzioni, notando che $A''\ C''=\cos.\alpha\cos.B''$, si ottiene all'ultimo

$$x\,\text{sen}\,\alpha+y\cos\alpha=2\times2{,}30258\log.\frac{\cos.B''}{\cos\left(B''+\frac{A''x}{2\cos\alpha}\right)}\ldots\ (59).$$

ch'è l'equazione del ramo discendente nella ipotesi di $\cos^2\alpha$ minore di $\frac{\text{sen}\,\alpha}{Z}$.

Facendo $y=Y$, risulta $x=X''$, e quindi

$$Y\,\text{sen}\,\alpha=-X''\cos\alpha+2\times2{,}30258\log.\frac{\cos.B''}{\cos\left(B''+\frac{A''X''}{2\cos\alpha}\right)}\ (60).$$

Da questa si rinviene il valore dell' ampiezza del ramo discendente, applicandovi la regola di falsa posizione.

Sia come sopra $h=10$, $\alpha=45^\circ$. Si vuol conoscere l' ampiezza del ramo discendente. Bisogna sulle prime valutare il valore della Z (§. 241) con la formola (12. §. 187). Perciò

$u^2=\frac{cg}{C}$, e quindi $2gZ=\frac{cg}{C}$, $Z=\frac{\frac{c}{2}}{C}$, e facendo $\frac{c}{2}=1$ si ha

$$Z=\frac{1}{C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (61).$$

Pel nostro caso $C=2,49557$ (§. 233); dunque $\log C=0,39717$, e $\log.Z=\text{com.}\log.C=9,60283$, e $Z=0,4007$ circa, minore di 0,43079 (§. 245), che esprime la velocità al vertice, considerando variabile la densità atmosferica: percui la (t) dà

$$A''=\cos.45^\circ\sqrt{\frac{\text{sen.}54^\circ}{Z}-\cos^2.45^\circ}\text{; e}$$

$\log.\text{sen.}45^\circ$	9,84949
$\text{com.}\log.Z$	0,39717
$\log.\frac{\text{sen.}45^\circ}{Z}$	0,24666
$\frac{\text{sen.}45^\circ}{Z}$	1,7646 ; ma
$\cos^2.45$	0,5
$\frac{\text{sen.}45^\circ}{Z}-\cos^2.45^\circ$	1,2646
$\log.\left(\frac{\text{sen.}\alpha}{Z}-\cos^2\alpha\right)$	0,10195
$\log.\sqrt{\frac{\text{sen.}\alpha}{Z}-\cos^2\alpha}$	0,05098
$\log.\cos.45^\circ$	9,84949
$\log.A''$	9,90047

$$A''=0,79518.$$

Per rinvenire B'', si fa uso della formola (u) in cui $A''=0,79518$, e $\cos^2\alpha=\cos^2.45^\circ$, e perciò

$$B''=\text{arc}\left(\tan=\frac{\cos^2.45^\circ}{0,79518}\right),\quad \tan B''=\frac{\cos^2.45^\circ}{0,79518}:\ \text{onde}$$

log $\cos^2.45^\circ$	9,69898
com. log. 0,79518	0,09955
log. tan. B''.	9,79851

$$B''=32^\circ.9'.39''.$$

Sostituendo nella formola (60), per Y 1,4092 (§. 244), per α 45°, e per A'' e B'' i valori ora rinvenuti, si avrà

$$1,4064\times\text{sen}.45^\circ=-X''.\cos.45^\circ+2\times 2$$

$$2,30258\log\frac{\cos(32^\circ.9'.39''}{\cos\left(32^\circ.9'.39''+\frac{0,79518}{2.\cos.45^\circ}X''\right)},$$

ma $\log 1,4064\times\text{sen}\,45^\circ=9,99758$, onde $1,4064\times\text{sen}\,45^\circ=0,99445$; e perciò l'equazione da risolversi è

$$0,99445=-X''\cos 45^\circ+2\times$$

$$2,30258\log\frac{\cos(32^\circ.9'.39''}{\cos\left(32^\circ.9'.39''+\frac{0,79518}{2\cos.45^\circ}X''\right)}:$$ per la falsa posi-

zione, sia

1.° $X''=1,18$

$\log.X''$ 0,07188
$\log.0,79518$ . . . 9,90047
com. $\log 2$. 9,69897
com. $\log\cos 45^\circ$ 0,15051

$\log\frac{0,79518}{2\cos 45^\circ}X''$. . 9,82183

$\frac{0,79518}{2\cos 45^\circ}X''$ . . . 0,6634, onde

$2\pi r:0,6634::360^\circ:G^\circ=$
$38^\circ,0154$, o sia

G°. . . . . $38^\circ.00'.55''$
B'' . . . . . $32^\circ\ 09'.39''$
n . . . . . $70^\circ.10'.34''$;

$\log\cos B''$ 9,92766
com. $\log\cos n$ 0,46963

$\log\frac{\cos B''}{\cos n}$ 0,39729

$\log\left(\log\frac{\cos B''}{\cos n}\right)$. 9,59911
$\log 2$ 0,30103
$\log 2,30258$ . . . 0,36221
0,26235, e

$2\times 2,30258\times$
$\log\frac{\cos B''}{\cos n}$. 1,82958
$\log X''\cos 45^\circ$, . 9,92137
$X''\cos 45^\circ$ . . 0,83438
$-X''\cos 45^\circ+2\times$
$2,30258\log\frac{\cos B''}{\cos n}=+0,99520$
$Y\,\text{sen}\,45^\circ$ 0,99445
1.° errore . . . . $+0,00075$

2.° $X''=1,1796$

$\log X''$. 0,07171
$\log.0,79518$. . . 9,90047
com. $\log 2$ 9,69897
com. $\log\cos 45^\circ$. . . . 0,15051

$\log\frac{0,79518}{2\cos 45^\circ}X''$. . 9,82166

$\frac{0,79518}{2\cos 45^\circ}X''$. . . . 0,66323, onde

$2\pi r:0,66323::360^\circ:G^\circ=$
$38^\circ,0008$, o sia

G°. . . . . $33^\circ.00'.03''$
B'' , ... $32^\circ.09'.39''$
n. . . . . $70^\circ.09'.42''$

$\log\cos B''$ 9,92766
com. $\log\cos n$ 0,46934

$\log\frac{\cos B''}{\cos n}$ 0,39700

$\log\left(\log\frac{\cos B''}{\cos n}\right)$. . 9,59879
$\log 2$ 0,30103
$\log 2,30258$ . . . 0,36221
0,26203, e

$2\times 2,30258\times$
$\log\frac{\cos B''}{\cos n}$. 1,82822
$\log X''\cos 45^\circ$ . . 9,92120
$X''\cos 45^\circ$ . . 0,83400
$-X''\cos 45^\circ+2\times$
$2,30258\log\frac{\cos B''}{\cos n}=-0,99422$
$Y\,\text{sen}\,45^\circ$. 0,99445
2.° errore . . . . . $-0,0002$ circa e;

1,18 . . . posizioni . . . 1,1796
$\times$
$+0,00075$ . . . errori . . $-0,0002$

$1,1796\times 0,00075=0,0008847$
$1,18\ \times 0,0002\ =0,0002360$
0,0011207; e quindi

$$X''=\frac{0,0011207}{0,00075+0,0002}=\frac{0,0011207}{0,00095}=1,1796 \text{ circa};$$

ch'è l'ampiezza del ramo discendente, la quale è maggiore di 1,153144 (§. 234), come appunto doveva risultare.

Per la bomba da 10, poste le solite condizioni, risulta in metri $X''=1,1799\times\frac{1}{2}c$, e

$\log 1,1796$	0,07173
$\log c$.	3,20866
com. $\log g$.	9,69897
$\log X''$	2,97936

$X''=953^m$ circa.

248. Supponiamo che nella formola (0.§. 246) sia $\cos^2\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{Z}$, risulterà $A'=0$: in conseguenza le trasformate della formola (f.§.242) diverranno

$$dx=\frac{2dq}{q^2},\ qdx=\frac{2qdq}{q^2}=(\cos\alpha+p\operatorname{sen}\alpha)\,dx.$$

Integrandole si ha

$$\tfrac{1}{2}x=-\frac{1}{q}+B'^{v}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (x),$$

$$x\cos\alpha+y\operatorname{sen}\alpha=\log.\mathrm{ip}\,(C'^{v})^2q^2=2\log.\mathrm{ip}\,C'^{v}q\ .\ (y).$$

Per determinare B'^{v}, e C'^{v} si osserverà, che alla sommità è $x=0$, $y=0$ e $p=0$; onde $q=\cos\alpha$, e perciò $B'^{v}=\frac{1}{\cos\alpha}$, $\cos C'^{v}=\frac{1}{\cos\alpha}$.

Ciò posto (x) dà $q=\frac{1}{B'^{v}-\frac{1}{2}x}$; il quale valore sostituito in (y) farà risultare $x\cos\alpha+y\operatorname{sen}\alpha=2\log.\mathrm{ip}\frac{1}{\cos\alpha}\times\frac{1}{\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{1}{2}}$, in fine

$$x\cos\alpha+y\operatorname{sen}\alpha=-2\times2,30258\log\left(1-\frac{x\cos\alpha}{2}\right)\ .\ .\ .\ .\ (62).$$

Tal'è l'equazione al ramo discendente nella detta ipotesi di $A'=0$.

Se in questa equazione per y si sostituisca Y altezza della gettata, o ordinata al punto di caduta, x diventerà X'', ampiezza del ramo discendente; perciò

$$Y\operatorname{sen}\alpha = -X''\cos\alpha - 2\times 2{,}30258\log\left(1-\frac{X''\cos\alpha}{2}\right) \quad . \quad . \quad (63).$$

249. Dalla equazione (m§.246) si ha

$$e^{\frac{A'x}{\cos\alpha}} = B'^2\frac{q-\frac{A'}{\cos\alpha}}{q+\frac{A'}{\cos\alpha}}; \text{ onde}$$

$$e^{\frac{A'x}{\cos\alpha}}\left(q+\frac{A'}{\cos\alpha}\right) = B'^2\left(q-\frac{A'}{\cos\alpha}\right); \text{ dalla quale}$$

$$q = \frac{A'}{\cos\alpha}\left(\frac{B'^2+e^{\frac{A'x}{\cos\alpha}}}{B'^2-e^{\frac{A'x}{\cos\alpha}}}\right) = \frac{A'x}{\cos\alpha}\left(\frac{2B'^2}{B'^2-e^{\frac{A'x}{\cos\alpha}}}-1\right);$$

ma essendo

$$q = \cos\alpha + p\operatorname{sen}\alpha, \text{ sarà}$$

$$\cos\alpha + p\operatorname{sen}\alpha = \frac{A'}{\cos\alpha}\left(\frac{2B'^2}{B'^2-e^{\frac{A'x}{\cos\alpha}}}-1\right), \text{ e quindi}$$

$$p = \frac{A'}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}\left(\frac{2A'}{B'^2-e^{\frac{A'x}{\cos\alpha}}}-1\right) - \frac{A'}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} =$$

$$\frac{B'^2}{\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha}\left(\frac{2A'}{B'^2-e^{\frac{A'x}{\cos\alpha}}}\right) - \frac{\cos^2\alpha+A'}{\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha}.$$

Sostituendo per B' il suo valore indicato dalla formola (p. §.246), nasce

$$p = \frac{\cos^2\alpha+A'}{\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha(\cos^2\alpha-A')}\left[\frac{2A'}{\frac{\cos^2\alpha+A'}{\cos^2\alpha-A'}-e^{\frac{A'x}{\cos\alpha}}}\right] - \frac{\cos^2\alpha+A'}{\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha};$$

e finalmente

$$p=\frac{\cos^2\alpha+A'}{\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha}\left[\frac{2A'}{\cos^2\alpha+A'-(\cos^2\alpha-A')\,e^{\frac{A'x}{\cos\alpha}}}\right]\quad\ldots\quad(64);$$

la qual formola farà conoscere l'angolo, che la tangente alla curva in un dato punto, fa con l'asse delle x, allorquando si sappia qual'è l'ascissa al detto punto del ramo discendente.

In conseguenza facendo $x=X''$ ampiezza del ramo discendente, il p diverrà la tangente dell'angolo di caduta, che nominiamo $\tan\alpha'$; e perciò

$$\tan\alpha'=\frac{\cos^2\alpha+A'}{\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha}\left[\frac{2A'}{\cos^2\alpha+A'-(\cos^2\alpha-A')\,e^{\frac{A'X''}{\cos\alpha}}}\right]\quad\ldots\quad(65).$$

250. Se poi A' risulta immaginario, allora si fa uso della formola (r. §. 247), per trovare non solo la tangente dell'angolo di caduta, ma anche quella appartenente ad un qualunque punto del ramo discendente, cioè a dire si deve risolvere l'equazione.

$$\frac{A''x}{2\cos\alpha}+B''=\mathrm{ar}\left(\tan=\frac{\cos\alpha}{A''}q\right);\ \text{da cui}$$

$$q=\cos\alpha+p\,\mathrm{sen}\,\alpha=\frac{A''}{\cos\alpha}\tan\left(B''+\frac{A''x}{2\cos\alpha}\right),\ \text{e}$$

$$p=\frac{A''}{\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha}\tan\left(B''+\frac{A''x}{2\cos\alpha}\right)=\frac{\cos\alpha}{\mathrm{sen}\,\alpha}=$$

$$\frac{2A''}{\mathrm{sen}\,2\alpha}\tan\left(B''+\frac{A''x}{2\cos\alpha}\right)-\frac{2\cos^2\alpha}{\mathrm{sen}\,2\alpha}=$$

$$\frac{2A''}{\mathrm{sen}\,2\alpha}\left[\tan\left(B''+\frac{A''x}{2\cos\alpha}\right)-\frac{\cos^2\alpha}{A''}\right]=$$

$$\frac{2A''}{\mathrm{sen}2\alpha}\left[\frac{\mathrm{sen}\left(B''+\frac{A''x}{2\cos\alpha}\right)-\frac{\cos^2\alpha}{A''}\cos\left(B''+\frac{A''}{2\cos\alpha}\right)}{\cos\left(B''+\frac{A''x}{2\cos\alpha}\right)}\right].$$

Vuolsi osservare che

$$\frac{\cos^2\alpha}{A''}=\tan B'\,(\S.\ 247),\ \operatorname{sen}\left(B''+\frac{A''x}{2\cos\alpha}\right)=$$

$$\operatorname{sen}B''\cos\frac{A''x}{2\cos\alpha}+\cos B''\operatorname{sen}\frac{A''x}{2\cos\alpha},\ \text{e}$$

$$\tan B''\cos\left(B''+\frac{A''x}{2\cos\alpha}\right)=\operatorname{sen}B''\cos\frac{A''x}{2\cos\alpha}-$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2B''}{\cos B''}\operatorname{sen}\frac{A''x}{2\cos\alpha};$$

sottraendo dalla prima la seconda, si ha per differenza

$$\operatorname{sen}\frac{A''x}{2\cos\alpha}\left(\cos B''+\frac{\operatorname{sen}^2B''}{\cos B''}\right)=\operatorname{sen}\frac{A''x}{2\cos\alpha}\times\frac{1}{\cos B''};$$

in conseguenza

$$p=\frac{2A''\operatorname{sen}\frac{A''x}{2\cos\alpha}}{\operatorname{sen}2\alpha\cos B''\cos\left(B''+\frac{A''x}{2\cos\alpha}\right)}\ \ldots\ldots\ldots\ (66).$$

Facendo quindi come sopra $x=X''$, si avrà per la tangente dell' angolo di caduta

$$\tan\alpha'=\frac{2A''\operatorname{sen}\frac{A''X''}{2\cos\alpha}}{\operatorname{sen}2\alpha\cos B''\cos\left(B''+\frac{A''X''}{2\cos\alpha}\right)}\ \ldots\ldots\ (67).$$

Sia $h=10$, $\alpha=45°$: si è avuto $X''=1,1796$, $A''=0,79518$, $B''=32°.9'.55''$ (§. 247); in conseguenza

$\log A''$	9,90047
$\log X''$	0,07176
com. $\log 2$	9,69897
com. $\log\cos 45°$	0,15051
$\log\frac{A''X''}{2\cos\alpha}$	9,82171
$\frac{A''X''}{2\cos\alpha}$	0,6633,

è pure $2\pi r : 0,6633 :: 360^\circ : G^\circ = \frac{0,6633 \times 360^\circ}{6,283}$;

log 0,6633	9,82171
log 360°	2,55630
com. log 6,283	9,20183
log G°	1,57984

$$G^\circ = 38^\circ.0'.16''.$$

Con ciò la formola ultima diventa

$$\tan\alpha' = \frac{2 \times 0,79518 \operatorname{sen}(38^\circ.0'.16'')}{\operatorname{sen} 90^\circ \cos(32^\circ.9'.55'') \cos(70^\circ.9'.55'')} : \text{ percui}$$

log 2	0,30103
log. 0,79518	9,90047
log sen (38°.0′.16″) . .	9,78938
com. log cos 90°	0,00000
com. log cos (32°.9′.55″) . .	0,07234
com. log cos (70°.9′.55″) . .	0,46941
log tan α'	0,53263

$$\alpha' = 73^\circ.39'.6'',$$

il quale angolo è minore di 74°.8′,1 (§. 234), come doveva accadere.

251. L'equazione (50. §. 242): applicata al ramo discendente diventa

$$\frac{dx^2}{dt^2} = \frac{2g \operatorname{sen} \alpha}{q^2 - \frac{A'^2}{\cos^2 \alpha}}$$

Sia Z' l'altezza della velocità del moto in un qualunque punto della curva, e ε l'angolo che la tangente a detto punto fa con l'asse delle x. Siffatta velocità verrà espressa da $\sqrt{2gZ'}$, e la sua componente secondo l'asse delle ascisse sarà dinotata da $\cos\varepsilon \sqrt{2gZ'}$; e quindi

$$\frac{dx^2}{dt^2} = \frac{2g \operatorname{sen} \alpha}{q^2 - \frac{A'^2}{\cos^2 \alpha}} = (\cos\varepsilon \sqrt{2gZ'})^2, \text{ e}$$

$$Z' \cos^2 \varepsilon = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{(\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \tan \varepsilon)^2 - \frac{A'^2}{\cos^2 \alpha}}, \text{ e}$$

$$Z' = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos^2 \varepsilon (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \tan \varepsilon)^2 - \frac{A'^2 \cos^2 \varepsilon}{\cos^2 \alpha}} =$$

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{(\cos \varepsilon \cos \alpha + \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} \alpha)^2 - \frac{A'^2 \cos^2 \varepsilon}{\cos^2 \alpha}},$$

e finalmente

$$Z' = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos^2 (\varepsilon - \alpha) - \frac{A'^2 \cos^2 \varepsilon}{\cos^2 \alpha}} \quad \ldots\ldots \quad (68).$$

La quale equazione farà conoscere la velocità residua ad un punto del ramo discendente, alloraquando è noto l'angolo ε che fà la tangente della curva al detto punto, con l'asse delle x.

Se l'angolo ε fosse eguale all'angolo α' di caduta, il valore di Z' per distinguerlo si esprima con Z'', e verrà

$$Z'' = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos^2 (\alpha' - \alpha) - \frac{A'^2 \cos^2 \alpha'}{\cos^2 \alpha}} \quad \ldots\ldots \quad (69);$$

questa formola serve a far conoscere la velocità finale del moto.

Sia $h = 10$, $\alpha = 45°$. Si è avuto $Z = 0,4007$ circa (§. 246), onde

$$A'^2 = \cos^2 45° \left(\cos^2 45° - \frac{\operatorname{sen} 45°}{0,4007} \right),$$

log sen 45°	9,84949
com.log.0,4007	0,39717
	0,24666, il n.° è
$\frac{\operatorname{sen} 45°}{0,4007}$	1,7646
$\cos^2 45°$	0,5
$\cos^2 45° - \frac{\operatorname{sen} 45°}{0,4007}$ . .	—1,2646 , ed

$$A'^2 = -0,5 \times 1,2646 = -0,63233;$$

come pure $\alpha' = 73°.39'.6''$.

Con i suddetti dati si avrà

$$Z''=\frac{\text{sen}\,45^\circ}{\cos^2(73^\circ.39'.6''-45^\circ)+\frac{0,63233\cos^2 73^\circ.39'.6''}{\cos^2 45^\circ}};\ \text{e}$$

log.0,63233	9,80094
log $\cos^2 73^\circ.39'.6''$. . . .	8,89888
com.log $\cos^2 45^\circ$.	0,30103
	9,00085, il n.° è
	0,10019
$\cos^2(28^\circ.39'.6'')$. . . .	0,77010
	0,87029,

il qual numero esprime il denominatore, onde

$$Z''=\frac{\text{sen}\,45^\circ}{0,87029};\ \text{dalla quale}$$

log sen 45°	9,84949
com.log. 0,87029	0,06034
log Z''.	9,90983

$$Z''=0,8125 \text{ circa},$$

per la velocità finale.

Per la bomba da 10 animata con la velocità iniziale di 398^m, che dà $h=10$, risulta per la velocità finale v',

$$v'=\sqrt{0,8125\times cg},\ \text{e}$$

log.0,8125	9,90983
log c	3,20866
log g	0,99162
	4,11011, la metà è
log v'	2,05505

$$v'=114^m \text{ circa.}$$

con T il tempo che ci vuole per descrivere il ramo ascendente si otterrà

$$T=\sqrt{\frac{2}{g\,\mathrm{sen}\,\alpha}}\left[\mathrm{ar}\left(\mathrm{sen}=\frac{1}{A}\right)-\mathrm{ar}\left(\mathrm{sen}=\frac{\cos^2\alpha}{A}\right)\right]\quad\ldots\ (71);$$

il valore di A è espresso dalla formola (g. §. 243).

Sia $h=10$, $\alpha=45°$: si avrà (§. 244) $\log A=0{,}01484$; ed osservando che la g dovrà valutarsi con la unità lineare $\frac{1}{2}c$, ne procede, che per trattare la detta formola conviene assegnare la specie del proietto, come si è praticato antecedentemente (§. 203) pel calcolo del tempo appartenente alla palla da 24. Sia dunque la bomba da 10; avremo

$$T=\sqrt{\frac{c}{g\,\mathrm{sen}\,\alpha}}\left[\mathrm{ar}\left(\mathrm{sen}=\frac{1}{A}\right)-\mathrm{ar}\left(\mathrm{sen}=\frac{\cos^2\alpha}{A}\right)\right],\ \text{e}$$

$\log c$ (Tav. XV. §. 59) . . .	3,20865
com. $\log g$	9,00838
com. $\log \mathrm{sen}\,45°$	0,15051
	2,36754, la metà
$\log\sqrt{\frac{c}{g\,\mathrm{sen}\,45°}}$	1,18377;
$\log\frac{1}{A}$	9,98516,
$\log\frac{1}{A}$	$\log\mathrm{sen}\,75°,109$
$\log\frac{\cos^2 45°}{A}$	9,68414
$\log\frac{\cos^2 45°}{A}$ . . .	$\log\mathrm{sen}\,28°,895$, e

$$T=\sqrt{\frac{c}{g\,\mathrm{sen}\,\alpha}}\,(75°,109-28°,895)=\sqrt{\frac{c}{g\,\mathrm{sen}\,45°}}\times\mathrm{ar}\,46°,214:$$

in conseguenza

$$360^\circ : 46^\circ,214 :: 6,283 : N = \frac{6,283 \times 46^\circ,214}{360^\circ};$$

$$\log N \ldots\ldots\ldots\ldots 9,90664$$

$$\log \sqrt{\frac{c}{g \operatorname{sen} 45^\circ}} \ldots\ldots 1,18377$$

$$\log T \ldots\ldots\ldots\ldots 1,09041$$

$$T = 12'',3 \text{ circa},$$

tempo che mette la bomba da 10 per scorrere il ramo ascendente della traiettoria che descrive con la velocità iniziale di 398^m, e con l'angolo di proiezione di 45°.

253. In quanto al ramo discendente si ha (§. 242)

$$\frac{dx^2}{dt^2} = \frac{2g \operatorname{sen} \alpha}{q^2 - \frac{A'^2}{\cos^2 \alpha}}; \text{ e } dt = \sqrt{\frac{2}{g \operatorname{sen} \alpha}} \cdot \frac{dq}{\sqrt{q^2 - \frac{A'^2}{\cos^2 \alpha}}};$$

integrando si ha

$$t = \sqrt{\frac{2}{g \operatorname{sen} \alpha}} \log.\mathrm{ip}\left(q + \sqrt{q^2 - \frac{A'^2}{\cos^2 \alpha}}\right) + \text{costante}.$$

Al vertice della curva si trova $q = \cos \alpha$; dunque

$$\text{costante} = -\sqrt{\frac{2}{g \operatorname{sen} \alpha}} \log.\mathrm{ip}\left(\cos \alpha + \sqrt{\cos^2 \alpha - \frac{A'^2}{\cos^2 \alpha}}\right),$$

e l'integrale diverrà

$$t = 2,30258 \sqrt{\frac{2}{g \cos \alpha}} \log \frac{q + \sqrt{q^2 + \frac{A'^2}{\cos^2 \alpha}}}{\cos \alpha + \sqrt{\cos^2 \alpha - \frac{A'^2}{\cos^2 \alpha}}} \quad \ldots (72).$$

La costante A' è data dall'equazione (0. §. 246).

Affine di ricavare il tempo che occorre per l'intero ramo

discendente, in $q = \cos\alpha + p \operatorname{sen}\alpha$ conviene fare $p = \tan\alpha'$; e quindi

$$T' = 2{,}30258\sqrt{\frac{2}{g\operatorname{sen}\alpha}} \times \log \frac{\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\tan\alpha' + \sqrt{(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\tan\alpha')^2 - \frac{A'^2}{\cos^2\alpha}}}{\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha - \frac{A'^2}{\cos^2\alpha}}};$$

ma nel numeratore la quantità sotto il radicale pareggia $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{Z''\cos^2\alpha'}$ (§. 251), e nel denominatore (§. 246) è $\frac{A'^2}{\cos^2\alpha} = \cos^2\alpha - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{Z}$; sostituendo

$$T' = 2{,}30258\sqrt{\frac{2}{g\operatorname{sen}\alpha}} \log \frac{\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\tan\alpha' + \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{Z''\cos^2\alpha'}}}{\cos\alpha + \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{Z}}} =$$

$$2{,}30258\sqrt{\frac{2}{g\operatorname{sen}\alpha}} \log \frac{\cos\alpha\cos\alpha' + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha' + \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{Z''}}}{\cos\alpha\left(\cos\alpha + \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{Z}}\right)},$$

in ultimo

$$T' = 2{,}30258\sqrt{\frac{2}{g\operatorname{sen}\alpha}} \log \frac{\cos(\alpha' - \alpha) + \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{Z''}}}{\cos\alpha'\left(\cos\alpha + \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{Z}}\right)} \quad \ldots \quad (73).$$

In conseguenza $T + T'$ sarà il tempo totale necessario per descrivere la traiettoria col proietto.

Sia per la bomba da 10, $h = 10$, $\alpha = 45°$, si avrà per la risoluzione di quest' ultima formola,

$$\log Z = 9{,}60283 \text{ (§. 247)}, \quad \alpha' = 73°.39'.6'' \text{ (§. 250)},$$

$$\log Z'' = 9{,}90983 \text{ (§. 251)}.$$

Per conseguenza $\cos(\alpha' - \alpha) = \cos 28°.39'.6'' = 0,8775$.

$\log \operatorname{sen} 45°$ 9,84949

com. $\log Z''$ 0,09017

9,93966, la metà è

$\log \sqrt{\frac{\operatorname{sen} 45°}{Z''}}$ . . . . . 9,96983, e

$\sqrt{\frac{\operatorname{sen} 45°}{Z''}}$ 0,9329

$\cos 28°.39'.6''$ 0,8775

1,8104 che sarà il numeratore.

Inoltre

$\log \operatorname{sen} 45°$ 9,84949

com. $\log Z$ 0,39717

0,24666, la metà è

$\log \sqrt{\frac{\operatorname{sen} 45°}{Z}}$ . . . . . 0,12333, e

$\sqrt{\frac{\operatorname{sen} 45°}{Z}}$ 1,3284

$\cos 45°$ 0,7071

$\cos 45° + \sqrt{\frac{\operatorname{sen} 45°}{Z}}$ . . . . . 2,0355, il logaritmo è

0,30867

$\log \cos 73°.39'.6''$ 9,44944

$\log \left[\cos 73°.39'.6'' \left(\cos \alpha + \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{Z}}\right)\right]$. 9,75811 onde

$$\log \left[\frac{\cos(\alpha' - \alpha) + \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{Z''}}}{\cos \alpha' \left(\cos \alpha + \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{Z}}\right)}\right] = 0,25778 - 9,75811 = 0,49967 :$$

in conseguenza

$$T' = 2,30258 \sqrt{\frac{c}{g \operatorname{sen} \alpha}} \times 0,49967 :$$

log 2,30258	0,36221
log $\sqrt{\frac{c}{g \operatorname{sen} \alpha}}$ (§. 252) . . .	1,18372
log.0,49967	9,69868
log T'	1,24461

$T' = 17'',6$ circa.

Questo valore è maggiore di 12″,3 (§. 252), la qual cosa dimostra che *la bomba impiega maggior tempo nella discesa che nella salita della traiettoria.* Il tempo totale del moto sarà $T + T' = 29'',9$.

Dagli esempii riguardanti la bomba da dieci risulta il quadro seguente

Velocità iniziale.	398^m
Altezza della gettata	1137^m
Ampiezza del ramo discendente	953^m
Velocità al vertice.	82^m,6
Tempo pel ramo ascendente.	12″,3
Tempo totale.	29″,9
Angolo di proiezione.	45°
Ampiezza del ramo ascendente.	1666^m
Ampiezza totale	2619^m
Velocità finale.	114^m
Tempo pel ramo discendente	17″,6
Angolo di caduta	73°.39′.6″.

254. Esponiamo la seguente tavola tratta da Persy a fine di paragonare i risultamenti del metodo proposto, con quelli dei metodi di Bezout e di Legendre supponendo la densità dell'aria variabile, e con quelli che ne dà Eulero, il quale considera costante la densità dell'atmosfera.

TAVOLA XXXVIII.

	RISULTAMENTI.	DATI	METODO di EULERO	METODO PROPOSTO	METODO di Legendre.	METODO di Bezout.
Altezza della gettata	Y		0,52759	0,530972	0,5362	0,5574
Ampiezza del ramo ascendente.	X'		0,54421	0,547622	0,5514	0,5697
Idem del discendente	X''	$\alpha=60^\circ$	0,44659	0,45472	0,4466	0,4517
Ampiezza totale.	X	$h=1$	0,99080	1,0023	0,9981	1,0214
Altezza della velocità al vertice.	H		0,1139	0,1200	0,1139	0,1139
Angolo di caduta.	α'		69°.36′	68°.44′.12″	»	70°.2′
Altezza della velocità finale.	Z''		0,4516	0,44544	»	0,5236
Altezza dalla gettata	Y		1,3975	1,40636	1,3962	1.5193
Ampiezza del ramo ascendente.	X'		2,0424	2,06075	2,0274	2,1990
Idem del discendente	X''		1,1531	1,17964	1,1470	1,2050
Ampiezza totale.	X	$\alpha=45^\circ$	3,1955	3,24039	3,1744	3,4020
Altezza della velocità al vertice.	H	$h=10$	0,4007	0,43076	0,4007	0,4007
Angolo di caduta	α'		74°.8′	73°.39′.6″	»	72°.53′.3″
Altezza della velocità finale.	Z''		0,7709	0,81256	»	1,1605
Tempo pel ramo ascendente.	T		»	15″,116	14″,94	»
Idem pel discendente	T'		»	21″,561	21″,03	»
Tempo totale	$T+T'$		»	36″,677	35″,97	37″,17
Altezza della gettata	Y		0,0479	0,0481	»	0,0482
Ampiezza del ramo ascendente.	X'		0,0944	0,0945	»	0,0974
Idem del discendente	X''		0,0913	0,0915	»	0,0914
Ampiezza totale.	X		0,1858	0,1860	»	0,1861
Altezza della velocità al vertice.	H	$\alpha=45^\circ$	0,0448	0,0452	»	0,0448
Angolo di caduta	α'	$h=0,1$	46°.56′	46°.49′	»	47°.0′.47″
Altezza della velocità finale.	Z''		0,0865	0,0868	»	0,0869
Tempo pel ramo ascendente.	T		»	3″,425	»	3″,428
Idem pel discendente	T'		»	3″,479	»	3″,490
Tempo totale	$T+T'$		»	6″,905	»	6″,918
Altezza della gettata	Y		»	0,1617	0,1616	0,1620
Ampiezza del ramo ascendente.	X'		»	1,4807	1,4780	1,4825
Idem del discendente	X''		»	0,9943	0,9916	0,9933
Ampiezza totale.	X		»	2,4750	2,4696	2,4758
Altezza della velocità al vertice.	H	$\alpha=10^\circ$	»	2,1893	2,1854	2,1854
Angolo di caduta	α'	$h=10$	»	21°.17′.32″	»	21°.19′
Altezza della velocità finale.	Z''		»	0,9210	»	0,9278
Tempo pel ramo ascendente.	T		»	5″,568	»	»
Idem pel discendente	T'		»	6″,865	»	»
Tempo totale	$T+T'$		»	12″,483	12″,41	12″,41

Vuolsi qui osservare essere il tempo solamente quello che appartiene alla palla da 24, e ciò per le ragioni dichiarate nel §. 203. Gli altri valori generali si addicono a tutte le armi che soddisfano alla condizione di $\frac{V^2}{c}=\frac{V'^2}{c'}$, e che si adoperano con eguali angoli di proiezione (§. 197), vale a dire si adattano a tutte le armi, i cui proietti descrivono traiettorie simili.

In quanto poi appartiene ai valori delle diverse circostanze del moto, inserite nella tavola presente, Persy in tal modo si esprime. . . .

« Esaminando questa tavola conviene osservare, da una » parte, che per la natura del metodo proposto, le portate » debbono essere più grandi di quelle che si ottengono nella » ipotesi di un'aria uniformemente densa, la qual cosa in ef- « fetto accade: dall'altro lato, che secondo il metodo di Le- » gendre (n.° 50 della sua Memoria), l'ampiezza del ramo » ascendente e l'altezza della gettata sono troppo grandi al » disopra di 45°, e troppo piccole al disotto. Ora col proposto » metodo queste quantità sono minori nel primo caso e più » grandi nel secondo, se si paragonano con quelle ottenute col » metodo di quel geometra. In generale l'altezza dovuta alla » velocità del vertice è costantemente un poco più grande » di $\frac{1}{C}$, che è il valore di tale altezza nella ipotesi di una » costante densità. Gli altri risultamenti son molto prossimi a » quelli dati da Eulero, e da Legendre, ma tutti sono minori » di quelli valutati col metodo di Bezout. Il caso di $\alpha=45°$, » $h=10$ fu trattato in altri metodi da Legendre, che ne ha » ottenuto $Y=1,4062$, $X=3,1988$. Supponendo poi che la » densità diminuisca di $\frac{1}{5}$ alla sommità, ricava $Y=1,43971$, » $X=3,36989$, $T+T'=37'',82$: tra i quali risultamenti an- » che i nostri sono compresi.

» È dunque indubitato, che senza eseguire calcoli molto la-

» boriosi, il proposto metodo offre un'approssimazione gran-
» dissima, e che di molto avanza quella datane da Bezout e
» da Eulero. Perciocchè in quel metodo si tiene conto in qual-
» che maniera anche della diminuzione di densità atmosferica
» verso il vertice della traiettoria, la qual diminuzione in molti
» casi della balistica è sensibilissima.

» Il citato metodo ha pure il vantaggio di poter determinare
» tutte le circostanze del moto de' proietti. E però usandolo
» per la costruzione delle tavole del tiro darà risultamenti tali,
» le cui differenze saranno più uniformi di quelle di Legendre,
» il quale si è giovato di differenti metodi secondo le occor-
» renze, ed in conseguenza col nostro metodo le interpolazioni
» si eseguiranno con più esattezza.

» Bezout ha accomodato il suo metodo alle pruove fatte a
» la Fére nel 1771, le quali sono rapportate nel suo corso di
» Matematica all'uso dell'artiglieria, tomo IV pagina 456 e 460.
» Le palle da 24 e le bombe da 12 sono state tirate, le prime
» con la carica di libbre 8 $\frac{1}{2}$ di polvere, le altre con libbre 3 $\frac{3}{4}$,
» con gli angoli in progressione di 5 e 10 fino a 17°, e con
» ciascun angolo più volte successivamente tirate. I quadri dei
» risultamenti fan conoscere che le portate calcolate non si ac-
» cordano molto nè con le portate osservate, nè fra loro. Che
» le prime sono in generale minori delle seconde per le palle,
» ed il contrario interviene per le bombe. In verità l'autore
» ha determinato la velocità iniziale con le portate medie, ot-
» tenute sotto un angolo molto piccolo, il quale ha fatto sì
» che la densità dell'aria non ha influito sensibilmente negli
» effetti: ma egli si è giovato del proprio suo metodo che dà
» le portate molto lunghe, la qual cosa è cagione di due op-
» posti errori. Non si può dunque niente conchiudere a favore
» de' risultamenti profferti dal metodo di Bezout paragonati con
» quelli che col citato metodo si conseguono.

TEORICA XV.

Angoli di proiezione che danno la massima ampiezza.

255. Si è dimostrato (§. 7) che l'angolo della massima portata nel vôto è di 45.° Nell'aria per altro dovrà essere minore per la resistenza che sperimenta il mobile. Borda, Légendre ed altri valenti matematici si sono occupati nella ricerca dell'angolo in disamina, e con principii generali ne mostrano la natura, in funzione della velocità iniziale, e di altre quantità note. I risultamenti da essi ottenuti sono più o meno discordi fra loro, poichè hanno fondate le corrispondenti teoriche sopra differenti raziocinii. Ma essendo poco discrepanti i valori che essi sono venuti determinando, le applicazioni ai fatti se ne possono giovare con molto vantaggio. Sulle considerazioni del §. 199 si è fondata da Borda la teorica, che dà l'angolo della massima ampiezza: infatti facendo nella formola (15. §. 195)

$$x=\frac{1}{\cos\alpha},\ \text{ed}\ y=0\ \text{si avrà}$$

$$0=\left(\tan\alpha+\frac{1}{2h\cos\alpha}\right)x-\frac{1}{2h}\left(e^{\frac{x}{\cos\alpha}}-1\right)\ldots\ldots(h)$$

differenziando rispetto ad x ed α si ottiene

$$\left(\frac{1}{\cos\alpha}+2h\tan\alpha-\frac{1}{\cos\alpha}e^{\frac{x}{\cos\alpha}}\right)dx+$$

$$\left(x\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha}+2hx\frac{1}{\cos^2\alpha}-x\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha}e^{\frac{x}{\cos\alpha}}\right)d\alpha=0.$$

in conseguenza

$$\frac{dx}{d\alpha}=-\frac{x\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha}+2hx\frac{1}{\cos^2\alpha}-x\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha}e^{\frac{x}{\cos\alpha}}}{\frac{1}{\cos\alpha}+2h\tan\alpha-\frac{1}{\cos\alpha}e^{\frac{x}{\cos\alpha}}};$$

eguagliando questo coefficiente differenziale a zero, si ottiene, con mettere il numeratore eguale a zero,

$$\operatorname{sen}\alpha + 2h = \operatorname{sen}\alpha\, e^{\frac{x}{\cos\alpha}}, \text{ ed } e^{\frac{x}{\cos\alpha}} = 1 + \frac{2h}{\operatorname{sen}\alpha}; \text{ da cui}$$

$$x = \cos\alpha \log.\mathrm{ip}\left(1 + \frac{2h}{\operatorname{sen}\alpha}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (m)$$

L'equazione (h) ridotta alla forma

$$(1 + 2h \operatorname{sen}\alpha)\frac{x}{\cos\alpha} = e^{\frac{x}{\cos\alpha}} - 1;$$

e sostituendovi i due ultimi valori dà

$$\left(\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2h}\right)\log.\mathrm{ip}\left(1 + \frac{2h}{\operatorname{sen}\alpha}\right) = 1 \; . \; . \; . \quad (74);$$

la quale equazione darà l'angolo della massima ampiezza, che si rinverrà sostituendo questo angolo nella formola (m).

La formola ultima dimostra che l'angolo della massima ampiezza è una funzione di $2h$ ossia della velocità iniziale. E siccome detta velocità può ancora variare, così possiamo considerare la condizione che ci vuole affinchè $\operatorname{sen}\alpha$ diventi un massimo. A tale oggetto differenziando detta equazione rispetto a $\operatorname{sen}\alpha$ e $2h$ si ottiene dopo le riduzioni

$$\left[\left(2\operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{2h}\right)\log.\mathrm{ip}\left(1 + \frac{2h}{\operatorname{sen}\alpha}\right) - \left(\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2h}\right)\frac{2h}{\operatorname{sen}^2\alpha + 2h\operatorname{sen}\alpha}\right] d\operatorname{sen}\alpha +$$

$$\left[\left(\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2h}\right)\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha + 2h} - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{(2h)^2}\log.\mathrm{ip}\left(1 + \frac{2h}{\operatorname{sen}\alpha}\right)\right] d2h = 0.$$

Rinvenendo il valore di $\frac{d \operatorname{sen} \alpha}{d\, 2h}$, e ponendolo eguale a zero per le regole de'massimi e minimi, si avrà, mettendo eguale a zero il coefficiente di $2h$,

$$\left(\operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{2h}\right) \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha + 2h} - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{(2h)^2} \log.\mathrm{ip}\left(1 + \frac{2h}{\operatorname{sen} \alpha}\right) = 0,$$

giacchè pel logaritmo iperbolico di $1 + \frac{2h}{\operatorname{sen} \alpha}$, si può mettere il suo valore preso dalla formola (74), avremo

$$\left(\operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{2h}\right) \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha + 2h} - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{(2h)^2} \cdot \frac{2h}{2h \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen} \alpha} = 0:$$

e facendo quindi le riduzioni, risulta

$$2h \operatorname{sen}^3 \alpha + 2 \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75);$$

dalla quale $2h = \frac{1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^3 \alpha}$, onde $\frac{2h}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^4 \alpha}$, $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{h} = \frac{\operatorname{sen}^4 \alpha}{1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha}$, sostituendo ora questi valori nella (74) risulta

$$\left(\operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{\operatorname{sen}^4 \alpha}{1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha}\right) \log.\mathrm{ip}\left(1 + \frac{1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^4 \alpha}\right) = 1;$$

facendo le riduzioni avrassi

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha)}{1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha} \log.\mathrm{ip}\left(\frac{\operatorname{sen}^4 \alpha - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 1}{\operatorname{sen}^4 \alpha}\right) = 1; \text{ e}$$

$$\log.\mathrm{ip}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha - 1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}\right)^2 = \frac{\frac{1}{2} - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \alpha (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha)}.$$

Questa equazione resta soddisfatta facendo $\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{2}$, ossia $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. In conseguenza $\alpha = 45^\circ$, come accade nel vôto. Essendo ora pervenuti ad una verità di già conosciuta, ne possiamo conchiudere, che l'equazione (74) da cui una tal verità è derivata, dimostra la esistenza di un angolo di proiezione che nell'aria dà la massima ampiezza. A confermare maggiormente una tale verità si osservi, ch'essendo $\frac{c}{2}$ l'unità lineare,

per rendere omogenea l'equazione (75), bisogna dividere il primo termine del primo membro per questa unità, poichè $\text{sen}^3\alpha$ e $\text{sen}^2\alpha$ sono numeri indicanti rapporti; dunque

$$\frac{2h}{\frac{1}{2}c}\text{sen}^3\alpha + 2\,\text{sen}^2\alpha = 1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(i);$$

e sostituendovi per $\text{sen}\,\alpha\ \frac{1}{\sqrt{2}}$, viene $\frac{4h}{c}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} + 2\times\frac{1}{2} = 1$, e $\frac{4h}{c}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} = 0$; ossia $\frac{2V^2}{gc}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} = 0$, ma $\frac{2}{g}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}$ non è eguale a zero, lo sarà dunque $\frac{V^2}{c}$; e $\frac{V^2}{c} = 0$, equazione che può sussistere o facendo $V = 0$, o pure $c = \infty$ come accade nel vôto (§. 190). La equazione (i) con questa ultima ipotesi dà $2\,\text{sen}^2\alpha = 1$, $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, e $\alpha = 45°$ conforme a quello che si è dimostrato (§. 7) pel vôto.

Ciò premesso se nella equazione (i) non si fa nè $h = 0$, nè $c = \infty$, esisterà il primo termine, e $\text{sen}\,\alpha$ dovrà essere minore di $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ossia l'angolo α della massima ampiezza nel mezzo resistente emerger deve minore di 45°. Ed a misura che $\frac{h}{c}$ o pure $\frac{V^2}{c}$ aumenta, detto angolo diminuirà: ma è $c = \frac{4aD}{3k}$ (§. 59), perciò $\frac{V^2}{c} = \frac{3k}{4}\cdot\frac{V^2}{aD}$; e siccome $\frac{3k}{4}$ è costante, così la grandezza dell'angolo in parola dipenderà da $\frac{V^2}{aD}$. *Vale a dire, che se la velocità iniziale rimarrà costante, l'angolo della massima ampiezza diminuirà col diametro e con la densità del proietto. Se rimarrà costante la densità ed il diametro del mobile, l'angolo diminuirà con l'accrescersi la velocità iniziale.*

La formola (74) dà il valore dell'angolo della massima portata. Una tale equazione è identica all'altra

$$\left(\text{sen}^2\alpha+\frac{\text{sen}\,\alpha}{2h}\right)\log\left(1+\frac{2h}{\text{sen}\,\alpha}\right)=\frac{1}{2,30258}, \text{ o pure a}$$

$$\left(\text{sen}^2\alpha+\frac{\text{sen}\,\alpha}{2h}\right)\log\left(1+\frac{2h}{\text{sen}\,\alpha}\right)=0,4343. \quad . \quad . \quad . \quad (76).$$

Per fare un'applicazione sia $h=10$, si avrà

$$\left(\text{sen}^2\alpha+\frac{\text{sen}\,\alpha}{20}\right)\log\left(1+\frac{20}{\text{sen}\,\alpha}\right)=0,4343;$$

il valore di α si rinviene mediante la falsa posizione. Sia dunque per prima posizione $\alpha=30°$, e sarà $\text{sen}\,30°=\frac{1}{2}$, quindi $(\frac{1}{4}=\frac{1}{40})$ $\log(1+40)=0,4343$, e $\frac{11}{40}\times1,61278=0,443514$, perciò il primo errore sarà $0,443514-0,4343=+0,009214$.

Sia $\alpha=31°$ la seconda posizione, ed avremo $\text{sen}\,31°=0,51504$, $\text{sen}^2\,31°=0,26526$, dunque

$$\left(0,26526+\frac{0,51504}{20}\right)\log\left(1+\frac{20}{0,51504}\right)=0,4343, \text{ e}$$

$0,29101\times\log 39,83=0,29101\times1,60021=0,46568$ circa: il secondo errore sarà $0,46568-0,4343=+0,03138$. Il quadro della regola verrà

1.ª 30° posizioni 2.ª 31°

$\times$

$+0,009214$ errori $+0,03138$

$31\times0,009214=0,285634$

$30\times0,03138=0,941400$ la differenza è

$0,655766$; perciò

$\frac{0,655766}{0,022166}=29°.35'$ circa, che sarà l'angolo della massima ampiezza per tutte le armi che soddisfano la condizione di $\frac{h}{\frac{1}{2}c}=10$.

Per la bomba da dieci $\frac{h}{\frac{1}{2}c} = 10$ corrisponde alla velocità iniziale di 398^m (§. 235). L'ampiezza analoga si troverà sostituendo per α 29°. 35′ nella formola (h); ed operando poscia il metodo della falsa posizione si verrà a conoscere il valore della portata massima.

Per la palla da $24 \frac{h}{\frac{1}{2}c} = 10$ appartiene alla velocità iniziale di 361^m (§. 200): perciò la elevazione di 29°. 35′ data al cannone produrrà la massima portata.

Nella formola (76) facendo $h = 1$ si ha $\alpha = 38°.3'$ per l'angolo dell'ampiezza massima. Quindi è che gli angoli di elevazione che producono la massima ampiezza, sono compresi fra 29°. 35′ e 38°. 3′ per tutte le armi che comunicano ai rispondenti proietti le velocità dipendenti dalle altezze comprese fra $h = 10$ ed $h = 1$.

Intanto è da notarsi, che il metodo di cui parliamo, seguito da Borda, come si è detto, è fondato sulla formola (15. §. 199), la quale imperfettamente esprime la natura della traiettoria: perciocchè il coefficiente ϖ non è rigorosamente ben determinato per i grandi angoli di proiezione. Per conseguenza quelli che si hanno della indicata formola dovranno differire in meno, benchè di pochi gradi, come vedremo, paragonati agli altri che troveremo seguendo un metodo più esatto.

256. Supponiamo un'arma elevata sull'orizzonte, e che spinga il suo proietto con la velocità iniziale corrispondente all'altezza h, e di tutte le ampiezze siano $\varpi', \varpi'', \varpi'''$ le più grandi che si hanno con i tre angoli consecutivi $\alpha', \alpha'', \alpha'''$. Apparisce chiaramente che il metodo è basato sulla conoscenza delle tavole delle portate, le quali si suppongono costruite. Sia quindi generalmente

$$\varpi = A + B\alpha + C\alpha^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a).$$

l'ampiezza massima in funzione dell'angolo α che la produce.

E poichè x dev'essere un massimo, si esegua la differenziazione rispetto ad α ed x, ed il coefficiente differenziale si ponga eguale a zero, ossia $\frac{dx}{d\alpha} = B + 2C\alpha = 0$, ed

$$\alpha = -\frac{B}{2C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b).$$

Da questa espressione si comprende il perchè l'equazione (a) si è dovuta necessariamente comporre di due potenze di α anzichè di una sola.

Le quantità A, B, e C, sono coefficienti da determinarsi con le date condizioni. Ciò posto l'equazione (a) dovrà rimanere soddisfatta tre volte come segue

$$x' = A + B' + C\alpha'^2$$
$$x'' = A + B'' + C\alpha''^2$$
$$x''' = A + B''' + C\alpha'''^2.$$

Togliendo dalla seconda la prima equazione, e dalla terza togliendo la seconda si avrà

$$\frac{x'' - x'}{\alpha'' - \alpha'} = B + C(\alpha'' + \alpha')$$

$$\frac{x''' - x''}{\alpha''' - \alpha''} = B + C(\alpha''' + \alpha'').$$

Sia pertanto
$x'' - x' = Dx'$, $x''' - x'' = Dx''$, $Dx'' - Dx' = D^2x'$, ed $\alpha'' - \alpha' = \alpha''' - \alpha'' = 5°$, da cui $\alpha''' - \alpha' = 10°$; in conseguenza

$$\frac{Dx'}{5} = B + C(\alpha'' + \alpha')$$

$$\frac{Dx''}{5} = B + C(\alpha''' + \alpha'');$$

sottraendo l'una dall'altra viene

$C = \frac{Dx'' - Dx'}{5(\alpha''' - \alpha')} = \frac{D^2x'}{50}$; e perciò $B = \frac{Dx'}{5} - C(\alpha'' + \alpha') =$

$\frac{Dx'}{5} - \frac{D^2x'}{50}(\alpha'' + \alpha')$, ed

$$A = x' - B\alpha - C\alpha^2 = x' - \frac{Dx'}{5}\alpha' + \frac{D^2x'}{50}\alpha'(\alpha'' + \alpha') - \frac{D^2x'}{50}\alpha'^2,$$

infine

$$A = x' - \left(\frac{Dx'}{5} - \frac{D^2x'}{50}\alpha''\right)\alpha', \text{ percui}$$

$$x = x' - \left(\frac{Dx'}{5} - \frac{D^2x'}{50}\alpha''\right)\alpha' + \left[\frac{Dx'}{5} - \frac{D^2x'}{50}(\alpha'' + \alpha')\right]\alpha + \frac{D^2x'}{50}\alpha^2 =$$

$$x' + \frac{\alpha - \alpha'}{5}Dx' - \frac{D^2x'}{50}(-\alpha''\alpha' + \alpha''\alpha + \alpha'\alpha - \alpha^2) =$$

$$x' + \frac{\alpha - \alpha'}{5}Dx' - \frac{D^2x'}{50}(\alpha - \alpha')(\alpha'' - \alpha); \text{ infine}$$

$$X = x' + \frac{\alpha - \alpha'}{5}\left(Dx' - \frac{\alpha'' - \alpha}{10}D^2x'\right) \quad . \; . \; . \; (77),$$

per l'ampiezza massima.

Sostituendo in (*b*) i valori di B e C, si otterrà

$$\alpha = \frac{\alpha' + \alpha''}{2} - \frac{5Dx'}{D^2x'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (78),$$

pel corrispondente angolo.

La tavola di Legendre nel caso di $h = 9$ dà per le tre consecutive portate massime, e pei corrispondenti angoli di elevazione, $\alpha' = 30° \ldots x' = 3{,}2333$, $\alpha'' = 35° \ldots x'' = 3{,}2388$, $\alpha''' = 40° \ldots x''' = 3{,}1875$, e perciò $x'' - x' = Dx' = 0{,}0055$, $x''' - x'' = Dx'' = -0{,}0513$, $Dx'' - Dx' = D^2x' = -0{,}0568$.

Con questi dati la formola (78) darà

$$\alpha = \frac{30° + 35°}{2} + \frac{5 \times 0{,}0055}{0{,}0568} = \frac{65°}{2} + 0{,}48415 = 32°{,}5 + 0{,}48415,$$

ed

$$\alpha = 32°{,}98415,$$

angolo della massima portata.

La formola (77) dà $X = 3{,}2333 +$

$$\frac{32°{,}98415 - 30°}{5}\left(0{,}0055 + \frac{35° - 32°{,}98415}{10} \times 0{,}0568\right) =$$

$2{,}2333 + 0{,}59629\,(0{,}0055 + 0{,}201585 \times 0{,}0568) = 2{,}2333 \times 0{,}01015$, ed $X = 2{,}4343$ per la massima ampiezza.

Con lo stesso metodo per gli altri valori di h, Legendre compila la seguente tavola:

TAVOLA XXXIX.

VALORI di h	ANGOLI della più grande PORTATA	DIFFERENZE	PORTATE	DIFFERENZE
1	41°, 0305		1,18149	
		2°,2495		0,57309
2	38°, 7810		1,75458	
		1°,5238		0,37854
3	37°, 2572		2,13312	
		1°,0837		0,28113
4	36°, 1735		2,41425	
		0°,4565		0,22586
5	35°, 7170		2,64011	
		0°,7616		0,18329
6	34°, 9554		2,82340	
		0°,9739		0,15838
7	33°, 9815		2,98178	
		0°,5920		0,13719
8	33°, 3895		3,11897	
		0°,4053		0,12445
9	32°, 9842		3,24342	
		0°,3175		0,11084
10	32°, 6667		2,35426	

257. Ad oggetto di far conoscere la maniera di usare questa tavola, prendiamo a considerare la bomba da dieci: la quale sia spinta con la velocità iniziale di 300^m, e si cerchi di conoscere la massima portata e l'angolo di proiezione corrispondente.

Vogliamo avvertire, che volendo molta esattezza nelle ricerche, nel valore di c per k conviene sostituire l'esatto nu-

mero, e non già 0,9 (§. 59). A tal fine si osservi la tavola XIII (§. 57), nella quale alla velocità di 300^m corrisponde $k = \frac{1,77}{2} = 0,88$: quindi pel detto proietto si avrà

$\log c = \log \frac{4aD}{3 \times 0,88} = \log \frac{4aD}{3} + \log \frac{100}{88} = 5,16290 - \log 88 =$ 3,21842. Facendo uso dell'unità lineare $\frac{1}{2}c$, avremo $\frac{h}{\frac{1}{2}c} = \frac{V^2}{2g}$, e

$\log V^2 (= 300^2)$. . . .	4,95424
com. $\log c$.	6,78158
com. $\log g$.	9,00838
	0,74420
$\frac{h}{\frac{1}{2}c}$.	5,549.

Nella suddetta tavola, si noti che questo valore di h nella prima colonna cade fra i numeri 5 e 6; perciò si conchiude che l'angolo della massima portata dovrà cadere fra quelli inseriti nella seconda colonna corrispondenti a questi valori di h, cioè fra 35°.7170, e 34°,9554, per conseguenza si userà nella ricerca il metodo delle parti proporzionali, ossia

$6 - 5 : 5,549 - 5 :: 35°,7170 - 34°,9554$: al quarto, e
$1 : 0,549 :: 0,7616$: al quarto q; $\log q = \log 0,549 +$
$\log 0,7616 = 9,73954 + 9,88173 = 9,62127$, e
$q = 0,4181$ circa.

Dunque questo valore tolto dall'angolo che trovasi in corrispondenza della velocità di cui $h = 5$ si avrà $35°,7170 - 0,4181 = 35°,2989$, ch'è l'angolo richiesto.

Per trovare la corrispondente portata massima, si usa anche la detta tavola, e la solita proporzione, ossia essendo l'angolo 35°,2989 compreso fra gli angoli 35°,717 e 34°,9554, la richiesta portata dovrà cadere fra 2,64011 e 2,82340; percui

$35°,7170 - 34°,9554 : 35°,7170 - 35°,2989 :: 2,82340 -$

$2,64011 : q$, o pure $0,7616 : 0,4181 :: 0,18329 : q$, e
$\log q = \log 0,4181 + \log 0,18329 + \text{com. log } 0,7616$, e

log. 0,4181	9,62128
log. 0,18329.	9,26316
com.log. 0,7616	0,37873
log q	9,26317

$q = 0,1833$;

e la richiesta portata sarà eguale a $2,64011 + 0,1833 = 2,82341$.

Riducendo questo numero in metri si avrà

$X = 2,82341 \times \frac{1}{2}c = 1,41170c$

log 1,4117.	0,14974
log c.	3,21842
log X.	3,36816

$X = 2334^m$.

Da questo esempio si rileva che la bomba da 10, allorquando sia spinta con la velocità iniziale di 300^m, dà per massima ampiezza 2334 metri, purchè il mortaro tiri con l'angolo di 35°,2989 di elevazione.

258. Sia l'angolo di 36° quello che produr debba la massima ampiezza: si domanda qual sarà la velocità costante perchè si produca l'ampiezza medesima.

Siccome l'angolo di 36° è compreso fra gli angoli di 36°,1735 e 35°,7170 della medesima tavola, così la h da valutare dovrà trovarsi fra 4 e 5 della prima colonna; e si avrà

$36°,1735 - 35°,7170 : 36,1733 - 36° :: 5 - 4 : q$, o pure

$0,4565 : 0,1735 :: 1 : q = \frac{0,1735}{0,4565}$, e

log. 0,1735	9,23930
com.log. 0,4565	0,34045
log. q	9,57975

$q = 0,380$ circa;

dunque $h = 4 + 0,380 = 4,380$.

Ripristinando la unità $\frac{1}{2}c$ si avrà $h = 4,380 \times \frac{1}{2}c$; ma siccome nella c non si conosce k, poichè la velocità iniziale della bomba è incognita; così terremo il metodo seguente, accennato da Persy, per assegnare il giusto valore al coefficiente $\frac{1}{2}c$.

Si valuti il valore di $h = 4,380 \times \frac{1}{2}c$, considerando $k = 1$, e per distinzione si esprima con h'; quindi $\log h' = \log 4,380 +$ com. $\log 2 + \log c$, e

$\log 4,380$	0,64147
$\log c$ (Tav. XV) . . .	3,16290
com. $\log 2$	9,69897
$\log h'$	3,50334;

ma $v'^2 = 2gh'$, perciò

$\log 2$	0,30103
$\log g$	0,99162
$\log h'$	3,50334
	4,79599 la metà è
$\log v'$	2,39799

$v' = 250^m$ circa.

Si rileva dalla tavola (XIII. §. 57), che a tal velocità corrisponde prossimamente $k = \frac{1,62}{2} = 0,81$, e in conseguenza pel nostro esempio il valore di c sarà $\frac{4aD}{3 \times 0,81}$; e $\log c =$ $\log \frac{4aD}{3} + \log \frac{100}{81} = 5,16290 - 1,90849 = 3,25441$; quindi

$\log c$	3,25441
com. $\log 2$	9,69897
$\log 4,380$	0,64147
$\log h$	3,59485, e

quindi $V^2 = 2hg$, e

$\log 2$	0,30103
$\log g$	0,99162
$\log h$	3,59485
	4,88750, la metà è
$\log V$	2,44375

$V = 277^m$ circa.

Essendo 4,380 un numero compreso fra 4 e 5 nella prima colonna della ripetuta tavola; la portata massima cadrà fra 2,41425 e 2,64011 della terza colonna. Si faccia dunque

$$5 - 4 : 4,380 - 4 :: 2,64011 - 2,41425 : q, \text{ o pure}$$

$$1 : 0,380 :: 0,22586 : q, \text{ e quindi}$$

$$\begin{array}{ll} \log. 0,380 \ldots\ldots & 9,57978 \\ \log. 0,22586 \ldots\ldots & 9,35384 \\ \hline \log q \ldots\ldots\ldots & 8,93362 \end{array}$$

$$q = 0,0858 \text{ circa.}$$

E per la portata massima sarà

$X = 2,41425 + 0,0858 = 2,50005$; ed in metri verrà

$X = 2,5000 \times \frac{1}{2}c$; prendendo i logaritmi

$$\begin{array}{ll} \log 2,5000 \ldots\ldots & 0,39794 \\ \text{com.}\log 2. \ldots\ldots\ldots & 9,69897 \\ \log c. \ldots\ldots\ldots & 3,25441 \\ \hline \log X \ldots\ldots\ldots & 3,35132 \end{array}$$

$$X = 2246^m \text{ circa.}$$

Vale a dire che il mortaro da 10, con l'angolo di elevazione di 36°, spinge la bomba alla distanza massima di 2246 metri, purchè la velocità iniziale sia di 277 metri.

259. Sia data la lunghezza di 2000^m considerata come portata massima del mortaro da 10; si vuol conoscere la velocità, e l'angolo di proiezione.

Si valutino i 2000^m con l'unità $\frac{1}{2}c$ nella ipotesi di $k = 1$; si avrà $\frac{2000}{\frac{1}{2}c} = \frac{4000}{c}$; e $\log \frac{4000}{c} = \log 4000 + \text{com.}\log c =$ $3,60206 + 6,83710 = 0,43916$, e quindi il numero corrispondente 2,749 circa, sarà la portata ridotta.

Si riscontri l'ultima tavola, nella quale si osserva che questa portata cade fra le altre 2,64011 e 2,82340; onde per avere h' si dovrà stabilire la ripetuta proporzione,

$$2,82340 - 2,64011 : 2,749 - 2,64011 :: 6 - 5 : q, \text{ e}$$

$$0,19329 : 0,10889 :: 1 : q = \frac{10889}{19329};$$

log 10889.	4,03699
com. log 19329	4,28620
log q.	8,32319

$$q = 0,021 \text{ circa};$$

quindi h' viene eguale a 5,021: e valutata in metri risulta $h' = 5,021 \times \frac{1}{2}c$, e $V'^2 = 2gh' = 5,021\,cg$: dunque

log 5,021	0,70079
log g.	0,99162
log c.	3,16290
	4,85531
log V'	2,42765

$$V' = 268^m \text{ in circa.}$$

Nella tavola XIII (§. 57) a questa velocità corrisponde prossimamente $k = \frac{1,69}{2} = 0,84$: numero da sostituirsi in c, appartenente al nostro caso. Per la qual cosa

$$\log c = \log \frac{4aD}{3} + \log \frac{100}{84} = 5,16290 - 1,92428 = 3,23862; \text{ e}$$

$$\log \frac{2000}{\frac{1}{2}c} = \log 4000 + \text{com.log } c;$$

log 4000	3,60206
com. log c.	6,76138
	0,36444 il n.° è

2,30911 il quale corrisponde alla portata di 2000 metri ridotti con la unità lineare appartenente al caso proposto.

Dopo questa operazione preparatoria si riscontri la cennata tavola, e si osservi che la portata 2,30911 cade fra le altre 2,13312, e 2,41425: quindi è che la velocità iniziale dovrà comprendersi fra i numeri 3, e 4, della prima colonna, e l'angolo tra 37°,2572 e 36°,1735.

260. In quanto alla velocità iniziale si stabilisca la proporzione 2,41425—2,13312:2,30911—2,13312:: 4—3 : q, ossia 0,28113 : 0,17599:: 1 : q

log. 0,17599.	9,24548
com.log. 0,28113	0,55110
log q	9,79658

$q = 0,626$,

e conseguentemente la velocità iniziale spetterà all' altezza $3 + 0,626 = 3,626$, la quale ridotta in metri dà $V^2 = 2gh = 3.626.cg$, e

log 3,626.	0,55943
log c.	3,23862
log g.	0,99162
	4,78967
log V	2,39483

$V = 248^m$.

Per rinvenire l' angolo che dia la stabilita portata come massima, si faccia

0,28113 : 0,17599 :: 37°,2572—36°,1735 : q, o pure

0,28113 : 0,17599 :: 1°, 0837 : q, e

log. 0,17595	9,24548
log 1,0837	0,03491
com. log. 0,28113	0,55110
log q.	9,83149

$q = 0,6784$,

e l'angolo richiesto risulterà di 37°,2572—0,6784 = 36°,5788. Cioè l'angolo di elevazione di 36°,5788 nel mortaro da 10 produce la portata massima di 2000^m, allorchè la velocità iniziale della bomba sia di 243^m.

Dagli scorsi paragrafi si apprende il modo di usare la tavola XXXIX (§. 256) negli esempii particolari: quale tavola sarebbe maggiormente utile se fosse continuata pei valori di h minori dell' unità, e per quelli maggiori di 10.

261. Paragonando gli angoli che si hanno con la formola (76. §. 255) con quelli di essa tavola, si scorge che i primi sono costantemente minori de'secondi per 3° in circa. Quindi nelle applicazioni allorquando è data una velocità iniziale che non sia compresa fra quelle della enunciata tavola, si può far uso della detta formola. Per avere poi l'angolo della massima portata conviene aumentare l'angolo, rinvenuto con la formola, per 3°: e così si avrà un tal valore che pochissimo potrà differire dal vero. La massima portata poi si potrà ottenere facendo uso prima della formola (52. §. 244) per conoscere X' ampiezza del ramo ascendente, e quindi dell'altra (25. §. 258) appartenente al ramo discendente (§§. 247. 248): in conseguenza $X = X' + X''$ sarà la detta portata.

Le formole inserite nell'antecedente teorica della balistica, faranno conoscere le altre circostanze del moto, sostituendo in esse i dati rinvenuti come sopra (§. 256 e seguenti), riguardanti gli angoli che danno la massima portata.

Infine possiamo anche desumere da tutto l'esposto, che sia un errore il credere che per tutte le armi, e per tutte le velocità iniziali, l'angolo della massima portata nel mezzo resistente sia costantemente di $43° \frac{1}{2}$; ma un tal angolo dipenderà dal rapporto $\frac{h}{\frac{1}{2}c}$ come in altro luogo si è pure fatto osservare.

FINE DELLA QUINTA PARTE.

PARTE SESTA.

TEORICA I.

Recesso.

262. Le formole stabilite antecedentemente fra la velocità e la lunghezza dell'anima, cui percorre il proietto innanzi la carica, potrebbero condurre a determinare il corrispondente tempo. Ma esse ne menerebbero ad integrazioni tali da dare serie di nessuna utilità per la ricerca del tempo. Perchè oltrechè son queste soggette a leggi poco uniformi, riescono talmente complicate da non poter decidere con facilità della loro convergenza, come lo mostrano chiaramente le nozioni discorse di sopra (Par. 3.ª teor. V). E ciò senza far conto di altre cagioni, che ne renderebbero il metodo oltremodo complicato. Per siffatte difficoltà noi rinverremo il tempo in disamina con soddisfacente approssimazione, senza però perder di mira che lo scopo è quello di far conoscere in maniera qualunque la istantaneità del detto tempo, per quindi farci a parlare del *recesso*.

Sia L la lunghezza dell'anima di un'arma situata con l'asse orizzontale, b quella della carica, V la velocità iniziale, e t il tempo che impiega il proietto a percorrere la lunghezza $L-b$.

Supponiamo che il proietto faccia il tragitto con moto equabile e con una velocità media fra zero e V, cioè fra zero e la velocità alla bocca, ossia con la velocità $\frac{0+V}{2} = \frac{1}{2} V$. Il tempo che si rinverrà non sarà certamente molto discorde dal vero, come osserva Eulero.

Lo spazio che percorrer deve il mobile con moto equabile essendo $L-b$, perciò si avrà $L-b = \frac{1}{2} Vt$, e

$$t = \frac{2(L-b)}{V} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Sia $L = 3^m,1$ in circa, la lunghezza dell'anima del pezzo da 24: $b = 0^m,35$, la lunghezza della carica di 4^k, e $V = 500^m$; sarà $t = \frac{2(3^m,10 - 0^m,35)}{500^m} = \frac{11}{1000} = 0'',011$. Questo tempo è eguale a quello che rinviene Poncelet con altro metodo (P).

Una tale corrispondenza ne' risultamenti ha sempre luogo. Perciò la formola (1) si può con sicurezza considerare, senza sensibile errore; come quella che è adattata per la ricerca del ripetuto tempo nelle varie applicazioni.

Sia inoltre pel medesimo pezzo $V = 263^m$ (=810 piedi), $L = 3^m,10$, $b = 0^m,06081$ (= 2 pol. 3 lin.), la carica è di 1^k (=2 lib. circa); i quali dati sono rinvenuti da Lombard (Q); quindi

$$t = \frac{2(3^m,10 - 0^m,06081)}{263} = \frac{2 \times 3,03919}{263} = 0'',023.$$

La formola stabilita, e gli esempii che si possono mettere in opera dimostrano evidentemente, che lo spazio nell'interno delle bocche da fuoco, si percorre dai proietti in tempi infinitamente piccoli, ossia impercettibili.

263. Le quantità di fluido, che si svolgono dall'accensione progressiva della polvere, operando egualmente in tutti i versi, ne deriva che nei rispondenti tempuscoli gli sforzi simultanei del motore contro il proietto e contro il fondo dell'arma sono eguali in numero ed in intensità. Sia perciò F la forza variabile del fluido, p il peso del proietto, e P quello dell'arma con l'affusto.

La forza variabile F applicata pel primo tempo dt alla massa $\frac{p}{g}$ del proietto gli comunica la velocità dv, quindi Fdt sarà la cagione, e la quantità di moto $\frac{p}{g}dv$ ne sarà l'effetto, con ciò si avrà l'equazione $Fdt = \frac{p}{g}dv$. Similmente per la massa della in-

(P) Poncelet. Mécanique Industrielle: pag. 147.
(Q) Lombard. Tavola del tiro, pezzo da 24.

tera macchina si ottiene $Fdt = \frac{P}{g} du$, in conseguenza pel primo conato del fluido elastico risulta $\frac{p}{g} dv = \frac{P}{g} du$, o vero $pdv = Pdu$: del pari pel secondo conato si ha pure $pdv = Pdu$, e così seguitando: di modo che per tutti gl'infiniti sforzi successivi avremo $p(dv + dv + dv \ldots\ldots) = P(du + du + du \ldots\ldots)$. Ora le quantità in parentesi indicano tutti i gradi di velocità che riceve il proietto fino alla bocca, e tutti i gradi di velocità che, nello stesso tempo, riceve la macchina, ossia $pv = Pu$ in cui v indica la velocità iniziale del proietto, ed u quella della macchina. Risulta

$$P : p :: v : u$$

Da ciò si rileva che l'arma dovrà retrocedere con la velocità u; facendo astrazione della resistenza dell'aria, e dai varii attriti che sperimentano la codetta e le ruote, o pure i *curoli*, per le bocche da fuoco di costa.

Se fosse $P = p$, sarebbe $v = u$; percui Eulero parlando del recesso che riceve la intera macchina dice. . .

« La forza espansiva della polvere tende a spingere il can-
» none indietro alla stessa maniera che spinge la palla in
» avanti; per modo che se il cannone fosse pesante quanto la
» palla, la carica di polvere comunicherebbe all'uno e all'altra
» la stessa velocità ».

(*Fig. 40*). Sia P il peso della macchina la quale stia sulla spianata ABC; sia EG la direzione dell'asse dell'arma, u la velocità iniziale della detta macchina intera secondo la lunghezza AC, allorquando retrocede. La quantità di moto del proietto nel verso di EQ è mv. Esprima q l'angolo ACB del piano AC con la orizzontale BC, ed n l'altro angolo GDC, che fa l'asse del pezzo con la medesima orizzontale. Indichi EQ la quantità di moto della palla: sia condotta QF perpendicolare ad AC. La EQ sarà decomposta nelle due QF, ed EF; la prima verrà distrutta dalla resistenza del piano, e la seconda spingerà

l'arma indietro. Quindi $EF = EQ \cos QEF = mv \cos(q+n)$ sarà la forza che produrrà il moto lungo il piano inclinato.

Oltre a ciò il peso della intera arma devesi considerare secondo una verticale HL che parte dal centro di gravità: quale verticale decomposta nelle due HN, NL, farà sì che l'effetto della prima sarà distrutto perchè normale ad AC producendo l'attrito, e l'effetto della seconda si opporrà direttamente al moto retrogrado, ossia alla EF: perciò il corpo sarà spinto indietro con la quantità di moto EF meno quella appartenente alla massa del peso espresso da NL; la qual differenza verrà indicata da $mv \cos(q+n) - Mu \operatorname{sen} q$. Ma la quantità di moto del corpo lungo il piano è Mu, dunque

$$Mu = mv \cos(q+n) - Mu \operatorname{sen} q.$$

Sostituendo per M ed m $\frac{P}{g}$, e $\frac{p}{g}$, avremo in fine

$$u = \frac{p}{P} v \frac{\cos(q+n)}{1+\operatorname{sen} q} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Da questa equazione si rileva, che la velocità del recesso cresce con la velocità del proietto, restando per altro costanti gli angoli q ed n, come pure P e p.

Quando l'angolo dell'asse del pezzo è di depressione, si conviene cambiare il segno ad n; e la detta formola allora assumerà una espressione più generale, cioè

$$u = \frac{p}{P} v \frac{\cos(q \pm n)}{1+\operatorname{sen} q} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Se l'arma e la spianata fossero orizzontali, sarebbe $q = n = o$, e

$$u = \frac{p}{P} v.$$

Sia il pezzo quello da 24: sarà (R), $P = 2755^k + 1495^k = 4250^k$, $p = 12^k$, e sia $v = 500^m$ la velocità iniziale della palla, e avremo $u = \frac{12}{4250} \times 500^m = 1^m,41$ che è la velocità del recesso.

(R) Aide-Mémoire 1836

Il valore di u nella formola (3) sarà un massimo, allorchè rimanendo costante v e q risulta $q-n=o$ ossia $q=n$, cioè $\cos(q-n)=1$: ciò val quanto dire, *quando l'asse del pezzo è parallelo alla spianata, la velocità del recesso sarà la massima.*

Generalmente parlando, il valore di u, nel caso de'pezzi che sono in uso nell'artiglieria, sarà sempre piccolissimo: perciocchè il peso del proietto è infinitamente piccolo in paragone del peso P dell'affusto e del pezzo; e a ciò si aggiunga che le velocità del recesso risultano nel fatto minori di quelle, che danno le formole, per cagione degli attriti e della resistenza dell'aria.

264. Siccome il moto del proietto nel percorrere l'anima della bocca da fuoco è difformemente accelerato, così quello dell'arma nell'essere retrospinta sarà altresì difformemente accelerato. Ciò non ostante nel rintracciare la lunghezza del recesso iniziale, i due movimenti si possono quasi considerare come equabili, attesa la istantaneità della loro durata (§. 262). Questa ipotesi ammissibile agevola il sostituire alla ragione delle velocità quella degli spazii. Sia perciò s lo spazio iniziale, secondo AC, che percorre la macchina retrocedendo. E quello che percorre la palla nello stesso tempo essendo $L-b$, si avrà $L-b=\frac{1}{2}vt$, $s=\frac{1}{2}ut$, e

$$v:u::L-b:s.$$

Con ciò la formola (3. §. 263) dà

$$s=(L-b)\frac{p}{P}\frac{\cos(q\pm n)}{1+\operatorname{sen} q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Questo spazio, che percorre l'arma durante il tempo che il proietto scorre la porzione dell'anima avanti la carica, dicesi *recesso di accensione.*

Se dopo tal recesso, ossia dopo che la forza espansiva del fluido cessa di operare sulla palla e sul fondo della bocca da fuoco, la macchina continua a retrocedere, ciò deriva dal movimento che l'è stato impresso, il quale deve continuare fino a tanto che le diverse resistenze non l'abbiano interamente

distrutto. Questo secondo cammino *dicesi recesso di esplosione*, o *recesso risiduo*, ch'è appunto la lunghezza che percorre la macchina dopo l'uscita del proietto dall'anima.

Il valore di s cresce col diminuire di P, e viceversa: la qual cosa dimostra, *che i recessi di accensione seguono la ragione inversa del peso delle macchine, supponendo gli altri dati perfettamente eguali.*

Se $q-n=0$ ossia $q=n$, il valore di s sarà un massimo, perciocchè coseno di zero è eguale all'unità. Ciò val quanto dire, *che il massimo recesso di accensione ha luogo, allorchè l'asse dell'arma sia parallelo alla spianata, o piano di posizione su cui si eseguono i tiri.*

Allorquando $n=0$ si avrà

$$s=(L-b)\frac{p}{P}\frac{\cos q}{1+\operatorname{sen} q},$$

ch'è il valore del recesso iniziale nel caso dell'asse orizzontale.

Se fosse $q=0$, verrebbe

$$s=(L-b)\frac{p}{P}\cos(\pm n);$$

ma $\cos(\pm n)$ è positivo; *quindi su di un piano orizzontale, i recessi iniziali con la elevazione eguale alla depressione dell'arma, sono della stessa lunghezza.*

Facendo in questa formola $n=0$ viene

$$s=(L-b)\frac{p}{P}$$

pel recesso iniziale di un'arma situata su di un piano orizzontale, con l'asse del pari orizzontale.

Tutti i valori di s crescono con diminuire di quello di b, e reciprocamente. La qual cosa è secondo la natura del moto, perocchè con una carica maggiore di un'altra, se il recesso iniziale risulta minore, ciò è perchè si esegue in un tempo più piccolo, dovendo il proietto percorrere uno spazio menomato dalla carica più grande. Ciò è lo stesso che dire, che se da una parte il motore fa retrocedere la macchina con più velo-

cità (§. 263), dall'altra parte opera sul fondo dell'anima in minor tempo.

Se $q+n=90$, sarà $s=0$, ossia, *quando la direzione dell'asse è normale alla spianata, il rinculo sarà distrutto.*

Se in tutti i valori di s si suppone p piccolissimo rispetto a P, come accade nelle bocche da fuoco di artiglieria, risulta la lunghezza del recesso di accensione piccolissima.

Infatti sia il pezzo da 24, nelle condizioni riferite al §. 262; sarà $s=(L-b)\frac{p}{P}=2^m,75\times\frac{12}{4250}=0^m,007$ circa, ch'è la lunghezza per la quale l'arma retrocede nel tempo di $0^m,011$ (§. 262) facendo fuoco su di una spianata orizzontale, e con l'asse anche orizzontale. E nel fatto, il detto valore di s risulta minore di $0^m,007$, per cagione degli attriti e della resistenza dell'aria.

Generalmente parlando, per tutte le bocche da fuoco di artiglieria, *si può conchiudere che la brevità del recesso iniziale è tale da non influire nella giustezza de'tiri;* la qual cosa resta confermata dagli sperimenti. Infatti Poncelet dice (S)....

« Un cannone in equilibrio alla estremità di una corda ver-
» ticale, porta la palla al medesimo sito di quello che la por-
» terebbe se fosse sull'affusto ». *Esperimenti fatti alla Rochelle.*

» È questo un argomento, che un pezzo non devia affatto
» in maniera da valutarsi, prima dell'istante in cui la palla
» sia uscita dall'arma, quantunque la macchina abbia dappoi
» retroceduto sensibilmente ».

Noi portiamo opinione, che il recesso di accensione non ha luogo geometricamente parlando, giacchè la massa della macchina, essendo grandissima in paragone di quella della palla, sarà più tarda di questa nel cominciare a muoversi, perchè l'azione si deve prima comunicare ad una infinità di molecole, e poscia principiare il moto. Siffatto ritardo può fare ac-

(S) Poncelet. Mécanique Industrielle: pag. 7.

cadere che il proietto esca dall'arma primachè sia stata superata sensibilmente la resistenza della macchina: o in altri termini, la resistenza della macchina per esser vinta ha bisogno di un tempo maggiore di quello che impiega il proietto a percorrere l'anima. La qual cosa si rende più manifesta dal seguente ragionamento di Poncelet (T).

« Quando una forza opera esteriormente ad un corpo, e » contro un punto della sua superficie, essa esercita una pres- » sione che comprime le molecole più vicine a questo punto; » il corpo, piega, incurva, e si deprime: le molecole tro- » vandosi più ravvicinate al contatto, fanno sforzo per ritor- » nare al loro sito, in virtù della elasticità più o meno gran- » de, che appartiene a tutte le sostanze; esse ricalcano an- » cora le molecole più distanti fino all'estremità del corpo; » se questa estremità è fissa, o arrestata da un ostacolo, il » risultamento sarà una compressione, o una deformazione in » tutta la estensione del corpo.

» Se al contrario quella estremità è libera, si avanzerà, di « maniera che il moto sarà propagato, o comunicato a tutte le » parti del corpo, e ciò gradatamente. Questo movimento in- » testino risultante da una sequela di compressioni, prova » che ci bisogna un certo tempo, perchè la forza abbia pro- » dotto il suo totale effetto; e prova del pari essere assurdo » il supporre che la velocità finita possa generarsi istantanea- » mente ».

265. Riesce oltremodo difficile il voler determinare teoricamente la lunghezza del recesso di esplosione, per non essere abbastanza determinati infiniti dati riguardanti gli attriti, ed il contrasto di varie forze che deriva dal congegnamento delle parti componenti l'affusto: circostanze tutte, che è quasi impossibile sottoporre a calcoli precisi ed utili. Però Poisson ha tutto ristretto in espressioni meccaniche, le quali formano un

(T) Poncelet. Mécanique Industrielle; pag. 20.

capo lavoro di analisi anzichè precetti profittevoli, dai quali la pratica non potrebbe ritrarre quelle conseguenze che domanda un sì utile quesito. Quello però che con certezza si può stabilire si è, che la formola (3. §. 263) dimostra l'aumento di u dipendere da quello di v: ossia che la velocità iniziale del recesso aumenta con la velocità iniziale del proietto, rimanendo costanti gli altri dati; perciò la forza, che spinge indietro la macchina, aumenterà con v, o pure la forza la quale spinge indietro il cannone, è

$$F = Pu = pv\frac{\cos(q \pm n)}{1 + \operatorname{sen} q},$$

che aumenterà con v. E siccome essa forza opera sul peso costante P, così la macchina dovrà tanto più retrocedere quanto maggiore diventa v; cioè *il recesso di esplosione aumenta con la velocità iniziale*, ossia con la carica di polvere, rimanendo costanti i dati q ed n per una medesima arma.

Supponiamo v e q costanti; il valore di F sarà un massimo quando $\cos(q - n) = 1$, ossia $q = n$: in conseguenza l'arma riceve la massima spinta allorquando il suo asse è parallelo alla spianata. Ond'è che nello sparo vediamo il recesso di esplosione, con carica costante, essere il massimo nella detta posizione dell'asse.

Proseguendo a variare gli altri dati si conchiude generalmente, che il recesso di esplosione cresce con F, quantunque la giusta sua lunghezza non possa quasi geometricamente determinarsi.

266. Quando la colonna fluida sbocca dall'anima, va sempre dilatando spingendosi in avanti, e quindi sposta l'aria che le fa ostacolo. Finito il fenomeno l'aria reagirà urtando la macchina, e non produrrà che un pochissimo sensibile fremito, il quale per una parte infinitamente piccola potrà contribuire ad aumentare il recesso di esplosione.

Se la reazione dell'atmosfera fosse capace, come taluni han-

no creduto, di produrre il recesso residuo, ad ogni tiro i due primi inservienti sarebbero certamente stramazzati per terra.

Il recesso residuo di un pezzo caricato con la sola polvere è minore di quello, che accade allorchè ci è il proietto; perciocchè nel primo caso si accende meno polvere che nel secondo, come si osserva dai granelli che restano gettati fuori dell'arma. Il fluido elastico, che successivamente si svolge, trovando solamente l'ostacolo, che oppongono gli strati di polvere non accesi ne' tempi infinitesimi degli sviluppi, non reagirà nel fondo dell'arma con la stessa forza che se vi fosse il mobile, il quale opponendo molta resistenza, farebbe sì che il motore spingerebbe indietro l'arma con più intensità.

In tutti i modi per altro la lunghezza del recesso di esplosione dipende in massima parte dalla inclinazione della spianata, e della congiungente il centro di gravità del sistema col centro della codetta; o di tutt'altri punti di appoggio. Ma noi abbiamo avuto in mira di esporre questa teorica con la massima semplicità, senza por mente ad infinite circostanze che influiscono nel recesso in generale, affine di far conoscere solamente alcune verità, che hanno una diretta relazione con la giustezza de'tiri delle bocche da fuoco. Gli effetti poi del recesso, paragonati coi diversi affusti, formano un oggetto al tutto estraneo allo scopo del presente *Cenno;* perciocchè tali effetti risguardano unicamente la Scienza delle Costruzioni diverse con le quali si formano le macchine di artiglieria. Su tal subbietto la insigne memoria di Migout e Bergery (U) non lascia quasi niente a desiderare. In essa dal §. 138 fino al §. 164, vien trattata in maniera quanto dotta altrettanto utile la teorica del recesso, e nel §. 154 si legge...

« Noi termineremo la teorica delle percussioni, riassumendo » i principii da osservarsi per menomare, quanto sia possibile, » gli effetti del tiro su gli affusti.

» 1.° Le percussioni s'indeboliscono, allorquando aumen-

(U) Migout et Bergery. Essai sur la théorie des affûts.

» ta il rapporto del peso della bocca da fuoco a quella del
» proietto.

» 2.° Le percussioni diminuiscono d' intensità col peso
» dell' affusto.

» 3.° La diminuzione dell'angolo del tiro, col quale le ruote
» cominciano a lasciare il suolo, è favorevole alla conserva-
» zione dell' affusto. Questo angolo è tanto minore, quanto il
» centro di gravità del sistema è più vicino all' asse dell' ani-
» ma, meno elevato e più distante dalla linea di appoggio
» della codetta.

» 4.° La influenza delle specie di costruzione sulle per-
» cussioni non è sensibile se non per le grandi variazioni nelle
» distanze enunciate al terzo principio.

» 5.° Si risparmia l' asse e la testa dell' affusto, renden-
» do la massa delle ruote tanto debole quanto lo permette la
» solidità.

TEORICA II.

Circostanze che influiscono nella giustezza de' tiri delle bocche da fuoco.

267. Moltissime sono le circostanze che hanno un diretto influsso nella maniera di ben tirare con le armi da fuoco. E poichè la più parte di esse non possono evitarsi, così le verremo tutte brevemente analizzando, a fine di conoscere quali variazioni arrecano alla giustezza de' tiri.

Se vogliasi colpire un bersaglio posto a conosciuta distanza dall' arma, con una data velocità iniziale, conviene primieramente stabilire l' angolo di proiezione col quale deve la bocca da fuoco operare, per quindi calcolare di quale alzo debbasi far uso (§. 210). Tutto procederebbe secondo i dettati della teoria, quante volte per altro l'asse del pezzo prolungato risultasse tangente alla traiettoria che descrive il proietto. E sic-

come la direzione iniziale del moto è subordinata anche all'influenza dell'angolo di partenza (§. 104), il quale non solo non può evitarsi, ma neppure prevedersi prima del tiro, ne deriva perciò che nell'effettuarsi il moto, si descriverà una curva tale da non esser tangente all'asse suddetto, o per meglio dire, il mobile sarà col fatto proiettato con un angolo o più grande o più piccolo di quello calcolato con le formole balistiche, secondochè l'ultimo urto accade contro la parete inferiore, o contro la parete superiore dell'anima della bocca da fuoco.

Da siffatto ragionamento si potrebbe dedurre, che le formole della balistica nel mezzo resistente indurrebbero in errore allorquando venissero applicate al tiro delle armi da fuoco. Ma si conviene osservare, che per tutti i pezzi di artiglieria gli angoli di partenza sono sempre piccolissimi e non mai maggiori di 33 in 34 minuti primi, come lo dimostrano gli sperimenti di Lombard (V). Questo limite di 34′ rimarrebbe attenuato, se i proietti fossero congiunti ai tacchi, o zocchetti, o pure fossero scagliati da bocche da fuoco che contenessero internamente camere cono-tronche (§. 183). E se qualche volta, il che quasi mai non ha luogo, si formasse l'angolo massimo di partenza (§. 105), pure la sua grandezza sarebbe sempre compresa fra gli angoli d'inclinazione, che nell'uso si sogliono dare ai cannoni ed agli obici. Premesso ciò, e riscontrando quello che si è dimostrato antecedentemente (§. 210) riguardo agli effetti delle variazioni, che può ricevere l'angolo di proiezione per le diverse elevazioni e depressioni delle armi ne' tiri di punto in bianco, è forza conchiudere, che situando o il cannone o l'obice, come lo prescrive la teoria ne' diversi casi, non si mancherà di colpire un bersaglio di giusta grandezza tutte le volte che si diriga al centro di esso la linea di mira naturale, o l'artificiale, che risulta dal calcolo risguardante il valore dell'alzo.

(V) Lombard. Moto de' proietti. Tav. VII. §. 172.

268. Si è dimostrato di sopra (§. 33), che le velocità iniziali de' proietti in ciascun' arma spinti con cariche dello stesso peso, sono nella ragione delle radici delle ampiezze ottenute col mortaro di pruova: ond' è che, conoscendosi dagli sperimenti la velocità iniziale avutasi con polvere di cognita portata, si potrà dedurre, mediante la detta proporzione, la velocità iniziale corrispondente a tutt' altra qualità di polvere. Ciò posto, quando si debba far uso di una data polvere, se vuolsi bene accertare il tiro, conviene necessariamente sperimentare la sua portata col mortaro provetto. Ma se questo polverometro non si avesse al momento, o pure mancasse il tempo e la opportunità di poterlo adoperare, il tiro dell'arma sarebbe governato a tentoni, ed il mobile difficilmente colpirebbe al segno. Per rimediare a questo inconveniente bisogna scrivere sopra ciascun barile la portata della polvere che esso contiene, perciocchè la sperienza di moltissimi anni ha dimostrato (X), che le polveri tratte fuori da ben condizionati magazzini conservano la stessa portata di quando furono ricevute, e che nel trasportarle la forza di esse rimane del pari costante, a menochè non avvenga qualche accidente capace di alterarla; ma ove questo intervenga, un caso fortuito non deve certamente stabilire alcuna regola. Molte volte il semplice calore del sole basta a ripristinare la forza della polvere, purchè non sia stata fabbricata con le solite frodi de' polveristi ed appaltatori.

Inoltre, se con una polvere di cognita portata, per esempio di 200^m, bisognasse una carica di 2^k per produrre una richiesta velocità iniziale di 400^m, e la polvere di cui si ha copia fosse della portata di 225^m, è chiaro che per avere la stessa velocità converrebbe adoperare una carica minore di 2^k. Ond' è che nella ricerca va stabilita la proporzione dichiarata antecedentemente (§. 82). Se le tavole del tiro fossero compilate, come in seguito faremo conoscere, non si dovrebbe ogni volta eseguire un cal-

(X) Lombard. Moto de' proietti §. 174.

colo : ma con un semplice sguardo alle tavole si vedrebbe che quantità di polvere si deve adoperare.

269. L'evasamento delle armi è pure una delle cagioni che si oppongono alla giustezza de' tiri : e perciò si dovrebbe eseguire una serie di accurati sperimenti per conoscere quali menomazioni ricevano le velocità per ogni punto di evasamento che si formi nelle anime delle bocche da fuoco , e quindi accrescere convenevolmente la carica stabilita per l'arma in perfetto stato di servizio. Allora il soprappiù di polvere compenserebbe la perdita del fluido elastico, il quale con maggiore affluenza sfugge da una lunula ingrandita dall'evasamento. Questa avvertenza farebbe sì , che la velocità rimarrebbe la stessa di quella indicata nelle tavole, ed il tiro quindi sarebbe governato con le usate regole.

Sia per esempio V la velocità iniziale di un proietto spinto da una carica C , e da un'arma in perfetto stato di servizio ; e supponiamo poi che l'anima di questa abbia ricevuto un vento maggiore di quello stabilito dalle tavole di costruzione. È chiaro che usando la stessa carica C , il proietto dovrà ricevere , a cagione dell'evasamento , una velocità iniziale V', la quale dovrà essere minore V , percui $V—V'$ indicherà la perdita di velocità del proietto per l'aumento del vento. Dovendo al bisogno far uso dell'arma evasata , converrà aumentare la carica C , affinchè la velocità V rimanga costante. In conseguenza , dalle tavole del tiro si avrebbe una carica C' corrispondentemente alla velocità iniziale $V+(V—V')=2V—V'$. Quindi è che se nel pezzo non evasato la carica C comunica al proietto la velocità iniziale V, nel pezzo evasato la maggior carica C', gl'imprimerà la stessa velocità iniziale V.

Se poi nel governare il tiro dell'arma evasata non si vuole aumentare la carica , si renderà indispensabile il valutare l'alzo, non in funzione della velocità iniziale V, ma bensì dell'altra V' minore. In tal caso l'alzo risulterà maggiore di quello che vien riferito dalle tavole del tiro che appartiene alla V, ed alla distanza dell'oggetto da bersagliare con l'arma evasata.

Si rende quindi manifesto, che ingrandendo il vento di un'arma, s'ingrandirà altresì l'angolo di partenza, il quale giunto ad un certo limite arrecherà ne'tiri di tali anomalie, che questi si sottraggono dal dominio delle formole balistiche, e dall'uso delle tavole del tiro; perciò è stato sanzionato, che un'arma la quale nell'anima sia evasata per più di 0^m00338 (= 18 punti), si debba reputare come non più atta al servizio.

Sarebbe oltremodo indispensabile avere di tali tavole, che facessero conoscere le perdite di velocità iniziali in funzione dei diversi evasamenti che si producono nelle anime delle bocche da fuoco: ma per la mancanza di sperimenti su tal subbietto, le tavole, di cui è parola, si potrebbero compilare mediante i precetti dati di sopra (§. 135), col tener conto, se si voglia, anche dell'evasamento de'foconi, i quali per altro si possono cambiare con tenuissima spesa tutte le volte che si crederà necessario, e così avere le norme da governare con discernimento ed esattezza il tiro delle bocche da fuoco, prendendo semplicemente una giusta conoscenza de'diametri delle anime, e dei diametri dei foconi.

270. Le velocità iniziali di cui si fa uso nelle tavole del tiro risguardano la posizione orizzontale dell'asse del pezzo: ma se nei fatti, come quasi sempre interviene, l'asse medesimo prendesse tutt'altra posizione, allora le velocità iniziali suddette riceverebbero cambiamenti difficili a porsi a calcolo; per la qual cosa sembra che le formole pei tiri dovrebbero indurre in errori. Prima per altro di decidere su questo proposito, conviene fare alcune osservazioni.

Supponendo l'asse del pezzo formare un angolo di depressione, il proietto, com'è chiaro, non premerà affatto sulla carica; anzi per effetto della sua gravità tenderà ad uscire dall'arma quante volte il tappo non ne arresti il corso. E però nell'accensione della carica la palla, o granata che sia, non opporrà al fluido elastico nessuna parte del suo peso, e la velocità iniziale del mobile sarà eguale a quella che gl'imprime-

rebbe il motore, più l'altra che gli comunica il proprio peso nel tempo che impiega a percorrere l'anima del pezzo. Oltre á ciò supponiamo l'asse formare un angolo di elevazione. In tal caso il proietto si appoggerà sulla carica, ed in conseguenza opporrà all'agente elastico una parte del suo peso, percui la velocità iniziale corrispondente sarebbe eguale a quella risultante dalla forza del fluido diminuita dell'altra che nasce dal detto peso. Da tutto ciò si deduce che la velocità della palla nella prima posizione dell'asse dell'arma è maggiore di quella che deriva dalla seconda posizione, e che la velocità nella posizione orizzontale dell'asse è compresa fra queste due. Intorno al divario di queste tre velocità Lombard dice (Y):

» Ma queste differenze non meritano alcuna considerazione, » poichè esse non giungono al di là di $\frac{1}{20}$ di piede per una in- » clinazione di 10°, e per una velocità che farebbe percorrere » l'anima dell'arma in $\frac{1}{100}$ di minuto secondo ».

Siffatto ragionamento e quello antecedente sarebbero esatti, quante volte l'accensione della polvere fosse istantanea, ma in fatto essa è successiva; perciò quanto più di resistenza il mobile oppone alla carica, tanto maggior quantità di fluido si svolgerà nell'accensione, prima che la resistenza di esso proietto sia superata. Ciò vale a dire, che nel caso della elevazione dell'arma, la velocità iniziale del mobile dev'esser maggiore di quella che si ha colla depressione: ossia, risulterà nella elevazione un aumento di velocità che sarà più grande del decremento che arreca il peso del proietto il quale resiste alla forza del fluido elastico. Questa verità è confermata dalle tavole di Legendre e dagli sperimenti di Bezout. È da notarsi peraltro, che la differenza nelle velocità, per le diverse inclinazioni dell'asse dell'arma, si appalesa in maniera sensibile solamente nelle grandi cariche, e non in quelle che si accendono quasi interamente prima che sia vinta lo forza di resistenza del mobile, come sono

(Y) Lombard. Moto de' proietti §. 177.

appunto le cariche usuali, e quelle che s'impiegano pei tiri a rimbalzo.

Premesso ciò, allorquando un pezzo tira con depressione e con una carica grande, bisogna far uso dell'alzo che danno le formole aumentato di qualche lunghezza; nel caso che si tiri con elevazione, l'alzo indicato dalle formole deve menomarsi alquanto.

Rispetto alla conoscenza delle variazioni nelle velocità iniziali de' proietti, che partono da un'arma diversamente inclinata, quantunque Persy dica, che per i cannoni e per gli obici si riduce a piccola cosa, pure non vi sono regole stabili per valutarle; ciò non pertanto una sufficiente sperienza nel tirare, basterà per supplire nelle occorrenze a quello che la teorica non ha potuto calcolare, perchè ignota è la legge con la quale l'accensione della polvere progredisce.

271. Nel calcolare i diversi valori di c (§. 59) si è presa per unità di densità quella dell'aria atmosferica ad una mezzana temperatura; dal che è derivato essere la densità dell'acqua rappresentata da 850. Ma quando si stabilisce per unità di densità quella dell'aria nel massimo calore di State, risulterà la densità dell'acqua eguale a 915; pel massimo freddo poi del Verno un tal numero si riduce a 785. Il ferro con che son fatti i proietti di artiglieria si estima 7,166 di densità rapportata all'acqua distillata: quindi la densità del ferro paragonata a quella dell'aria nelle dette due stagioni sarà $7,166 \times 915 = 6557$, e $7,166 \times 785 = 5627$: con le suddette ipotesi si avrà rispettivamente

$$c = \frac{4aD}{3k} = \frac{4 \times 6557.a}{3 \times 0,9}, \text{ e } c = \frac{4aD}{3k} = \frac{4 \times 5627.a}{3 \times 0,9}.$$

Negli esempii particolari recati per le portate di punto in bianco, sostituendo a vicenda nelle analoghe formole per c questi due valori, si avranno tali differenze da non influire in modo sensibile nella grandezza degli alzi. Per esempio: il pezzo da 24, il cui proietto sia animato dalla velocità iniziale di 462^m (=1425 piedi)

là con i due valori di c due portate di punto in bianco naturale, differenti rispettivamente dal punto in bianco che si ha col proietto di un ferro denso 6091,1 (Tav. XV. §. 59), per lunghezze tali da non recare sensibili cambiamenti nel valore dell'angolo di mira naturale. E con più forti ragioni la detta variazione rimarrà attenuata, allorquando si dovrà tirare al di là del punto in bianco naturale. Su tal subbietto Lombard ragiona così . . . . . .

« Si scorge dunque che nei limiti, in cui si comprendono i » pesi ed i diametri de' proietti, non che le differenti densità » dell'aria, cagionate dal caldo, dal freddo, e la pressione » atmosferica, prese insieme queste cagioni, o separatamente, » non possono avere una influenza ben determinata nella ma- » niera di puntare il cannone, cioè sull'alzo, relativamente ad » una carica ed una distanza assegnata. Le quali cose possono » produrre differenze considerevoli nelle portate, ma non perciò » si sbaglia. Una palla può andare più o meno lontana, può » cadere a terra ad una distanza più o meno grande senza che » per questo manchi di colpire un bersaglio che abbia quattro » o cinque piedi di altezza . . . . . .

Indi prosegue parlando del pezzo da 24. . . . . .

« Ora la mutazione nell'alzo cagionata dal considerare le » riferite cause non va che ad una linea di più o di meno alla » distanza di 350 tese. Sarebbe dunque male a proposito il » volere addurre queste cagioni per ispiegare i deviamenti della » palla e renderne ragione ».

A tutto ciò aggiungiamo, che se i proietti non sono del peso stabilito dai regolamenti, non abbastanza sferici, non del giusto diametro ec. ec., non debba attendersi dall'applicazione delle teoriche la massima giustezza del tiro, ma bensì la più grande approssimazione possibile.

272. Taluni sperimenti di Robins, di Hutton, di Clemente, e di Lombard concordemente ci fanno conoscere, che la tra-

iettoria, la quale si descrive dai proietti nel mezzo resistente, è quasi sempre a doppia curvatura.

Poichè è stato osservato, che spesse volte i mobili nel loro moto da una parte del piano de' tiri sono passati alla parte opposta. Un tal fenomeno accade generalmente per l'attrito della superficie de' corpi, contro l'aria che traversano.

Quando i proietti, benchè sferici perfettamente, abbiano pure il centro di gravità confuso con quello di figura, dovranno uscire dalla loro primitiva direzione, alloraquando il moto di rotazione accada intorno ad un asse non perpendicolare al piano de' tiri.

Nel caso che i proietti siano sferici perfettamente, e non di una densità uniforme, ne deriva che il centro di gravità non si confonderà con quello di figura: e però la rotazione nel moto si eseguirà da principio intorno la congiungente di questi due centri, e poi andrà continuamente a menomarsi, a misura cioè che il corpo si allontana dall'arma. Nella traiettoria ci sarà un punto nel quale il mobile resta col solo moto di traslazione, di maniera che la parte più pesante precederà la più leggiera; e perciò esso mobile potrà trovarsi ora da un lato ora dall'altro del piano del tiro. Questa alternativa di posizione è subordinata alla direzione del moto progressivo, ed alla natura del moto di rotazione, il quale, estinguendosi, fa sì che il mobile seguiterà il suo corso tutto da un lato del piano suddetto.

Se il mobile non fosse perfettamente sferico, quantunque il centro di gravità coincidesse con quello di figura, pure il suo moto sarebbe sottoposto a deviazioni, o nel verso laterale o nel verso verticale.

Dal fin qui esposto chiaramente si scorge che le suddette circostanze influiscono in maniera sensibile nella giustezza dei tiri: circostanze per altro che si possono evitare facilmente con porre in opera una discreta accuratezza, cioè a dire col costruire i

proietti più che sia possibile lisci, uniformi in densità, quasi perfettamente sferici. Le quali cose a' dì nostri si possono benissimo pretendere per l'alto grado di perfezionamento a cui son giunte le costruzioni di artiglieria, e precipuamente l'arte del fondere il ferro.

273. Quando il fuoco de' pezzi si esegua nelle cannoniere o a barbetta, il settore di esplosione può influire nella giustezza de' tiri come ci avverte Lombard, e come vien confermato dagli sperimenti eseguiti negli anni 1830, 1831 e 1832 a la Feré. Infatti esso settore, urtando con forza le guance della cannoniera, reagirà con veemenza nello spazio ivi compreso; e siccome il proietto ha una velocità molto minore di quella del fluido elastico (§. 119), ne risulta che il suo moto rimarrà per brevissimo tempo esposto ad un certo disquilibrio, percui il mobile dovrà lasciare la primitiva direzione, dimodochè se l'asse dell'arma fosse situato nel piano verticale della linea centrale della cannoniera, il mobile dovrebbe nell'uscire dall'arma, alzarsi alquanto dalla direzione, cui seguirebbe se la cannoniera non ci fosse. E se l'arma si accostasse ad una delle guance, il proietto dovrebbe non solamente elevarsi ma anche avvicinarsi alla guancia opposta. Pei tiri a barbetta nel proietto accader deve solamente un semplice inalzamento.

Queste considerazioni sono sufficienti per fare nelle occorrenze diminuire gli alzi con qualche legge approssimata, e subordinata sempre alla quantità della carica.

274. Dovendo le bombe essere proiettate su bersagli di una certa grandezza, compatibili con gli usi diversi della guerra, come fosse nelle fossate, cammini coperti, bastioni ec. di una piazza, così le anomalie nel tiro de' mortari non sono di ostacolo agli effetti che debbono produrre. Intanto è cosa utilissima l'usare quelle possibili precauzioni, le quali rendono il tiro quanto più si può aggiustato.

I mortari ad orecchioni si caricano in posizione verticale e

con la polvere sciolta, la quale formando superiormente un piano inclinato nell'abbattere l'arma per graduarla, fa sì che i granelli non rimangono sufficientemente ravvicinati, quantunque in parte siano mantenuti dalla carta del cartoccio che ci si pone sopra, e l'effetto della pronta accensione rimarrà alquanto attenuato (§. 178). Ad oggetto di evitare per quanto sia possibile tale inconveniente, bisognerà inclinare il mortaro sull'affusto con un moto molto lento e senza scosse. Noi però portiamo opinione che impiegando le cariche racchiuse in cartocci della stessa forma delle camere, tanto pei mortari a *placca* che per quelli ad orecchioni, i tiri per la citata condizione non dovrebbero essere sottoposti alle anomalie provenienti da una tarda e difforme accensione della polvere: molto più che in tutte le scariche, con la stessa quantità di polvere, l'accensione si eseguirebbe in un tempo costante.

Sarebbe assai utile per la giustezza de' tiri congiungere alle bombe gli analoghi tacchi o *zocchetti* come si è detto per le granate e per le palle (Z). Il proiettare le bombe con siffatta precauzione è applicabile solamente ne' luoghi, in cui i tacchi nell'uscire dai mortari non offendano la gente del proprio esercito.

È lieve lo scorgere che diminuendo il vento, ch'è in uso pei mortari, come suggerisce Poumet e tanti altri artiglieri, ne risulterebbero più accertati i tiri. Vero è che i mortari ad orecchioni alla Gomer tolgono il vento allorquando la bomba sta sulla carica; ma nel cominciare del moto essa rimarrà, sebbene per poco, esposta come ogni altro proietto a tutta la influenza delle vibrazioni del motore elastico, il quale l'obbliga a ballottare nell'anima (§. 102). E non perchè la spinta sia quasi diretta al centro del mobile, l'angolo di partenza resta totalmente distrutto; imperocchè le impronte che si tro-

---

(Z) Memoria sulle tavole del tiro del pezzo da sei, ed obice da 24 di campagna §. 33. dell'autore.

vano alla bocca dell'arma, ed il suono del metallo nello sparo ne mostrano evidentemente la esistenza. Quello però che non può mettersi in dubbio si è, che ne' mortari alla Gomer il tiro è più aggiustato di quello operato con gli altri mortari.

Si potrebbero menomare le anomalie nei tiri de' mortari in quanto alla influenza che vi esercita l'angolo di partenza, con istabilire la distanza del bersaglio come la massima, e trovare l'angolo che la produce, non che la velocità iniziale corrispondente (§. 259), e quindi la carica d'adoperarsi. E perchè l'angolo di proiezione, diminuito o aumentato dall'angolo di partenza, il quale apporterebbe pochissimo divario alla portata della formola corrispondente, per la ragione, che l'ampiezza essendo la massima, gli errori nella portata per la esistenza dell'angolo di partenza, sarebbero i minimi, perciò il metodo in disamina è da preferirsi nella pratica de' tiri.

In conseguenza di ciò le tavole de' tiri de' mortari, come vedremo, che dovrebbero contenere gli angoli di elevazione, le distanze dai bersagli, da considerarsi come le massime, e le corrispondenti velocità iniziali, sarebbero di una immensa utilità; e ciò precipuamente quando le bombe si dovessero far cadere su bersagli di piccola grandezza, come per esempio nelle trincere degli assedianti di una piazza, e nelle spianate delle batterie corrispondenti ec.

275. Varie altre cagioni potrebbero influire sulla giustezza de' tiri delle arme da fuoco; ma il loro effetto è assolutamente da trascurarsi, come è appunto quello derivante dalle variazioni igrometriche, barometriche, e termometriche dell'atmosfera. Non è così per un vento impetuoso che spirasse perpendicolarmente al piano de' tiri, perciocchè Persy, mediante una semplicissima formola, ha trovato che un vento il quale abbia di velocità $9^m,75$ ($=30$ piedi), soffiando nella detta direzione, fa scostare il proietto da 24 dal suo vero punto di caduta per 22^m, purchè l'arma sia inclinata con l'angolo di

45°, ed il moto duri 34″, giusta gli sperimenti di Bezout. Quando il vento spirasse in opposizion diretta alla bocca dell'arma, il tiro verrebbe a menomarsi, e viceversa sarebbe più lungo quante volte il soffio spirasse nel verso del moto. In tutti i casi però una lieve e giudiziosa modificazione arrecata agli alzi renderebbe i tiri aggiustatissimi.

Quantunque il dilatamento del metallo per lo riscaldarsi dell'arma a misura che si aumenta il numero dei tiri, diminuisca di poco il vento, pure nell' uso potrebbe tenersene conto con modificare gradatamente l'alzo, se si trattasse de'cannoni ed obici, o col far variare l'angolo di elevazione allorquando si trattasse del mortaro.

Il tiro de'pezzi non varia se calcasi o pur no la carica, come si è dimostrato di sopra (§. 97).

Il tiro de'pezzi neppure varia, se si effettuano o no i recessi (§§. 96.264), e se i pesi delle armi rimangono costanti o variabili.

TEORICA III.

Immersioni.

276. Il corpo che urta un ostacolo invincibile, o sarà respinto del tutto o pure s'immergerà in questo fino a che il suo moto non rimanga annullato. Il primo caso avviene, allorchè il corpo è perfettamente elastico, cioè quando ha la proprietà di ripigliare dopo l' urto tutta la sua forma primitiva. Potrebbe anche il corpo esser respinto se fosse fornito di una elasticità parziale, o incompleta, o se l'urto fosse tale da non poter vincere la forza di coesione delle particelle dell'ostacolo.

Nella ipotesi che fosse elastico, il corpo potrebbe fare una impressione sull'ostacolo e poscia riprendere la primitiva sua forma. Nella ipotesi poi che non fosse elastico, potrebbe fare sull'ostacolo una impressione, ed esso stesso ne potrebbe rice-

vere una la quale fosse permanente. Queste due circostanze costituiscono il criterio per conoscere se un corpo sia o no elastico.

In natura tutti i corpi son dotati di una imperfetta elasticità, e quindi generalmente serbano una impressione nel sito in cui furono urtati. I proietti di artiglieria scagliati contro massi di terra, di fabbrica, di legno ec., s'immergono in questi senza ricevere impressioni calcolabili, e senza esser respinti sensibilmente; e perciò possiamo trascurare la elasticità in questa specie d'investigazioni. Solo ci è qualche poco di divario fra la teorica ed i fatti, come osserva Hutton, allorchè la immersione sia grandissima, per la cagione che la resistenza aumenta alquanto pel ricalcamento che ricevono le particelle le quali si presentano avanti al mobile.

La resistenza degli ostacoli essendo costante per l'ammissibile nostra ipotesi, essa non sarà quindi funzione della velocità con la quale il proietto arriva all'ostacolo; ma sibbene dipenderà dalla forza con cui sono strette le molecole resistenti, e dalla grandezza del foro che si produce mediante l'urto. Una tale resistenza può considerarsi simile alla gravità, la quale essendo costante ne' corpi, ritarda uniformemente il moto ascendente di questi.

277. Sia a il diametro del mobile, M la massa, ed r in peso la resistenza costante dell'ostacolo: si faccia r eguale al peso di un cilindro di acqua distillata, la cui gravità specifica sia eguale a G, ed abbia per base $\frac{1}{4}\pi a^2$ cerchio massimo del proietto, e per altezza quella che risulta, la quale indichiamo con f: perciò $r = \frac{1}{4}\pi a^2 f . G$.

Per dichiarare il significato di f, si modelli un cilindro del diametro a e della stessa materia dell'ostacolo da bersagliare. Poi tale cilindro si aggravi del peso Q^k il quale ne indichi la tenacità (§. 158): sarà $\frac{1}{4}\pi a^2 G f = Q^k$. E valutando 1000^k il peso di un cilindro cubo di acqua avendo per lato 1^m: si ot-

terrà $= G\frac{P}{V} = \frac{1000^k}{(1^m)^3}$ per la detta gravità specifica; e quindi il peso del cilindro di acqua eguale alla resistenza che oppone l'ostacolo, sarà $\frac{1}{4}\pi a^2 . \frac{1000^k}{(1^m)^3} \cdot f = Q^k$ od $f = \frac{Q^k}{1000^k} \cdot \frac{1^3}{\frac{1}{4}\pi a^2}$; $\frac{Q}{1000}$ è un rapporto, $\frac{1^3}{\frac{1}{4}\pi a^2}$ esprime una retta, dunque f indicherà una lunghezza. Supponendo ora la gravità specifica dell'acqua eguale ad uno, risulta per più semplicità $r = \frac{1}{4}\pi a^2 f$.

Sia δ la densità del proietto; per la espressione $\varphi = -\frac{r}{M}$ (§. 51), si avrà

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{r}{M} = -\frac{\frac{1}{4}\pi a^2 f}{\frac{1}{6}\pi a^3 . \delta} = -\frac{3f}{2a\delta},$$

eliminando il tempo mediante la nota equazione

$$v = \frac{dx}{dt}, \text{ risulta } vdv = -\frac{3f}{2a\delta}dx:$$

integrando, con la condizione di $x = 0$ allorchè v diventa U, ch'è la velocità di percossa, viene

$$v^2 = U^2 - \frac{3f}{a.\delta}x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Ed eliminando dx, si ha $dt = \frac{2a\delta}{3f}dv$. Eseguendo la integrazione con la medesima condizione per determinare la costante, si ottiene

$$t = \frac{2a\delta}{3f}(U - v) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Fra questa e l'antecedente formola eliminando v, si avrà

$$t = \frac{2a\delta}{3f}\left(U^2 - \sqrt{U^2 - \frac{3f}{a.\delta}x}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Ora per avere la totale immersione ed il rispondente tempo, che indichiamo con X, e T, si faccia in (5) e (6) $v=0$, e quindi

$$X=\frac{a\delta}{3f}U^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8).$$

$$T=\frac{2a\delta}{3f}U \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9).$$

Dalle quali

$$T=\frac{2X}{U} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10),$$

ossia: *il tempo della totale immersione pareggia la doppia lunghezza di questa, divisa per la velocità di percossa.*

278. Per un altro proietto ed un altro ostacolo, si ha

$$X'=\frac{a'\delta'}{3f'}U'^2;$$

e quindi

$$\frac{X}{X'}=\frac{a}{a'}\times\frac{\delta}{\delta'}\times\frac{f'}{f}\times\frac{U^2}{U'^2}.$$

Cioè: *le lunghezze delle immersioni in due masse differenti sono nella ragion composta della diretta de' diametri de' proietti, della densità di questi, de' quadrati delle velocità di percossa, e della inversa della tenacità degli ostacoli.*

Supponiamo, $\delta=\delta'$ e $f=f'$, si avrà

$$\frac{X}{X'}=\frac{a}{a'}\times\frac{U^2}{U'^2}$$

ossia in questo caso: *le totali immersioni sono nella ragion composta, della diretta de' diametri de' corpi impellenti, e della diretta dei quadrati delle velocità di percossa.*

Sia $\delta=\delta'$, $f=f'$, ed $U=U'$, risulta

$$\frac{X}{X'}=\frac{a}{a'}$$

cioè a dire, da questa ipotesi rilevasi: *che le immersioni in uno stesso mezzo resistente seguono il rapporto de' diametri dei mobili.*

Le verità fin' ora dichiarate sono stabilite nella ipotesi, che il mezzo resistente non abbia elasticità; percui sarebbe un errore attribuire le stesse proprietà ai proietti che traversano l'aria, seguendo siffatti principii, come ha praticato Poumet (A) per le palle di artiglieria. Egli ne deduce conseguenze forse vere, ma che hanno bisogno di corrispondenti dimostrazioni, le quali derivino da tutt'altro principio più confacente alla natura della cosa.

Dal primo rapporto stabilito in questo paragrafo, allorchè $f=f'$, si ricava

$$U'=U\sqrt{\frac{a}{a}\times\frac{\delta}{\delta'}\times\frac{X'}{X}}.$$

Questa equazione ci porge il mezzo di rinvenire la velocità di un proietto, allorchè si conosca quella di un altro. In fatti preparato un bersaglio omogeneo, di legno, di terra, o di altra materia, gli si scagli contro il proietto di cognita velocità rinvenuta coi metodi sopra descritti, e se ne misuri la totale immersione. Poscia nello stesso bersaglio si scagli altro proietto, e se ne prenda la immersione. Nella stabilita eguaglianza per a, a', δ, δ', ed U si sostituiscano i rispondenti valori cogniti, come ancora i valori delle misurate immersioni X, X', e quindi si rinverrà quello della U'. Avvertendo però, ch' essendo U' la velocità di percossa, se l'arma fosse situata vicinissima al bersaglio, questa sarebbe la velocità iniziale del proietto. Se poi l'arma fosse posta lontana dall' ostacolo per una data distanza, il valore di U' indicherebbe la corrispondente velocità residua del proietto.

Un simile metodo è quasi impraticabile ne' fatti, perchè si rende malagevole lo scegliere un bersaglio di legno omogeneo da pertutto; e facendo uso delle terre, le immersioni non potrebbero con esattezza misurarsi, atteso il crollamento irregolare ch' esse formerebbero lungo il buco percorso dal mobile. Ed in tutti i casi è impossibile di lontano far percuotere dal

(A) Poumet. Instruction sur les éffets des bouches à feu. §. 26.

proietto l'ostacolo in direzione normale alla sua superficie; o da vicino poi, avendo l'arma necessariamente un vento, questo cagionerà un angolo di partenza variabile quantunque l'asse dell'arma sia diretto normalmente alla superficie, e perciò la immersione sarà anche obliqua alla superficie dell'ostacolo.

279. Dalla formola (8. §. 277) si ottiene

$$f = \frac{a\delta}{3X} U^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11),$$

la quale farà conoscere la tenacità de' varii mezzi resistenti usati nelle diverse occorrenze di guerra in generale.

Sia $a = 0^m,0508$ (= 2 pol. ing.), $\delta = 7,5$, $U = 488^m$ (= 1600 piedi ing.), ed $X = 0^m,508$ (= 20 pol. ing.), sperimento eseguito nell'olmo in direzione delle sue fibre, con un proietto di ferro.

La formola ultima presenta

$$f = \frac{0,0508 \times 7,5 \times 488^2}{3 \times 0,508}.$$

Prendendo i logaritmi

log. 0,0508	8,70586
log 7,5.	0,87506
2 log 488	5,37684
com. log 3	9,52288
com. log. 0,508	0,29414
log f.	4,77478

$$f = 59540^m \text{ circa}$$

ch' è l'altezza della colonna di acqua eguale alla resistenza r. Il volume di tal colonna sarebbe in questo caso eguale a $\frac{1}{4} \times 3,141 \times 0^m,0508^2 \times 59540^m$. Poichè sappiamo che un metro cubo di acqua pesa 1000^k; perciò la detta resistenza ridotta in peso risulterà $r = \text{kil}\,\frac{1}{4} \times 3,141 \times 0^m,0508^2 \times 59540 \times 1000$.

Considerando 59540 come un numero astratto, indicherà la coesione dell'olmo, ossia, il moto de' proietti nell'olmo spe-

rimenta una forza ritardatrice costante 6070 volte maggiore della gravità, perciocchè $6070\,g = 6070 \times 9{,}809 = 59540^{m}$.

Similmente col medesimo proietto, e con la velocità di percossa 366^{m} (= 1200 piedi ing.), si è avuto $X = 0^{m},381$ (= 15 pol. ing.), ed $f = 44876^{m}$ circa.

Così pure con $a = 0^{m},07112$ (= pol. 2,8 ing.), con la velocità di percossa di $457^{m},5$ (= 1500 piedi ing.) si è ottenuto una immersione profonda $0^{m},762$, da cui $f = 49045^{m}$ circa.

Infine col proietto ultimo, con la velocità di $323^{m},4$ (= 1060 piedi ing.), si è avuto $X = 0^{m},4064$, e $f = 45951^{m}$: e prendendo il medio fra questi quattro risultamenti, derivati dagli espressi dati enunciati da Hutton, viene (§. 202).

$$f = \frac{59540 + 44876 + 49045 + 45951}{4} = 49853\,,$$

per la tenacità media dell' olmo.

I tempi delle rispettive immersioni saranno, formola (9. §. 202)

$$T = \frac{2X}{U} = \ldots 0'',002 \ldots 0'',002 \ldots 0'',003 \ldots 0'',002\,;\ \text{il medio}$$

$$T = 0'',0022.$$

Il valore di questo tempo dimostra la verità dichiarata nel §. 44, quantunque si tratti qui di un ostacolo fisso; e però un tal tempo sarebbe diverso da quello che si ottiene se il bersaglio è oscillante. Ma siffatta differenza non è da mettersi a calcolo per la grande sproporzione che passa fra il peso del pendolo ed il proietto, del quale si vuol conoscere la velocità.

Dalla formola (11) si ottiene

$$\frac{f}{f'} = \frac{a}{a'} \times \frac{X'}{X} \times \frac{U^2}{U'^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

Si ha da Robins che la palla di ferro, come sopra, del peso di $8^{k},16$ (= 18 lib. ing.), del diametro di $0^{m},128$ (= 5,04 pol. ing.), si è immersa nella quercia per $0^{m},8637$

(= 34 pol. ing.), con la velocità di 366^m (= 1200 pie. ing.). Sarà pel secondo esempio

$$\frac{f}{f'} = \frac{0,0508}{0,128} \times \frac{0,8637}{0,381} \times \frac{366^2}{366^2} = \frac{17}{19} \text{ circa:}$$

il che vuol dire: *che la tenacità dell'olmo sta a quella della quercia nel rapporto di* 17 : 19.

La formola (8. §. 277) dà

$$\frac{0,381}{X'} = \frac{0,0508}{0,1379} \times \frac{366^2}{488^2} = \frac{72}{355} \text{ circa, ed}$$

$$X' = \frac{355 \times 0,381}{72} = 1^m,879 (= 74 \text{ pol. ing.}),$$

ch'è la immersione che fa nell'olmo la palla da 24 spinta con la velocità di 488^m.

Il primo a trattare questa teorica con molto successo fu Robins, indi Eulero, e poscia Giovanni Bernoulli.

280. Tenendo tutt'altro metodo, Persy perviene alle stesse formole da noi esposte, intorno alle quali dice....

« La teorica precedente si accorda con la sperienza più o » meno esattamente, secondo la diversa natura de'mezzi resi- » stenti, ma generalmente in un modo soddisfacente per le » applicazioni ai fatti ».

La dottissima Memoria che porta i nomi di Piobert, Morin, e Didion (B), che tratta della presente teorica, non lascia nulla a desiderare; perciocchè in quella l'analisi più giudiziosa è accompagnata da accuratissimi sperimenti. E benchè le formole, di cui si fa uso in detta memoria, diano risultamenti molto approssimati ai fatti, pure noi abbiamo stabilite le anzidette espressioni, come quelle che ad una notabile semplicità accoppiano un grado tale di approssimazione, da essere piucchè sufficiente nelle diverse occorrenze che si presentano nell'attacco delle fortificazioni passeggere e delle permanenti, e nell'attacco contro i legni da guerra.

Per conoscere di quanto i calcoli delle formole stabilite differi-

(B) Mémorial de l'artillerie pag. 179. n.° IV.

scano dagli sperimenti eseguiti nell'argilla di S. Giuliano (C), useremo la formola (§. 278)

$$\frac{X}{X'}=\frac{a}{a'}\times\frac{U^2}{U'^2}.$$

I dati che abbiamo sono, $a=794$ punti, diametro della palla da 24; $a'=633$ punti, diametro della palla da 12; $U=575^m$ velocità di percossa della prima palla; $U'=555^m$, velocità di percossa della seconda; $X=4^m,22$, immersione del primo proietto; $X'=3^m,36$, immersione del secondo.

Supponiamo che la incognita sia X, si avrà

$$X=3^m,36\times\frac{794}{633}\times\frac{575^2}{555^2}, \text{ e}$$

log 3,36	0,52634
log 794	2,89982
2 log 575	5,51934
com.log 633	7,19860
com.2 log 555	4,51142
log X	0,65552

$$X=4^m,542.$$

Risultamento maggiore dello sperimentale per tre decimetri circa.

Inoltre per gli stessi proietti è $U=505^m$, $U'=485^m$, $X=3^m,85$, ed $X'=3^m,07$; ed operando come sopra, si trova $X=4^m,175$, il quale è maggiore del risultamento sperimentale per tre decimetri circa.

Infine essendo $U=380^m$, $U'=365^m$, $X=3^m,18$, ed $X'=2^m,54$, la formola dà $X=3^m,45$ che differisce da $3^m,18$ anche per tre decimetri circa.

Da questi calcoli si rileva, che la formola antecedente dà risultamenti maggiori del vero: ma trattandosi di tirare contro le argille, tre decimetri in più o in meno nella lunghezza della immersione non recheranno certamente un divario tale negli

(C) Mémorial de l'artillerie pag. 205 n.° IV.

effetti contro le opere formate della detta specie di terra, da farci rifiutare il metodo che abbiamo seguito. A ciò si può aggiungere, che le immersioni de'proietti contro gli ostacoli si debbano pretendere fra dati limiti, tanto per la natura delle materie di cui formati sono detti ostacoli, quanto per le anomalie cui son soggetti i tiri. È bene per altro che i risultamenti delle nostre formole siano considerati sempre minori dei veri, e quindi nelle occorrenze converrà aumentare alquanto la carica, per fare che la velocità di percossa risulti maggiore di quella che deve far parte delle formole. Una tal pratica nei fatti darà risultamenti molto approssimati ai veri.

Quello che si è detto per le immersioni nelle argille, si può applicare altresì per gli ostacoli formati di tutt'altra materia.

281. Essendo che le formole in disamina siano bastevoli per le applicazioni ai fatti, notiamo alcuni dati che ne somministra Persy ne'seguenti termini:

« Dopo gran numero di pruove fatte in differenti tempi ed in » diversi luoghi, le lunghezze medie delle immersioni della palla » da 24, tirata con la carica di 8 libbre di polvere di buona » qualità, alla distanza di 100^m, sono indicate nella seguente » tavola ».

TAVOLA XL.

	TERRA di parapetto antico.	TERRA di fresco rimossa, e battuta.	LEGNO di quercia sano e duro.	FABBRICA		Distanza dall' arma.	Velocità iniziale.	Portata della polvere.	Velocità di percossa calcolata.
				in pietra molle.	in mattoni.				
Immersioni.	3^m,8976	4^m,8720	1^m,4618	0^m,7038	0^m,9745	100^m	463^m	245^m	430^m

La polvere è di 245^m(= 125 tese); percui la velocità iniziale risulta di 463^m(= 1425 piedi), come si rileva dalle tavole del

tiro di Lombard, non ostante che Persy la stimi di 1420 piedi.

Ciò posto, si domanda quanto s'immerga la palla da 24 scagliata con la suddetta velocità contro gli ostacoli notati nella tavola stabilita, supponendo l'arma alla distanza di 600 metri?

Il modo da tenersi in questa ricerca è il seguente. Si calcolano le velocità residue del proietto in funzione delle distanze 100^m e 600^m, e della velocità iniziale 463^m. Le immersioni saranno come i quadrati delle suddette velocità residue. In conseguenza la formola da risolversi due volte sarà (§. 214)

$$v = \frac{V}{e^{\frac{x}{c}}}.$$

Facendo prima $V = 463^m$ ed $x = 100^m$, si ha

$$\log e^{\frac{100}{c}} = 100 \times \frac{1}{c} \times 0,43429\text{; e quindi}$$

$$\log\left(\log e^{\frac{100}{c}}\right) = 2 + \log\frac{1}{c} \times 0,43429\text{; ma}$$

$$\log\frac{1}{c} \times 0,43429 = 6,51394 \text{ (§. 59. tav. XV); perciò}$$

$$\log\left(\log e^{\frac{100}{c}}\right) = 2 + 6,51394 = 8,51394; \log e^{\frac{100}{c}} = 0,03265 \text{ circa, e}$$

$$\log v = \log V - 0,03265 = 2,66558 - 0,03265 = 2,63293,$$

$$v = 430^m \text{ circa.}$$

Similmente

$$\log\left(\log e^{\frac{600}{c}}\right) = 2,77815 + 6,51394 = 9,29209\text{, e}$$

$$\log e^{\frac{600}{c}} = 0,19592; \quad \log v = 2,66558 - 0,19592 = 2,46966.$$

$$v = 295^m \text{ circa.}$$

Perciò (§. 278) $\frac{X}{X'} = \frac{295^2}{430^2}$; e $X = X'\frac{295^2}{430^2}$. Se in questa for-

mola si sostituiscano successivamente per X' le immersioni notate nella precedente tavola, si avranno le corrispondenti immersioni negli stessi mezzi resistenti della palla da 24 scagliata dalla distanza di 600^m.

Quanto alla terra del parapetto antico la immersione sarà

$$X = 3^m,8976 \times \frac{295^2}{430^2}$$

log 3,8976	0,59079
2 log 295	4,93964
com. 2 log 430	4,73304
log X	0,26349

$$X = 1^m,83 \text{ circa.}$$

Con calcoli simili a questo si è compilata la seguente tavola per le immersioni della palla da 24.

TAVOLA XLI.

TERRA di parapetto antico.	TERRA di fresco rimossa, e battuta.	LEGNO di quercia sano, e duro.	FABBRICA		Distanza dall' arma.	Velocità iniziale.	Portata della polvere.	Velocità di percossa, calcolata.
			in pietra molle.	in mattoni.				
1^m,83	2^m,293	0^m,688	0^m,331	0^m,459	600^m	463^m	245^m	295^m

Con le formole antecedenti, e le due suddette tavole si risolvono tutti i quesiti intorno alle immersioni de'proietti pieni o vuoti, di cui si fa uso nell'artiglieria.

È da notare che i buchi i quali si fanno nel legno con proietti non maggiori del calibro da 12, si chiudono quasi del tutto, e molto più se il legno sia verde, come osservasi in tutti gli sperimenti di simil natura.

È cosa facile a comprendersi, che l'angolo d'incidenza che fa un proietto con un ostacolo da bersagliare, aumenta a misura che la traiettoria diviene più arcata, o, che torna lo stesso, il detto angolo cresce col crescere della distanza dell'arma dall'ostacolo, supponendo costanti la velocità iniziale e l'angolo di proiezione. In conseguenza, nelle applicazioni si avrebbero le immersioni oblique, mentre la teorica le valuta come dirette, cioè di una maggior lunghezza: ond'è che un aumento di carica (§. 280) è al tutto necessario per compensare siffatta menomazione. Vero è, che si potrebbe tener conto della immersione obliqua, valutandosi l'angolo d'incidenza; ma la posizione dell'ostacolo, l'angolo che fa l'elemento della traiettoria col piano che dee incontrare, ed infinite altre circostanze da porsi a calcolo, fanno sì, che le formole diverrebbero complicatissime e forse di nessuna utilità nel bisogno.

282. Volendosi conoscere con grande approssimazione il limite massimo della immersione di una bomba ne' varii mezzi resistenti, conviene trovare la velocità completa di questa, quindi usare un calcolo del tutto simile a quello di sopra (§. 281), prendendo per proietto di norma la palla da 24, ed in seguito usare la formola (§. 278)

$$\frac{X}{X'}=\frac{a}{a'}\times\frac{\delta}{\delta'}\times\frac{U^2}{U'^2}.$$

Sia la bomba quella da 10: sarà (§. 261) $U=126^m$ la sua velocità completa: ossia da qualunque altezza essa possa cadere non potrà mai acquistare una siffatta velocità, sibbene una minore. Perciò nel tiro di detta bomba, senza errore sensibile, la immersione massima è subordinata alla velocità completa di 126^m, considerata come velocità di percossa.

Da quanto abbiamo esposto risulta

$$\frac{X}{X'}=\frac{1440}{794}\times\frac{4087,6}{6091,1}\times\frac{126^2}{430^2}.$$

nella quale 794 punti sono il diametro della palla da 24, 1440 punti sono quello della bomba da 10. I numeri poi 6091,1 4087,6 (§. 59. tav. XV) indicano le densità de' detti proietti; 430^m esprime la velocità di percossa della palla, e 126^m la velocità completa della bomba.

Ciò posto per la tavola di sopra (§. 281), sarà $X'=3^m,8976$, per la immersione della palla da 24 nella terra dell'antico parapetto, e quindi

$$X=3^m,8976\times\frac{1440}{794}\times\frac{4087,6}{6091,1}\times\frac{126^2}{430^2}$$

log 3,8976	0,59079
log 1440	3,15836
log 4087,6	3,61146
2 log 126	4,20074
com.log 794	7,10018
com.log 6091,1	6,21531
com.2 log 430	4,73306
log X	9,60990

$X=0^m,407$ circa.

Cioè a dire, che questa immersione si deve estimare come la massima della bomba suddetta allorquando cade da qualunque altezza nella terra del citato parapetto.

Operando alla stessa guisa per gli altri mezzi resistenti, avremo la seguente tavola delle immersioni della bomba da 10, relativamente alla sua velocità completa.

TAVOLA XLII.

TERRA di parapetto antico.	TERRA di fresco rimossa, e battuta	LEGNO di quercia sano, e duro.	FABBRICA		VELOCITA' completa.
			in pietra molle.	in mattoni.	
0m,407	0m,309	0m,153	0m,0735	0m,102	126m

A fine poi di avere le corrispondenti immersioni per le bombe in generale che tirano sotto dati angoli di proiezione, a distanze prefisse con note velocità iniziali, converrà trovare la velocità e l'angolo di caduta, con le formole della balistica, antecedentemente rinvenute. Quindi decomporre quest' ultima velocità, ed usare nelle dette formole delle immersioni la sola componente verticale. Per esempio: sia w la velocità di caduta, e ε l'angolo corrispondente: la componente verticale sarà $w \cos \varepsilon$, la quale dovrà sostituirsi per U nel valore di $\frac{X}{X'}$ e proseguire, come si è osservato, nelle analoghe ricerche.

In quanto alle immersioni de' proietti ne' diversi mezzi resistenti, si può con grande utilità nelle occorrenze riscontrare l'*Aide Mémoire* del 1836, dell'artiglieria francese, pag. 331 332 333 e 334.

Nelle lunghezze delle immersioni sperimentali ci è compreso il diametro del proietto; cioè a dire, esse sono valutate dalla superficie dell'ostacolo al punto più immerso della superficie sferica.

TEORICA IV.

Tavole del tiro in generale.

283. Ella è cosa indubitata, che nelle varie fazioni di guerra l'inutile consumo di munizioni e la perdita di tempo sono due impedimenti, i quali per dritta via si oppongono al conseguimento della vittoria. Spesse volte è accaduto, come ne fa fede la storia, che poderosi eserciti e Piazze forti di altissimo conto han dovuto cedere agli attacchi di un nemico debole per numero, ma che seppe con esattezza e discernimento adoperare le artiglierie, e che talora un sol cannone o un obice solo ben governato ha sostenuto e protetto difficili ritirate, ed in qualche congiuntura ha fatto vincere la giornata. Ponendo mente pertanto che le artiglierie formano ai nostri giorni parte non piccola del potere degli Stati, ed il sostegno maggiore degli Eserciti in guerra, si dovrebbe in quelle collocare la più diligente cura, sia nello scegliere ed ammaestrare le persone, sia nel perfezionamento di tutto quello che concerne il loro materiale. Di questa verità fu ben convinto il Gran Federico II; il quale assistito e retto dal potente suo ingegno, e confortando le sue soldatesche con una Artiglieria, che non di numero ma di arte avanzava quella de'suoi avversarii, sostenne la famosa guerra de'sette anni contro quasi tutte le confederate forze di Europa. E fu appunto in quella lotta tanto ineguale che gli Austriaci, dalle continue vittorie di Federico ammaestrati, richiesero la Francia di un abile uffiziale di artiglieria: e la Francia mandò tra le file tedesche il celebre Gribeauval per fare argine agli avanzamenti del temuto Capitano.

Al tempo nostro gli artiglieri tutti vanno indefessamente solo studiando d'immegliare le artiglierie. Ma ci sia lecito di avvertire, che il perfezionare quello che appartiene alle macchine esser debbe obbietto subordinato a quello del ben tirare; per-

ciocchè non pur cosa inutile ma anche perniciosa può tornare in tempo di guerra, lo avere un gran numero di ottime macchine, qualora il trarre delle bocche da fuoco procedesse a caso, e senza regole stabilite. Nè vale rammentare la massima, cui detta a taluni una turpe ignoranza, bastare il colpo d'occhio, e i tiri di pruova per conseguire l'intento; perciocchè ciò vorrebbe significare, doversi apprendere come si usa il tiro delle armi allora appunto che si deve tirare. Se, aggiungono costoro, il tiro è alto, si abbassa l'arma, e se è basso, si alza, e al primo fanno succedere un secondo, un terzo ec., ec. tiro di pruova finchè non siano fatti certi di cogliere al segno. Ma fradditanto l'inimico, che vede andare vuoti di effetto i colpi tirati contro di sè, procede e si avanza al rimbombo di una salva innocente che più ardito lo rende, e si giova di un tempo che tanto è prezioso nelle battaglie.

Una fortezza si rimarrebbe inespugnabile, se l'assediante non facesse provare l'efficacia de' suoi tiri col distruggere le opere delle fortificazioni, e scavalcare le artiglierie. Per lo contrario, poche bocche da fuoco fulminando da una Piazza possono per lungo tempo contenere gli assalitori dentro le loro trincere, o costringerli, senza progredire nelle operazioni dell'attacco, a stare sulla cresta degli spalti esposti ad una strage crudele. Perciò si conviene avere nell'Esercito buon numero di artiglieri ben pratichi del loro mestiere, e non di facende inutili proprie solo de' fantaccini.

Lombard e tutti coloro che tengono le cose di artiglieria in quel conto che meritano, sono di accordo in volere che i soldati a siffatta arma destinati, esser debbano forniti di molto intendimento. Infatti il citato autore parlando dell'artigliere istruito alquanto, così la discorre....

« Costui interrogato risponderà: bisogna che il proietto nel » giungere al punto colpito, abbia tanto di forza da produrre » il suo effetto. Affinchè nel colpire abbia tal forza, convie-

» ne, che partendo da tal distanza, abbia tal velocità iniziale. Per partire dall'arma con questa velocità, ci vuole tal » carica di polvere di qualità già nota. Finalmente, conoscendo le dimensioni del pezzo confidatomi, è necessario che » con questa velocità iniziale io miri in tale o tal'altra maniera, » cioè, o devo tirare di punto in bianco, ovvero usare di tal alzo, » o mirare per certa distanza sotto al bersaglio. Le quali cose » *non saranno tutte note all'artigliere istruito*, il quale parla » con conoscimento di questa parte del suo mestiere. Ora una » risposta convenevole si potrà a prima giunta ricavare dalle » mie tavole del tiro. »

284. Da tutto questo chiaramente si rileva quanto necessarie siano per ogni maniera di bocche da fuoco le Tavole dei tiri: e però ci faremo ad esporre brevemente il modo di compilarle.

Il cardine sul quale si appoggia la costruzione di dette tavole, è la velocità iniziale de' proietti. Di qui è, che avendo ricorso alle formole (30. 32. §. 207), o sivvero al pendolo balistico, si potrà ottenere una serie di velocità iniziali in corrispondenza di cariche determinate sì per quantità e sì per qualità di polvere.

Le velocità iniziali poi per tal maniera ottenute, si potranno far variare secondo le diverse portate delle polveri, adoperando la solita proporzione (§. 30). Con questo procedimento potrebbesi formare una prima tavola, che nella prima colonna orizzontale contenesse le portate delle polveri trovate mediante il provetto, e nella prima colonna verticale comprendessé le cariche secondo il loro peso. Quindi in corrispondenza di ciascun numero di questa colonna, ed orizzontalmente scrivendoci le analoghe velocità, si verrebbe a formare una specie di tavola pittagorica.

285. La formola (40. §. 214) potrà servire a valutare la velocità residua in funzione della velocità iniziale, e della di-

stanza dell' oggetto che deve colpirsi. Perciocchè è dimostrato (§. 210) la traiettoria essere sensibilmente la stessa per gli angoli di proiezione di pochi gradi, che far possono le armi sui loro affusti. In conseguenza di ciò si potrebbe formare una seconda tavola, la quale contenesse nella prima colonna orizzontale le distanze date tra l' arma ed il bersaglio; nella prima colonna verticale le velocità iniziali, ed in corrispondenza di queste ed orizzontalmente le analoghe velocità residue che ne porge la formola.

286. Con la formola (35. §. 209) valutando l' angolo di mira in funzione della velocità iniziale data, e della distanza del segno da colpire; e con l' altra (37. §. 210) calcolando l' alzo corrispondente, si formerà una terza tavola, nella quale si potran comprendere le velocità iniziali, gli alzi, e le distanze.

287. Se nel risolvere la formola (37. §. 210) l' alzo risultasse negativo, si converrebbe far uso dappoi della formola (11. §. 17) a fine di calcolare l' abbassamento della linea di mira naturale al disotto del centro del bersaglio, vale a dire che se il bersaglio si trovasse al di dentro del punto in bianco naturale, bisognerebbe mirare con l' abbassamento, se al contrario si dovrebbe far uso dell' alzo.

288. Si è osservato antecedentemente (§. 207) che le velocità iniziali date da Lombard sono le medesime di quelle che emergon dalle nostre formole, e perciò nella costruzione delle tavole de' tiri ci potremmo giovare di quelle stesse. E tenendo presente ciò che si è fatto osservare nel §. 219 e seguenti, si potrebbe far uso delle formole semplicissime (45. 46. 47. §. 217) e delle altre (37. 40. §§. 210. 214), a fine di costruire con la massima approssimazione un sistema di tavole de' tiri che avanzerebbero quelle di Lombard nella esattezza, con stabilire per altro per coefficiente della resistenza dell' aria quello calcolato con $k=0,9$ (§. 59. Tav. XV).

289. Pei tiri a rimbalzo e d' infilata, bisognerà risolvere da

prima la formola (32. §. 207) per conoscere la elevazione della bocca da fuoco in funzione delle coordinate del sopracciglio della fortificazione, e di quelle del punto di caduta: indi poi la formola (30. §. 207) servirà a valutare la corrispondente velocità iniziale come si è fatto di sopra (§§. 224. 225), ed infine calcolando l'alzo con la (37. §. 210), si mirerà di punto in bianco al detto sopracciglio. Con le quali cose si potrebbe formare una quinta tavola pei soli rimbalzi. Un esempio di questa maniera è indicato nel §. 224 e seguenti. Se poi non si volesse por mente al primo punto di caduta, converrebbe calcolare la velocità minima, e la velocità iniziale massima necessaria alla efficacia del rimbalzo, per ogni stazione della batteria (§. 230), e quindi fra queste due velocità sceglierne una, che si credesse più idonea a condurre allo scopo, per eseguire il tiro come quello di punto in bianco, dopo aver risolute le formole (35. §. 209) per l'angolo di mira, e la (37. §. 210) pel corrispondente alzo.

La tavola prima (§. 284) indicherebbe la carica appartenente alla velocità iniziale prescelta; e la terza tavola (§. 286) farebbe conoscere l'alzo da usarsi nel rimbalzo.

290. Per quanto poi appartiene ai mortari, le tavole del tiro potrebbero compilarsi nel modo che segue:

Si stabilisca una carica costante, variando solamente la elevazione, e viceversa. Quindi, come già è detto, si fa uso della macchina di rotazione di Grobert (§. 46), affine di conoscere la velocità iniziale della bomba. E perchè maggiore sia la certezza de' risultamenti, si ripetano l'esperienze tante volte quante le velocità iniziali, poste le medesime condizioni, si appalesassero tra di loro pochissimo o niente discordanti. Dopo di ciò calcolando le velocità iniziali, col far variare le portate delle polveri (§. 33), e adoperando la formola (52. §. 244) per rinvenire l'ampiezza del ramo ascendente della traiettoria, e l'altra (58. §. 247) per trovare quella del ramo discen-

dente, si giungerebbe in fine a conoscere l'ampiezza del ramo totale.

Ciò posto due tavole si formerebbero pel mortaro. Nella prima si conterrebbero i diversi angoli di proiezione, le velocità iniziali e le cariche di polvere. Nella seconda poi sarebbero compresi gli angoli di elevazione, le cariche, le portate delle polveri, e le ampiezze calcolate.

Pel servizio de' mortari detti a *placca*, che tirano con l'angolo costante di 45°, si hanno a far variare le sole cariche per conoscere le velocità iniziali, e quindi come pei mortari ad orecchioni, si adoperano le formole da cui si ricavano le ampiezze. In tal guisa si avrà il modo di formare una sola tavola per ognuna di siffatte armi.

A tutto questo vogliamo aggiungere che in due modi si può colpire nel bersaglio; o col fare variare la velocità iniziale della bomba con la distanza del bersaglio, e graduare l'arma con l'angolo della portata massima (§. 256), o con l'usare sempre la medesima carica, e far variare in funzione della portata l'angolo di elevazione. Il primo modo per altro è più accomodato per ben aggiustare il tiro. E di fatti un errore che si commetta nell'angolo, non arreca gran divario nella portata, perocchè questa si trova vicino al suo valore massimo. Per lo che potrebbesi costruire una tavola per gli angoli, per le ampiezze massime, e per le velocità iniziali.

Dalle cose dichiarate finora intorno alla formazione delle tavole del tiro, si comprende che la loro base è la velocità iniziale sperimentale; e che, qualora partendo dalle portate delle armi, venissero costruite, sarebbero tavole alquanto prossime al vero, ma i loro risultamenti ne condurrebbero spesse volte in errore. E questa verità viene assai validamente confermata dal dottissimo discorso premesso alla prima parte degli sperimenti di Hutton, voltati in francese dal Villantroys.

Le tavole de' tiri che sonosi fino al presente tempo forma-

te, la tavoletta del bombardiere di D'obenheim (A), e la nota di Bellencontre sulla costruzione grafica delle tavole di Lombard (B), debbonsi, a giudizio di tutti gli artiglieri balistici, tenere in conto di tavole provvisorie; e se nelle occorrenze si fa uso di quelle, ciò è perchè non ce ne ha di meglio compilate. E perciò è da desiderarsi che un'abile mano si metta all'opera del formarle, seguendo la via che fin'ora abbiamo mostrato, applicando i dati precetti alle note formole della balistica, le quali, per la natura loro, possono bene esser trattate col calcolo de' logaritmi. Il qual lavoro se a taluno paresse troppo faticoso ed arduo, il bene che ne verrebbe all'artiglieria sarebbe largo ristoro di siffatta fatica, che pur risulterebbe di lunga pezza minore di quella che hanno costato le tavole dei logaritmi, e quelle de' seni, coseni, e delle tangenti.

TEORICA V.

Tiro de' pezzi da campagna.

291. Di tale uso sono le batterie da campagna, che forte si manifesta il bisogno di render costante la quantità della carica di polvere. Nè di comenti ha mestieri questa verità per le chiare e quasi infinite ragioni che la confermano. Accurati e scrupolosi esami, ed i molti sperimenti hanno condotto a stabilire, che pei tiri de'cannoni da battaglia la carica sia di un terzo del peso della palla. L'uso di molti anni ha sempre dimostrato, che per una maggior carica si addimandava una spessezza di metallo più grande di quella fissata dal Gribeauval, ed una più solida costruzione nell'affusto. Per le quali cose si renderebbe oltremodo pesante l'intera macchina, e malagevole a trasportarsi, e i diversi movimenti con le soldatesche difficili ad ese-

(A) Mémorial de l'artillerie pag. 143 N.° III.
(B) Mémorial de l'artillerie pag. 359 N.° III

guirsi. Ed oltre a ciò si vuole por mente, che la carica di sopra indicata concilia la giustezza de' tiri con la lunghezza delle portate che per le battaglie si richieggono. Da queste cose ne procede, che la velocità iniziale della palla rimane stabilita; ond' è che, supponendo il bersaglio situato a differenti distanze, non rimane altro da valutarsi, eccetto l' alzo.

Con siffatta operazione, per governare i tiri dei cannoni da battaglia non ci vuole che una sola tavola, nella quale siano comprese le varie distanze dal bersaglio, le qualità delle polveri, gli alzi e gli abbassamenti corrispondenti. A questa guisa appunto, ma seguendo il metodo del Lombard, sono state compilate le tavole pel tiro del nostro cannone da sei, e dell' obice da 24 dell' anno XI (C). In queste tavole a dir vero sono state fissate a due a due le linee degli alzi pel cannone ed a quattro a quattro quelle per l' obice, a fine di schivare le frazioni, e quindi sonosi calcolate le distanze de' differenti punti in bianco. Il qual metodo, opposto a quello da noi generalmente prescritto, si è stimato esser utile, perciocchè basta un piccolo errore nel proporzionare l' alzo perchè vada il colpo fallato, mentre ciò non accade quando pur si commette errore di qualche conto nel valutare ad occhio la distanza dal segno.

292. Per l' obice da sei secondo il sistema di Gribeauval, e per quello dell' anno XI di 5.7.2, le tavole pel tiro si potrebbero calcolare col metodo istesso che abbiamo proposto pel cannone da battaglia, con la differenza che nelle tavole appartenenti a queste due armi non sarebbero notati gli abbassamenti, giacchè il primo obice ha il raggio alla fascialta di culatta punti $4\frac{1}{2}$ minore del raggio alla gioia, ed il secondo ha la linea di mira parallela all' asse. Per entrambe le quali bocche da fuoco è stabilita la carica di once 17 francesi.

(C) Memoria dell' autore sulle tavole del tiro del pezzo da 6, ed obice da 5.6.2 di campagna. Napoli 1839.

Per rispetto poi alla formazione delle tavole dell'obice cannone da 24 e da sei, converrebbe tener lo stesso metodo accennato per quelle del cannone; ed allora le tavole corrispondenti conterrebbero anche gli abbassamenti, perchè a questi due obici si è dato un angolo di mira naturale: e sono altresì governati con due cariche, con la piccola, così detta, e con la grande.

Per l'obice da 24 esse cariche corrispondono rispettivamente a $0^k,5$ e 1^k di polvere; per quello da sei a $0^k,75$ e $1^k,5$ di polvere (D). Da ciò deriva che per ciascuna di queste due armi si dovrebbero calcolare due tavole di tiro.

293. Allorquando in battaglia il terreno si presenta piano, unito, ed abbastanza duro, torna vantaggioso il tiro a rimbalzo teso, poichè il proietto, poco elevandosi dal terreno, incontra uomini, animali, e macchine. Conviene dunque avvezzare nei Poligoni gli artiglieri a questa specie di tiri. Gribeauval giunse quasi a sopperire al modo di ottenere l'intento con dare al suo obice da sei il raggio alla gioia maggiore di quello della culatta. Infatti se per mirare al segno pongasi l'occhio rasente al metallo o rasente l'alzo e la gioia, il tiro riuscirà alquanto ficcante, e la granata comincerà i suoi salti innanzi all'oggetto cui si è mirato.

Nell'attaccare con le batterie da campagna un ridotto, un trinceramento, od altro guerresco riparo, converrà preferire a qualsivoglia il tiro a rimbalzo arcato, a fine di avere la prima caduta nel terrapieno dell'opera fortificata, che se il rimbalzo fosse teso, ed il terrapieno da battere di non grande lunghezza, il primo punto di caduta risulterebbe fuori della fortificazione, e forse il tiro non avrebbe neppure l'effetto de' tiri d'infilata.

Dunque per calcolare le tavole onde colpire di rimbalzo siffatta specie di opere, converrà quasi sempre far uso della minima velocità iniziale; e se necessità lo comanda, usare le

(D) Aide-Mémoire pag. 134 an 1836.

altre velocità più piccole, ad oggetto di far cadere nel terrapieno il proietto con un tiro quasi verticale: la cui efficacia sarà doppia, se il proietto scagliato sia una granata. Ma il tiro d'infilata riuscirebbe vantaggiosissimo, quante volte molto lungo fosse il terrapieno dell'opera fortificata.

294. Le tavole pei tiri a metraglia si debbono costruire mercè i soli sperimenti e senza uso di formole balistiche. In esse va notata la distanza massima, a cui si deve far giungere, con ottimo effetto, la metraglia: la quale distanza è stimata dover essere 390 in 490 (=200 in 250 tese). Di poi ci hanno a essere indicate le distanze minori, e tutti gli alzi corrispondenti.

Nei tiri a metraglia da campagna, la carica va aumentata di $0^k,122$ (= $\frac{5}{4}$ di lib. fran), per la ragione che il peso dell'intero tubo risulta maggiore di quello del rispondente proietto.

Rispetto agli obici, la carica massima, e la carica minima va pure aumentata per la stessa quantità di polvere di 0^k122, allorquando si tira a metraglia. Un tal tiro con l'obice è più efficace di quello del cannone, poichè il tubo di metraglia del primo contiene un maggior numero di palle che il tubo del secondo, ed ha un'altezza minore ed un diametro maggiore; le quali condizioni rendono le palle più vicine fra loro, o per meglio dire, il tubo della metraglia per l'obice si avvicina più che quello del cannone al cilindro quadrato.

Le tavole per guidare i tiri a metraglia de' pezzi da campagna, composte dopo lunghi e maturi sperimenti, sono riportate nell'Aide Mémoire del 1836.

In altri tempi i tubi di metraglia contenevano le palle di differente diametro secondo l'uso a cui dovevano servire: ma al presente contengono in generale lo stesso numero di palle per ogni arma particolare, ed è stata così bandita la piccola metraglia dagli apprestamenti di guerra. Ma noi conveniamo nella sentenza di molti maestri di artiglieria, i quali vorrebbero si usasse la piccola metraglia in molte occorrenze, come sarebbe

in un vigoroso assalto, nel quale i combattenti fossero molto vicini fra loro, nel difendere il passaggio di un fiume, od una testa di ponte, e via discorrendo. Voglion per altro costoro, che ad evitare ogni sbaglio, siano contrassegnati in modo visibile i tubi della piccola metraglia, e si adoperino per questa specie di tiri tali soldati, che ad un buon discernimento accoppiino quel sangue freddo, che tanto è necessaria dote in tutti gli artiglieri. Tutto ciò è guarentito e rafforzato ancora dalla dotta ed utilissima Memoria di Lyautey (E), nella quale si trovano riferite queste parole.....

« Per ultimo riscontriamo il quadro profferto alla pagina 157, » dal quale si potrà rilevare che nelle occorrenze, in cui la » gran metraglia è poco efficace, conviene adoperare la pic- » cola, e preghiamo i nostri lettori a ricordarsi a quali distanze » tornano efficaci le piccole palle da 8 e da 12, ed a quale » il fuoco della fanteria diviene micidiale ».

Ed affinchè maggiore effetto si consegua nel tiro delle bocche da fuoco di campagna, tanto con i proietti quanto con le metraglie, è di mestieri postarsi sempre ai fianchi delle colonne, se le circostanze lo permettono. Per lo contrario converrà, quanto più sia possibile, tirare in obliquo contro le linee di battaglia, perciocchè il tiro perpendicolare diretto contro gli uomini disposti in linea riesce meno micidiale.

TEORICA VI.

Tiro contro le piazze forti.

295. Nello assediare le piazze forti, i pezzi da 24 e da 16 si postano nelle batterie delle parallele. Il lor tiro fatto a pieno fuoco dev'esser governato in maniera da demolire le cannoniere nemiche, e secondo Lombard, da rasare quanto più

(E) Mémorial de l'artillerie pag 126 n.° 11.°

si può il parapetto delle fortificazioni, a fine di preparare ottimo riescimento ai tiri di rimbalzo, e a quelli d'infilata. A tale oggetto sarebbero accomodate le tavole, di cui sopra abbiamo fatto parola (§. 152 e seguenti): adoperando pel pezzo da 24 la velocità iniziale di 445^m (= 1400 piedi), e per quello da 16 la velocità di 487^m (= 1500 piedi), come lo stesso autore stabilisce.

296. Per aprire la breccia si adoperano cannoni dei summentovati calibri, tirando a tagliare il rivestimento della piazza verso il piede in linea orizzontale, e di tratto in tratto in linea verticale. Nel condurre siffatta operazione si hanno a impiegare velocità iniziali di 487^m a 520^m, per far sì che i proietti molto addentro si profondino nel muro. Dopo di ciò si deve diminuire la velocità iniziale, riducendola a 325 in 390^m; perciocchè dallo scuotimento istesso deve prodursi il crollare e il cadere delle macerie.

La sperienza di molti anni ha condotto a stabilire che per aprire una breccia di circa 20^m col pezzo da 24 debbonsi trarre col modo detto di sopra, alla distanza di 500^m,5000 proietti, e 6000 col pezzo da 16. Alla distanza poi di 40^m; ad aprire la medesima breccia ci vogliono col primo pezzo 1000 colpi, e 1200 col secondo. Si vogliono per altro considerare questi dati come risultamenti medii, a fine di avere in pronto nelle congiunture sicuri e determinati punti di partenza.

Intorno al tiro da breccia sarà molto utile il consultare gli analoghi sperimenti riferiti da Duchemin (F), ne'quali vien pure dimostrato essere di niuna efficacia le granate da 6, e da 8 scagliate contro le opere delle fortificazioni in muro, e indicato in qual modo tali granate si hanno ad impiegare, qualora si scaglino contro terre di specie diverse, e contro i parapetti di terra, che in generale si fanno nelle differenti fortificazioni.

(F) Mémorial de l'artillerie pag. 151 n.° IV.°

297. Le batterie per trarre di rimbalzo si situano perpendicolarmente al prolungamento delle facce delle diverse opere, ond'è munita la piazza, ad oggetto di scavalcare le artiglierie ivi postate, e distruggere tutto quello che ci si trova. Questa specie di tiro è senza dubbio da preferirsi a quella a pieno fuoco, non solamente per la economia delle munizioni, ma ancora perchè riesce di un effetto più distruttore.

Le bocche da fuoco che si usano per tirare a rimbalzo contro le piazze, sono i pezzi da 24, da 16 e da 12, e gli obici da 8 e da 6.

Per ogni distanza, alla quale si postano le batterie di rimbalzo, conviene calcolare la minima e la massima velocità iniziale (§. 230) de' proietti, e poscia impiegare quelle cariche, le quali comunicano ai proietti le velocità iniziali medie. Se la faccia, contro la quale si tira a rimbalzo, non contenesse traverse, si dovrebbe far uso delle velocità iniziali che si approssimano alla massima, affinchè il tiro riescisse d'infilata. Se poi ci fossero traverse, converrebbe adoperare la velocità minima, e quelle che di poco ne differiscono.

Allorquando poi si voglia scavalcare qualche bocca da fuoco, la quale sia molto vicina alla massa covrente, in fra i 13^{m} dal parapetto (§. 223), si dovrà far uso di una debole carica che dia una velocità iniziale minore di quella stabilita come minima; così il tiro sarebbe quasi verticale, ed il proietto non produrrebbe risalti.

La velocità massima e la minima stabilite dal Lombard pei tiri a rimbalzo, sono subordinate al dominio massimo di 19^{m},5 (= 60 piedi), che può avere l'opera di fortificazione sul terreno circostante. Vogliamo avvertire, che oltre di questo limite, la batteria che dee trarre di rimbalzo, non può accostarsi all'opera meno di 400^{m} a un dipresso.

I tiri a rimbalzo si governano come quelli di punto in bianco, tenendo conto del dominio dell'opera esposta ad un tal

tiro, a fine di farne uso nelle formole pel calcolo dell'alzo. E quindi a similitudine della tavola prima (§. 284) si formerebbe per ogni arma, per ogni distanza, e per ogni dominio dell'opera presa di mira, la corrispondente tavola del tiro. La tavola prima poi darebbe la carica di polvere, e l'alzo ad oggetto di mirare di punto in bianco alla cresta del parapetto, o pure un poco sopra per più accertare il tiro.

Ed affinchè nell'attacco delle piazze si ottenga il massimo vantaggio sull'inimico, quello cioè sloggiarlo dalle fortificazioni, si rende necessario l'adoperare senza interruzione il tiro a rimbalzo.

298. Il tiro de' mortari, che si usa dagli assedianti, dovrebbesi governare con tavole costruite secondo le regole che antecedentemente abbiamo dichiarate (§. 290).

Si adoperano le bombe ad interrompere le comunicazioni del corpo della piazza con le opere distaccate, a sfondare ed incendiare le conserve delle polveri, e menare in ruina altri luoghi ed altri obbietti ch'esser potessero d'impedimento alla celerità degli attacchi, e ritardare la resa della piazza. Per diroccare un fabbricato che opponga molta resistenza, si tira con l'angolo di elevazione di 60°, al quale si conviene proporzionare la carica di polvere in funzione della distanza a cui vuolsi che la bomba cada. Però si ha in preferenza a scagliare, generalmente parlando, ne' terrapieni delle opere fortificate nelle quali stanno gli artiglieri, che, siccome è chiaro, sono la parte più importante della difesa. E poichè l'angolo di 60° fa che il ramo discendente della traiettoria molto si avvicini alla verticale, e perciò poco differisce da 90° così, essendo nella percossa poca perdita di velocità, l'effetto che ne risulta sarà prossimo al massimo effetto vero.

TEORICA VII.

Tiro per la difesa delle piazze.

299. I tiri che si fanno per difendere una piazza assediata, sono intesi a distruggere le batterie degli assedianti, a romperne e sdruscirne i gabbioni e le fascinate, e a molestare del continuo i lavoratori delle trincere. A dir breve, lo scopo di cotali fuochi quello è di tirare in lungo, più che si può, la difesa.

Per conseguire tali risultamenti fa di mestieri, che i proietti operino con poca forza, cioè con piccole velocità iniziali non maggiori di 325^{m} in 390^{m} (= 1000 a 1200 piedi) come la sperienza ne ammaestra. Inutile sarebbe una velocità maggiore, e cagionerebbe soverchio consumo di polvere, che l'assediato dee tener molto cara.

Si danno nel corso di una difesa certe tali congiunture, in cui le artiglierie della piazza debbono tirare a rimbalzo; e ciò non solamente contro il nemico, che allo scoperto si appresenta per respingere le sortite, ma ancora per molestarlo ed offenderlo dietro alle opere di terra che lo cuoprono. In tal fatto le cariche delle armi si debbono proporzionare alla resistenza degli ostacoli da rompersi, ma non così ch'esse eccedano in peso; dappoichè è cosa assai nota, che grande quantità di moto impressa ad un proietto produce talora in un corpo resistente effetto di niun conto qual sarebbe un semplice pertugio.

Per lo contrario con discreta e mediocre quantità di moto riducesi il medesimo ostacolo in molti frantumi, o schegge.

Dalle cose discorse è forza conchiudere, che le tavole de' tiri per la difesa di una piazza vanno formate con molto discernimento, e non con regole prese ad arbitrio. Perciocchè nel comporle è da tener conto delle velocità residue de' proietti,

per valutare le quantità di moto atte ad operare efficacemente contro i diversi ostacoli. In conseguenza, essendo data la velocità residua in funzione della distanza, si avrà a calcolare con le note formole, la velocità iniziale per mezzo della quale si proporzioneranno le quantità di polvere per le cariche, e poscia si stabilirà l'alzo corrispondente. L'uso peraltro delle tavole di che si parla, è subordinato ad alcune distanze fisse alle quali inevitabilmente deve mettersi l'assediante se vuole operare l'attacco della piazza. Le quali distanze si possono ridurre alle seguenti, cioè; 120, 240, 520, e 600 metri dalle difese.

300. Si adoperano nella difesa i pezzi di grandi ugualmente che di piccoli calibri.

I pezzi di piccolo calibro tirano dai cammini coperti e dalle opere avanzate tanto a palla che a granata ed a metraglia, ed anche a rimbalzo, secondo chiede il bisogno. Quelli poi di grosso calibro tirano a pieno fuoco e di rimbalzo, dai rivellini, dai bastioni e dalle cortine; ed a misura che il nemico si fa padrone successivamente delle opere di difesa, si metterà convenevolmente in azione la metraglia.

Volendosi poi difendere la breccia, ed impedire il passaggio del fosso conviene mettere in uso ogni maniera di fuoco, e con tutte le possibili armi, sparare con la metraglia grande e la piccola, con i proietti vuoti e le palle, e via discorrendo. Deve in somma il difensore condotto a tal termine fare l'estremo della sua forza, come con sublime ed efficace ragionamento insegna il general De Ville, i cui precetti avrebbero ad essere scolpiti nella mente di ogni militare. Perciocchè in quel frangente si decide la sorte di una piazza, la cui caduta può trar seco le conseguenze più funeste ad un esercito e anche ad un intero reame, come specialmente nelle ultime guerre sovente è accaduto. E a mostrare di che importanza sia la difesa delle piazze forti, il Montecuccoli le chiama, *le ancore sacre della salvezza degli stati.*

301. Nella difesa le bombe vogliono più che altrove esser lanciate colà dove uomini, attrezzi e materie da guerra sono raccolti, e, se viene il destro, contro le conserve delle munizioni. Ma più di ogni altra cosa torna vantaggioso il far cadere le bombe dentro le batterie dell'inimico affine di sloggiarne o di uccidere gli artiglieri, i quali in un assedio formano la parte più importante. Ora le tavole, di che abbiamo detto, a questo fine condurrebbero, quante volte si usassero con la massima intelligenza.

TEORICA VIII.

Tiro delle batterie di costa.

302. Abbiamo detto che per rimbalzare sull'acqua debbono i proietti fare al massimo un angolo d'incidenza di 4 in 5 gradi, e che in altra guisa si attufferebbero senza aver forza di risaltare. La quale cosa considerando il Gribeauval stabilì qual esser debba l'altezza delle batterie di costa. Poniamo che un legno da guerra si trovi 200^{m} lontano dalla costa. Risolvendo un triangolo rettangolo che abbia per cateto orizzontale 200^{m}, ed un angolo acuto di 4 in 5 gradi, l'altro cateto risulterà di 14 in 18^{m}. E tali altezze determinano quanto le batterie di costa hanno di dominio sul mare. Le quali dimensioni fan sì, che le batterie di costa siano al riparo de' tiri a rimbalzo, nè possono essere dominate dai bordi delle più grandi navi di fila. Perciocchè l'esperienza ha reso manifesto che i proietti rimbalzando sull'acqua descrivono successive curve le cui altezze non oltrepassano mai i 14^{m}; la qual condizione è favorevole alle sole batterie di costa.

Dallo stabilito dominio delle batterie di costa sul mare procede a queste il grande vantaggio di poter cominciare a far fuoco efficacemente, quantunque le navi siano, ancora molto

discoste dal lido. Perciocchè i pezzi di costa, tirando sull'acqua alla distanza di 200^m incirca con la incidenza massima di 4 in 5°, i loro proietti seguitano a rimbalzare alla distanza di 1200 in 1300^m (H), e tale distanza diventerà anche maggiore col diminuire l'angolo d'incidenza.

Da ciò conseguita, che qualora abbiasi a costruire una batteria in tale spiaggia che non consenta alle navi di molto avvicinarsi alla terra, potrebbe quella elevarsi oltre l'altezza di 18^m, affinchè i tiri, acquistando così portate lunghissime, arrechino alle navi offese micidiali, anche prima che più si faccian d'appresso.

I tiri di tutte le batterie di costa hanno ad esser guidati in maniera, che i proietti cadano sempre davanti le navi, affinche ne' loro rimbalzi le incontrino sempre, e le offendano. Perciocchè tirando di punto in bianco, ci è il rischio di perdere il colpo, a meno che l'arma non sia governata da un abilissimo miratore.

303. Le tavole pe' tiri de' pezzi in ferro si hanno a formare secondo le regole di sopra dimostrate, e precipuamente si dovrebbero costruire quelli appartenenti all'obice cannone da 80 o di maggior calibro, il quale con tiro orizzontale manda la bomba contro le navi.

Armate di siffatta bocca da fuoco le batterie di costa, si può da queste sbandire i mortari, il cui tiro non è molto certo contro corpi fluttuanti e di non vasta mole. E di fatto pochi esempii ci porge la storia di gravi danni, che nelle fazioni contro il littorale abbiano riportate le navi dai tiri de' mortari.

Generalmente parlando le tavole de' tiri pei pezzi di costa, dovrebbero, per maggior semplicità, tener conto solamente di alcune distanze, alle quali o per la natura della spiaggia, o per altre cagioni, possono le navi da guerra operare.

(H) Aide-Mémoire pag. 306 an 1836.

Che se le batterie di costa fossero a casamatta, idonee a scagliare proietti incendiarii di ogni maniera, bombe orizzontalmente, granate, palle roventi ed altro, e precipuamente se venissero servite da artiglieri del tirare espertissimi, è impossibile a dir con parole con quanta ruina e strage, sebbene poche fossero di numero, terrebbero lontani dal lido i navigli dell' inimico. Spauracchio a femine ed a fanciulli, o per meglio dire infame pretesto a coonestare la viltà o il tradimento, noi reputiamo quell' assurda sentenza, non esserci fortificazione che possa resistere ad una flotta, sia quanto poco vuolsi, poderosa. Chi poi desiderasse meglio conoscere quanto sia grande la forza e la importanza di una batteria di costa; vegga le due memorie intorno a questo argomento scritte dal Gribeauval.

Nè valga il dire, che i mezzi ed i sussidii ad offendere che hanno ai tempi nostri le navi da guerra, avanzano di gran lunga quelli che erano in uso al tempo di tanto insigne maestro. Perciocchè noi rispondiamo, questo non esser colpa della natura di siffatte batterie; e che, se mentre pei legni da guerra si profondono ingenti somme, altrettanto si avrebbe a fare per le batterie della costa, *ancore sacre della difesa*, e metter così in proporzione gli aiuti a difendere con i mezzi di offendere. Del resto poi conchiuderemo col Carnôt, il cui libro sulla difesa delle piazze forti, avrebbe a far parte principale della suppellettile di ciascun militare « Che al cuor di un bravo è sempre » bella e cara cosa il conoscere che la sua devozione non » torna del tutto inutile alla patria, e per essa ponendo la vita » in pericolo, le rende un segnalato servizio ».

Noi abbiamo succintamente dichiarata la natura de' tiri con le artiglierie in uno aspetto generale in quanto si accorda coi soli risultamenti delle formole balistiche; chè non è stato nostro intendimento il farne una particolarizzata istruzione, per non trasandare i confini che fin dal principio ci eravamo segnati.

Digitized by Google

TEORICA IX.

Piramidi di palle.

I proietti sferici di artiglieria si sogliono situare in forma di piramidi a basi, triangolari, quadrate, e rettangolari.

304. La piramide triangolare è formata a strati triangolari, procedendo dal vertice alla base: ciascuno strato è un triangolo equilatero eccetto il primo il quale contiene una sola palla. Il lato del secondo strato contiene due palle, il lato del terzo tre e così seguitando; ossia il primo strato ha una palla, il secondo tre, il terzo sei, il quarto dieci ec. ec., quali numeri si ottengono dalla somma dei termini della progressione aritmetica

1.2.3.4.5.6.....

1.3.6.10.15.21.. (*a*) che si dicono numeri triangolari.

La piramide a base quadrata ha una sola palla al primo strato, quattro al secondo, nove al terzo, e così proseguendo. Questi numeri si ottengono dalla somma dei termini della progressione dei numeri dispari

1.3.5.7.9.....

1.4.9.16.25.. (*b*) i quali si dicono numeri quadrati.

Gli strati della piramide rettangolare sono tanti rettangoli: il solo primo strato contiene una sola riga di palle, che dinotiamo con m, il secondo ne contiene due dinotate da $2(m+1)$, il terzo ne contiene tre dinotate da $3(m+2)$ e così ec. ec. Questi numeri si ottengono dalla somma dei termini della progressione aritmetica

$$m.m+2.m+4.m+6...$$

$m.2(m+1).3(m+2).4(m+3)..$ (*c*) detti numeri rettangolari.

Dall'esposto ne emerge che i numeri triangolari, quadrati, e rettangolari, compongono tre progressioni a seconde differenze costanti. E siccome una progressione aritmetica ha la prima differenza costante, e la somma è una funzione di secondo

grado del numero dei termini, ed il termine generale è funzione della prima potenza del numero stesso, così per induzione la somma delle tre progressioni dei numeri figurati dev'essere una funzione del numero dei termini elevato a cubo, ed il termine generale una funzione del numero dei termini elevato a quadrato.

Sia S la somma di una progressione a seconde differenze costanti, è lecito fare, chiamando n il numero dei termini,

$$S = An^3 + Bn^2 + Cn \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (P)$$

in cui A, B, C sono coefficienti indeterminati d'assegnarne il valore mediante i termini della data progressione.

Ponendo in questa formola per n $n-1$ la somma corrispondente, sarà

$$s = A(n-1)^3 + B(n-1)^2 + C(n-1)$$

onde è $S-s$ il termine generale che indichiamo con T, per la qual cosa sottraendo dal primo il secondo membro, si ottiene per termine generale

$$T = A[n^3 - (n-1)^3] + B[n^2 - (n-1)^2] + C[n - (n-1)]$$

ovvero

$$T = 3An^2 - 3An + A + 2Bn - B + C \quad . \; . \; . \quad (Q)$$

Queste due formole valgono a valutare la somma ed il termine generale di tutte le progressioni a seconde differenze costanti.

305. Sia la data progressione quella indicata di sopra (a), si faccia in (Q) $n=1$, $n=2$, $n=3$ si avranno in conseguenza i primi tre termini della (a); dunque

$$\begin{aligned} A + B + C &= 1 \\ 7A + 3B + C &= 3 \\ 19A + 5B + C &= 6 \end{aligned}$$

dalle quali risulta

$$A = \frac{1}{6}, \; B = \frac{3}{6}, \; C = \frac{2}{6}, \text{ onde}$$

$T=\frac{3}{6}n^2-\frac{3}{6}n+\frac{1}{6}+n-\frac{3}{6}+\frac{2}{6}$, ossia riducendo viene

$$T=\frac{n(n+1)}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Similmente risulta dalla formola (P)

$$S=\frac{n^3+3n^2+2n}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6} \quad \ldots (14)$$

Esempio. Una piramide triangolare abbia 12 strati, cominciando dal vertice, se ne vuol conoscere il dodicesimo strato, e la somma delle palle che la compongono.

Sarà $n=12$, perciò $T=\frac{12.13}{2}=78$, e

$$S=\frac{12.13.14}{6}=364.$$

Vogliamo notare che la piramide triangolare ha tutte le facce, triangoli equilateri dello stesso numero di palle.

306. Sia la data progressione quella indicata da (b) si faccia in (Q) similmente $n=1$, $n=2$, $n=3$ si avranno in conseguenza i primi tre termini della (b); che danno

$$A+B+C=1$$
$$7A+3B+C=4$$
$$19A+5B+C=9$$

onde

$A=\frac{2}{6}$, $B=\frac{3}{6}$, $C=\frac{1}{6}$ per la qual cosa

$$T=n^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

$$S=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \ldots (16)$$

Esempio. Una piramide quadrangolare abbia 12 strati cominciando dal vertice, se ne vuol calcolare il dodicesimo strato, e la somma delle palle che la compongono.

Avremo $n=12$, per la qual cosa

$$T=12^2=144, \text{ ed } S=\frac{12.13.25}{6}=650.$$

La piramide quadrangolare ha quattro facce triangoli equilateri di egual numero di palle, ciascun lato è quanto il lato del quadrato di base.

307. Sia la data progressione quella indicata da (c), si faccia in (O) successivamente $n=1$, $n=2$, $n=3$, si avranno per ciò

$$A+B+C=m$$
$$7A+3B+C=2m+2$$
$$19A+5B+C=3m+6$$

per cui $A=\frac{2}{6}$, $B=\frac{3m}{6}$, $C=\frac{3m-2}{6}$, e

$$T=n(m+n-1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

$$S=\frac{2n^3+3mn^2+(3m-2)n}{6}=\frac{n(2n^2+3mn+3m-2)}{6}=$$

$$\frac{n[2n^2+3m(n+1)-2]}{6}=\frac{n[2(n^2-1)+3m(n+1)]}{6}, \text{ infine}$$

$$S=\frac{n(n+1)(3m+2n-2)}{6} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

È lieve osservare che facendo $m=1$, la piramide rettangolare si cambierà in piramide quadrangolare: infatti risulta

$$T=n(1+n-1)=n^2$$

$$S=\frac{n(n+1)(3+2n-2)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

queste due ultime formole si sono ottenute ancora (§. 306) con un metodo diretto.

Esempio. Una piramide rettangolare abbia 12 strati, la cresta sia di 7 palle, si cerca il dodicesimo strato, cominciando dalla medesima, e la somma delle palle che compongono la intera piramide.

Si ha $n=12$ ed $m=7$, perlocchè emerge

$$T=12(7+12-1)=216 \text{ ed}$$

$$S=\frac{12.13(3.7+2.12-2)}{6}=\frac{12.13.43}{6}=1118.$$

308. Il problema inverso è, dato un numero di palle formarne una piramide, o triangolare o quadrangolare.

Sia S il dato numero di palle: per la piramide triangolare si ha (§. 305).

$$S=\frac{n^3+3n^2+2n}{6};$$

risolvendo questa equazione di terzo grado si troverà il valore di n. Per non incorrere nella risoluzione dell'equazione di tal grado possiamo tenere il seguente metodo.

Si liberi l'equazione da fratti, e si ha $6S=n^3+3n^2+2n$, e perciò $6S>n^3$, e $6S<(n+1)^3$, da ciò $n<\sqrt[3]{6S}$, $n+1>\sqrt[3]{6S}$, n è dunque, in astratto parlando, la radice del più gran cubo contenuto in $6S$.

Per la piramide quadrangolare si ha (§. 306)

$$S=\frac{2n^3+3n^2+n}{6},$$

che dà

$$3S=n^3+\frac{3n^2}{2}+\tfrac{1}{2}n$$

e perciò

$$3S>n^3,\ \text{e}\ 3S<(n+1)^3,$$

quindi

$$n<\sqrt[3]{3S},\ \text{ed}\ n+1>\sqrt[3]{3S},$$

n è dunque, parlando in astratto, la radice cuba del più gran cubo contenuta in $3S$.

Riguardo alla piramide rettangolare si ha (§. 307)

$$S=\frac{n(n+1)(3m+2n-2)}{6}$$

nella quale vi sono tre quantità differenti, bisogna conoscerne due per determinare la terza.

In quanto alla conoscenza del giusto valore di n, vi sono delle avvertenze tali da evitare gli errori che si potrebbero commettere nel risolvere il problema inverso: due esempii particolari danno le norme precise per guidare con sicurezza ogni maniera di applicazioni.

Esempio. Date 454 palle formarne una piramide triangolare; ciò significa quante palle si debbono prendere dalle date per formare la più gran piramide possibile.

Per quello dichiarato, risulta $\sqrt[3]{6S}=\sqrt[3]{6.454}=\sqrt[3]{2724}=13$ più una frazione che si trascura, perciocchè il numero degli strati è sempre un intero: supponiamo che fosse $n=13$ come in astratto si è detto, allora la formola (14. §. 305) darebbe

$$454=\frac{13.14.15}{6}$$

ma siccome il secondo membro dà 455, maggiore del primo membro; dunque dovrà essere $n=12$. Ora con 12 strati si ha

$S=\frac{12.13.14}{6}=364$ palle, ne rimangono $454-364=90$:

nè con queste 90 si può formare il tredicesimo strato. Infatti la formola (13. §. 305) dà

$T=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{13.14}{2}=91$, quindi ne mancherebbe una.

Esempio. Date 456 palle formarne la più gran piramide triangolare possibile.

Avremo $\sqrt[3]{6.456}=\sqrt[3]{2736}=13$ più una frazione: onde se fosse $n=13$, la formola (14. §. 305) darebbe

$$456=\frac{13.14.15}{6},$$

ma il secondo membro dà 455, minore del primo, quindi in questo esempio la piramide dovrà avere 13 strati, e ne supera una sola palla.

Dall'esposto si ritrae che il valore di n, o è la radice del più gran cubo contenuto in $\sqrt[3]{6S}$ diminuita di uno, o la stessa radice senza alcuna diminuzione: lo stesso è da dirsi pel valore $\sqrt[3]{3S}$ onde stabilire quello di n appartenente alla piramide quadrangolare.

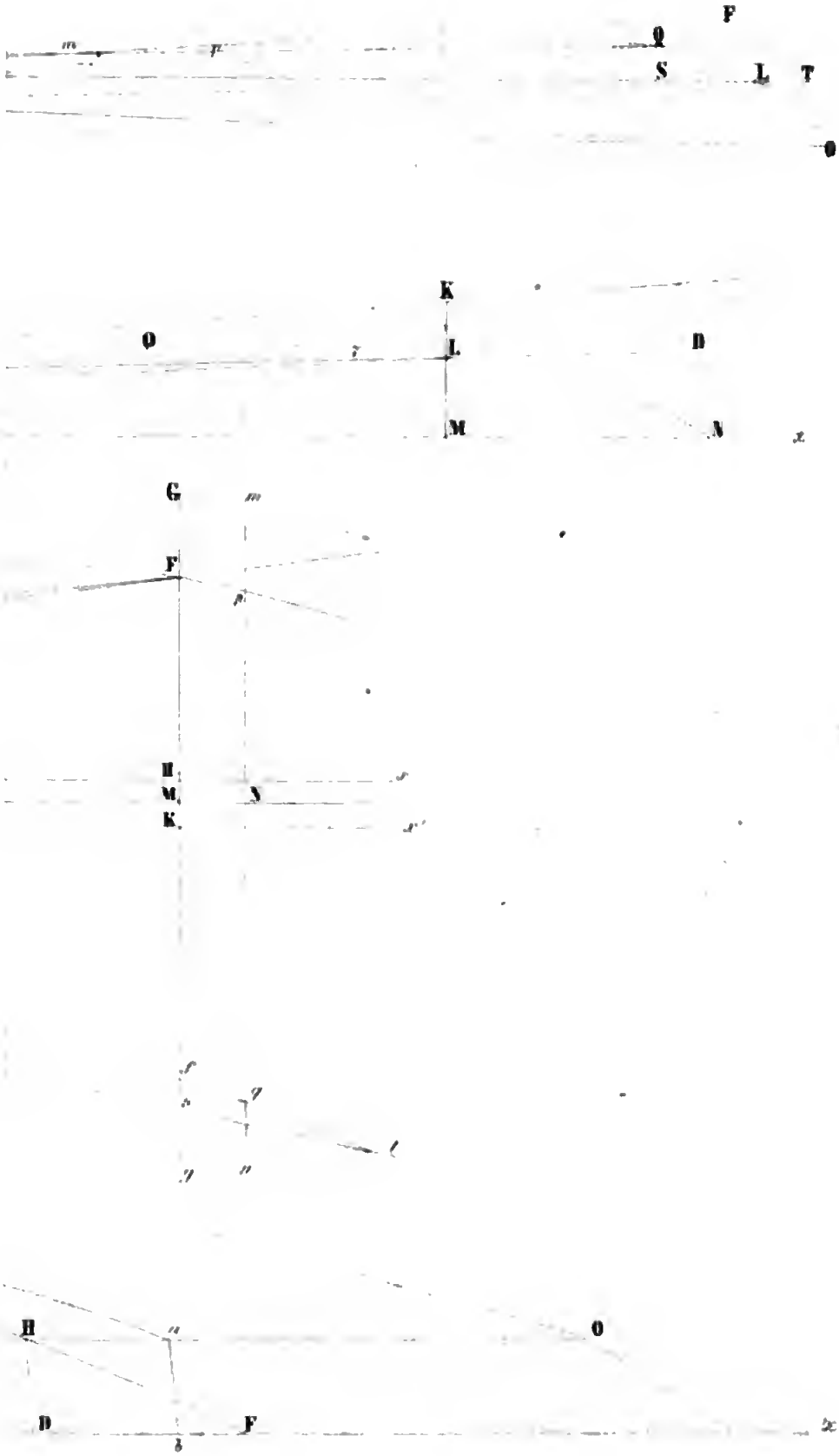
FINE.

Pag.	riga	ERRATA.	CORREZIONE.
25.	17.	$\frac{RO}{\tan 10^\circ}$	$RO \tan 10^\circ$
35.	8.	parobola	parabola
45.	17.	quanto	quando
49.	13.	$\frac{cs\sqrt{l}}{n}$	$\frac{cs''\sqrt{gl}}{n}$
62.	3.	$\frac{\delta\omega b^2 A}{w' h^2 A}$	$\frac{\delta\omega b^2 h}{\omega' b^2 A}$
66.	6.	v' residua	v' differenza residua
78.	21.	1701	1071
87.	7.	a	$\frac{1}{2} a$
94.	16.	(29)	(19)
96.	9.	$R = \frac{1}{3} k\omega\pi a^2 \frac{v^2}{g}$	$R = \frac{1}{3} k\omega\pi a^2 \frac{v^2}{g}$
96.	26.	$-\frac{3k\omega}{4a\omega'}$	$-\frac{3k\omega v^2}{4a\omega'}$
97.	26.	Bezut	Bezout
100.	11.	$v = \frac{V}{v^{\frac{x}{c}}}$	$v = \frac{V}{e^{\frac{x}{c}}}$
104.	10.	corrisponde	corrispondente
111.	12.	(13. §. 76)	(35. §. 76)
127.	7.	$A : a$	$a : a'$
135.	10.	$336^m,6$	$336^m,4$
158.	28.	vetto	provetto
187.	11.	2,20258	2,30258
199.	10.	$\frac{\delta\alpha}{3\varphi\frac{1}{2}\sqrt{\beta . 2gH}}$	$\frac{\delta\alpha}{3\varphi\frac{1}{2}\sqrt{\beta . 2gH}} u$
200.	19.	$\frac{6}{10}$	$\frac{2}{10}$
212.	23.	0,9632	0,9655
212.	23.	1,9119	1,9142
218.	4.	$\sqrt{m} : \sqrt{n}$	$\sqrt[4]{m} : \sqrt[4]{n}$
218.	10	$\frac{1}{2} V \times 1,9119$	$\frac{1}{2} V \times 1,9142$
218.	10.	$V = \frac{842}{1,9119}$	$V = \frac{842}{1,9142}$

Pag.	riga		
218.	11.	log. 1,9119	log. 1,9142
218.	11.	2,64428	2,64337
234.	28.	massima	minima
246.	7.	infinitissima	infinitesima
248.	28.	3^k	4^k
252.	4.	partezza	partenza
255.	24.	$\frac{1}{30}(P+p)$.	$\frac{1}{30}(P+q)$
260.	3.	0,0085	0,0095
269.	17.	$\sqrt[3]{\frac{4}{0,074}}$	$\sqrt[3]{\frac{4}{0,047}}$
287.	7.	$Dx=Ds\cos 0^\circ=Ds$, $Dy=Ds\,\text{sen}\,0^\circ$ . .	$Dx=Ds\cos 1^\circ$, $Dy=Ds\,\text{sen}.\,1^\circ$
302.	3.	$c^{\omega x}$	$e^{\omega x}$
307.	12.	0,8178	0,8176
312.	3.	$p=0$	$p=\tan\alpha$
312.	3.	$C=-\log.\text{ip}\left(\tan\alpha+\frac{1}{2h\cos^2\alpha}\right)$	$C=-\log.\text{ip}\,\frac{1}{2h\cos^2\alpha}$
335.	19.	$\frac{c^X-1}{X}$	$\frac{e^X-1}{X}$
342.	23.	115.	215
344.	9.	$\log IBM$	$\log.\tan IBM$
355.	12.	GL, $\tan M$	$GL.\tan M$
356.	6.	$\frac{V^2\tan M}{gc}$	$\frac{2V^2\tan M}{gc}$
371.	5.	76558	0,76558
377.	2.	$\sqrt{1+\tan 45^\circ}$	$\sqrt{1+\tan^2.45^\circ}$
380.	23.	XXXVI	XXXVII
406.	16.	$\frac{\text{sen}\,45^\circ}{Z}$	$\frac{\text{sen}.\,45^\circ}{Z}$
432.	23.	2,2333..2,2333×0,01015	3,2333..3,2333+0,01012
432.	24.	$X=2,4342$	$X=3,24342$
433.	14.	2,35426.	3,35426
447.	4.	rinculo	ecesso
447.	10.	$0^m,011$	$0'',011$.
465.	1	$G\frac{P}{V}$	$G=\frac{P}{V}$

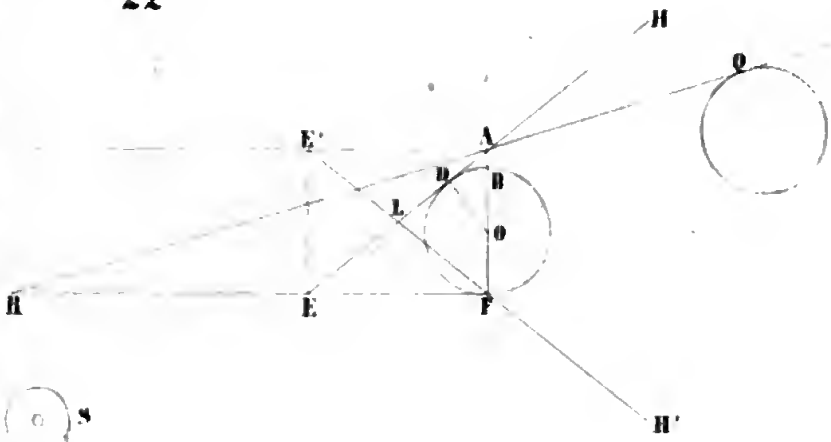
583190

Tav. I.

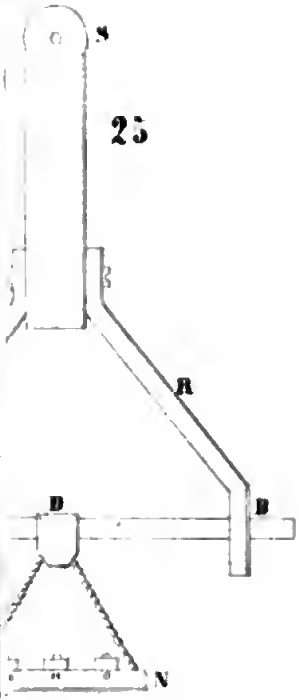


Digitized by Google

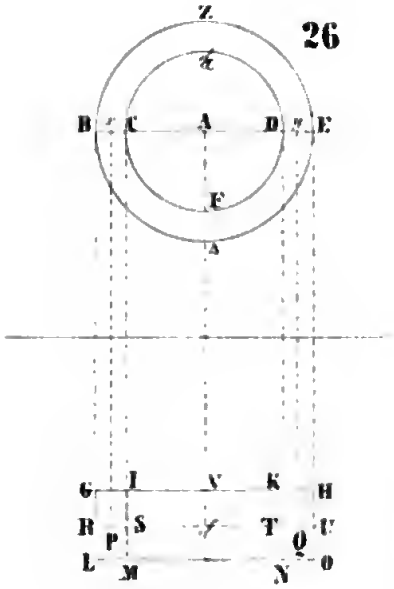
22



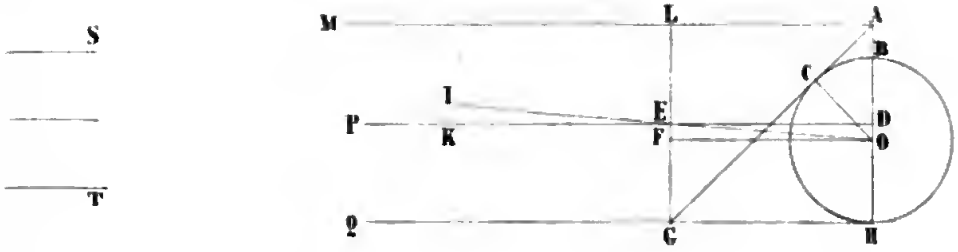
25



26



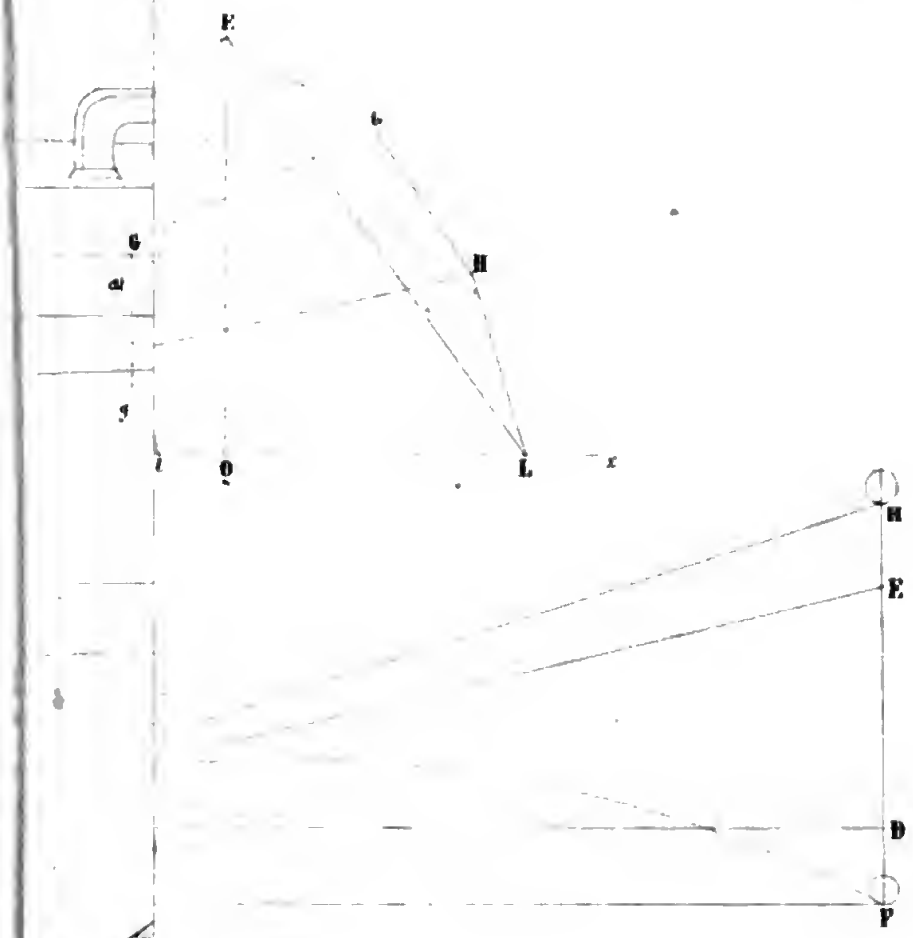
30



Digitized by Google

Digitized by Google

Tav. IV



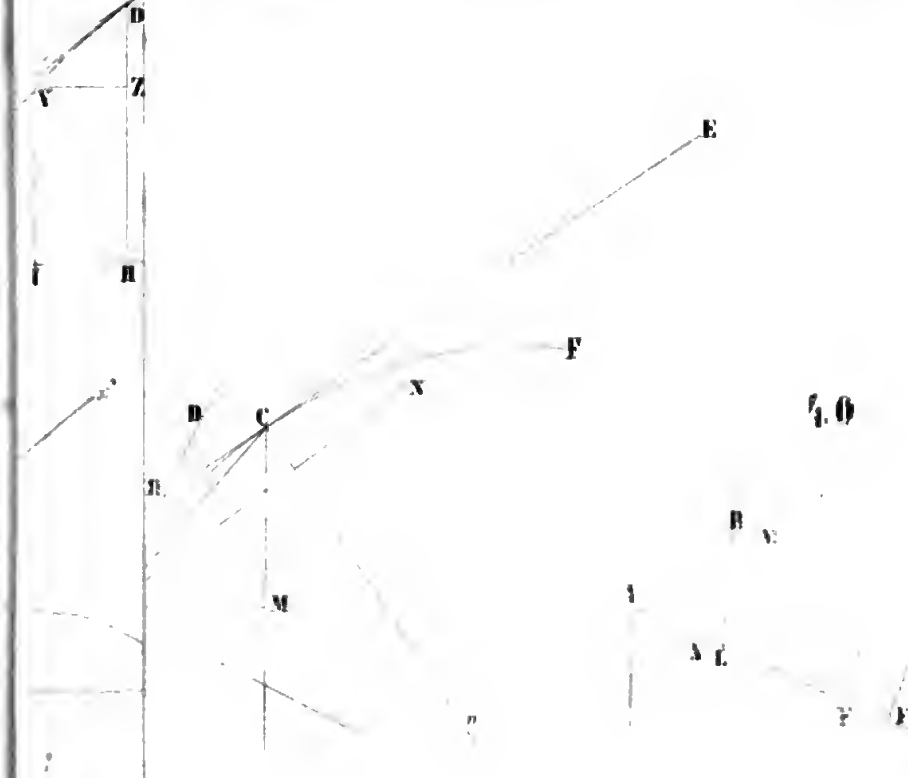


fig. 0

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google